

С.О. СИМОНЯН

**К РЕШЕНИЮ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЧНЫХ
ПАЛИНДРОМНЫХ ЗАДАЧ ТИПА $A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot A(t) = 0$**

Предложены два метода решения однопараметрических матричных палиндромных задач: аналитический метод, представляющий определенный теоретический интерес, и численно-аналитический метод, представляющий научно-практический интерес. В последнем случае основным математическим аппаратом служат дифференциальные преобразования.

Ключевые слова: однопараметрические матричные палиндромные задачи, аналитический метод решения, дифференциальные преобразования, численно-аналитический метод решения.

Введение

В работах [1, 2] предложены методы решения однопараметрических матричных уравнений типа Сильвестра:

$$A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot B(t) = C(t), \quad (1)$$

в [3] - однопараметрических матричных уравнений типа Ляпунова:

$$A^T(X) \cdot X(t) + X(t) \cdot A(t) = C(t), \quad (2)$$

в [4] - однопараметрических транспонированных аналогов матричных уравнений типа Сильвестра:

$$A(t) \cdot X(t) + X^T(t) \cdot B(t) = C(t), \quad (3)$$

в [5] - однопараметрических сопряженных аналогов матричных уравнений типа Сильвестра:

$$A(t) \cdot X(t) + X^*(t) \cdot B(t) = C(t), \quad (4)$$

в [6] - однопараметрических транспонированных аналогов матричных уравнений типа Сильвестра:

$$A(t) \cdot X(t) + B(t) \cdot X^T(t) = C(t). \quad (5)$$

В работах [7, 8] представлены обобщения этих методов для решения наиболее сложных задач:

$$A(t) \cdot X(t) \cdot D(t) + F(t) \cdot X^T(t) \cdot B(t) = C(t), \quad (6)$$

$$A(t) \cdot X(t) \cdot D(t) + F(t) \cdot X^*(t) \cdot B(t) = C(t). \quad (7)$$

Замечание 1. Во всех этих работах в качестве основного математического аппарата были использованы дифференциальные преобразования Г.Е. Пухова [9].

Несмотря на совершенно различные друг от друга по виду задач (1) – (7) и по содержанию методов их решения, они всё-таки имеют одну общую черту - обладают неоднородными правыми частями ($C(t) \neq 0$).

При однородных правых частях ($C(t) = 0$) эти задачи вырождаются и приобретают определенные черты сингулярности, обуславливающие принципиальные затруднения вычислительного характера при реализации численных процедур по определению их нетривиальных решений ($X(t) \neq 0$).

Если для решения аналогичных (1)-(7) числовых неоднородных задач ($C \neq 0$) с постоянными (нефункциональными) матрицами A, B, C, D, F, X в настоящее время существует множество различных методов, то для решения однородных задач ($C=0, X \neq 0$) количество таких методов немного, в частности, можно отметить работы [10, 11].

Необходимость разработки таких методов обычно появляется при решении так называемых палиндромных задач [12], обладающих большой степенью сложности при определении нетривиальных решений $X \neq 0$. Что касается методов решения однопараметрических однородных задач ($C(t) = 0$) с матрицами $A(t), B(t), D(t), F(t), X(t)$, то, по всей вероятности, и в настоящее время они не существуют (во всяком случае, в данный момент они нам не известны).

Исходя из вышеизложенного, настоящая работа посвящена разработке методов для решения матричной палиндромной задачи

$$\underset{m \times m}{A(t)} \cdot \underset{m \times m}{X(t)} + \underset{m \times m}{X(t)} \cdot \underset{m \times m}{A(t)} = \underset{m \times m}{0}, \quad (8)$$

порождаемой задачей (1) при $B(t) \equiv A(t), C(t) \equiv 0$.

Математический аппарат

1. Аналитическое решение. Используя аппарат кронекеровых произведений матриц [12], матричное уравнение (8) представим в виде

$$[A(t) \otimes E^T(t) + E \otimes A^T(t)]_{m^2 \times m^2} \cdot \hat{X}(t)_{m^2 \times 1} = \hat{0}_{m^2 \times 1} \quad (9)$$

или

$$G(t) \cdot \hat{X}(t) = \hat{0}, \quad (10)$$

где $G(t)$ – гиперматрица порядка m^2 , $\hat{X}(t)$ – гипервектор:

$$\hat{X}(t)_{m^2 \times 1} = (X_{11}(t), X_{12}(t), \dots, X_{1m}(t), | X_{21}(t), X_{22}(t), \dots, X_{2m}(t) | \dots | X_{m1}(t), X_{m2}(t), \dots, X_{mm}(t))^\top \quad (11)$$

с размерами $m^2 \times 1$, порожденный от матрицы

$$\hat{X}(t)_{m \times m} = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1m}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1}(t) & x_{m2}(t) & \dots & x_{mm}(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

порядка m ; $E \equiv E^T$ – единичная матрица того же порядка, а символ $\otimes$ – знак кронекерова произведения матриц [12].

Из гиперматрично-гипервекторного однородного матричного уравнения (10) имеем

$$\text{а) } \hat{X}(t) = 0, \text{ если } \det G(t) = 0, \quad (13a)$$

$$\text{б) } \hat{X}(t) = 0, \text{ если } \det G(t) \neq 0, \quad (13б)$$

$$\text{в) } \hat{X}(t) \neq 0, \text{ если } \det G(t) = 0. \quad (13 в)$$

Естественно, условия (13а) и (13б) не представляют практического интереса. Следовательно, решение задачи (10) обусловлено выполнением условия (13в) и необходимостью последовательной реализации следующих операций:

- определение кронекеровой гиперматрицы $G(t)$;
- определение детерминанта этой матрицы;
- составление уравнения $\det G(t)=0$;
- решение этого уравнения и определение его корней – сингулярных точек $t_1, t_2, \dots, t_p$, где p – некоторое число;
- определение числовых гиперматриц $G(t_i)$, $i = \overline{1, p}$;
- определение числовых гипервекторов $\hat{X}(t_i)$, $i = \overline{1, p}$ с учетом условий

$$\text{rang } G(t_i) = m^2 - r_i, \forall i = \overline{1, p}, \quad (14)$$

где $0 < r_i \leq m^2$, при которых можно произвольно выбрать r_i компонентов гипервекторов $\hat{X}(t_i)$, $\forall i = \overline{1, p}$, а остальные $m^2 - r_i$ компонентов определить с точностью до этих выбранных значений;

- составление числовых матриц $X(t_i)$, $i = \overline{1, p}$ - решений исходной задачи в изолированных сингулярных точках t_i , $i = \overline{1, p}$;
- осуществление матричного аппроксимационного синтеза решения $X(t)$ задачи (10) с использованием числовых матриц $X(t_i)$, $i = \overline{1, p}$ на основе методов теории аппроксимации, например, методов Лагранжа, Ньютона и т.д. [13].

Замечание 2. Естественно, в сингулярных точках t_i , $i = \overline{1, p}$ аппроксимированное решение $X(t)$ будет удовлетворять матричному уравнению (8) точно, а в остальных текущих точках – с некоторыми погрешностями.

Замечание 3. В случае отсутствия сингулярных точек с учетом (13 б) задача будет обладать тривиальным решением $X(t) \equiv 0$. Иногда таким решением задача может обладать и в случае выполнения условия (13а).

Осуществление представленного алгоритма на практике для решения конкретных прикладных задач и модельных примеров, очевидно, весьма затруднительно с вычислительной точки зрения, ибо связано с определением аналитического представления - однопараметрической кронекеровой гиперматрицы $G(t)$, с решением однопараметрического детерминантного уравнения $\det G(t) = 0$ и нахождением сингулярных точек t_i , $i = \overline{1, p}$, определением рангов числовых гиперматриц $G(t_i)$, $i = \overline{1, p}$ и выбором произвольных значений $m^2 - r_i$, $i = \overline{1, p}$ компонентов гипервекторов $\hat{X}(t_i)$, $i = \overline{1, p}$, определением их остальных компонентов и составлением числовых матриц $X(t_i)$, $i = \overline{1, p}$, а также с аппроксимационным синтезом непрерывной матрицы $X(t)$ с использованием числовых матриц $X(t_i)$, $i = \overline{1, p}$.

Замечание 4. Для определения детерминанта кронекеровой гиперматрицы $G(t)$ можно использовать результаты работы [14].

Замечание 5. Для решения уравнения $\det G(t) = 0$ можно использовать результаты работы [15].

В связи с отмеченными обстоятельствами теперь перейдем к численно-аналитическому решению задачи, основанному на операционном методе - дифференциальных преобразований [1] и значительно облегчающему нахождение решения эквивалентной матричному уравнению (8) задачи (10) с учетом условия (13 в).

2. Численно-аналитическое решение

Предположим, что имеют место следующие дифференциальные преобразования [1]:

$$A(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K A(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad A(t) = \chi_1(t, t_v, H, A(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (15)$$

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K X(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad X(t) = \chi_2(t, t_v, H, X(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (16)$$

где $A(K)$ и $X(K)$ - матричные дискреты матриц $A(t)$ и $X(t)$ соответственно; $K = \overline{0, \infty}$ - целочисленный аргумент; H - масштабный коэффициент; t_v - центр аппроксимации; символ $\overline{\cdot}$ - знак перехода из области оригиналов в область дифференциальных изображений и наоборот; $\chi_1(\cdot)$, $\chi_2(\cdot)$ - некоторые аппроксимирующие функции, восстанавливающие оригиналы $A(t)$ и $X(t)$ соответственно.

Теперь с учетом (15)-(16) в соответствии с алгеброй дифференциальных преобразований матричное уравнение (8) из области оригиналов переведем в область дифференциальных изображений. Получим

$$\sum_{l=0}^K A(l) \cdot X(K-l) + \sum_{l=0}^K X(l) \cdot A(K-l) = 0, \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (17)$$

откуда:

при $K=0$:

$$A(0) \cdot X(0) + X(0) \cdot A(0) = 0, \quad (18)$$

или

$$[A(0) \otimes E^T + E \otimes A^T(0)] \cdot \hat{X}(0) = \hat{0}, \quad (19)$$

или

$$G(0) \cdot \hat{X}(0) = \hat{0}. \quad (20)$$

Из однородного гиперматрично-гипервекторного уравнения (20) имеем:

$$\text{а) } \hat{X}(0) = \hat{0}, \text{ если } \det G(0) = 0, \quad (21 \text{ а})$$

$$\text{б) } \hat{X}(0) \neq \hat{0}, \text{ если } \det G(0) = 0, \quad (21 \text{ б})$$

$$\text{в) } \hat{X}(0) = \hat{0}, \text{ если } \det G(0) \neq 0. \quad (21 \text{ в})$$

Очевидно, случаи (21 а) и (21 в) не представляют практического интереса из-за тривиальности решения $\hat{X}(0) = \hat{0}$, ввиду чего в дальнейшем будем оперировать условием (21 б) или, точнее, условием

$$\text{rang } G(0) = m^2 - r \quad (22)$$

(где $0 < r \leq m^2$), при котором можно произвольно выбрать r компонентов гипервектора $\hat{X}(0)$, а остальные $m^2 - r$ компонентов определить с точностью до этих выбранных значений. Ясно, что при этом в качестве центров аппроксимации t_ν необходимо выбрать значения из множества сингулярных точек t_i , $i = \overline{1, p}$, при которых выполнится условие $\det G(0) = 0$, обуславливающее получение нетривиальных решений – матричных дискретов $\hat{X}(0) \neq 0$, $\hat{X}(1)$, $\hat{X}(2)$ и т.д.

Итак, с учетом (17) имеем:

при $K=1$:

$$A(0) \cdot X(1) + A(1) \cdot X(0) + X(0) \cdot A(1) + X(1) \cdot A(0) = 0, \quad (23)$$

или

$$A(0) \cdot X(1) + X(1) \cdot A(0) = -A(1) \cdot X(0) - X(0) \cdot A(1),$$

или

$$[A(0) \otimes E^T + E \otimes A^T(0)] \cdot \hat{X}(1) = -[A(1) \otimes E^T + E \otimes A^T(1)] \cdot \hat{X}(0),$$

или

$$G(0) \cdot \hat{X}(1) = -G(1) \cdot \hat{X}(0), \quad (24)$$

откуда

$$\hat{X}(1) = -G^+(0) \cdot G(1) \cdot \hat{X}(0), \quad (25)$$

где “+” - знак псевдообратной матрицы;

при $K=2$:

$$G(0) \cdot \hat{X}(2) + G(1) \cdot \hat{X}(1) + G(2) \cdot \hat{X}(0) = \hat{0}, \quad (26)$$

откуда

$$\begin{aligned} \hat{X}(2) &= -G^+(0) \cdot [G(1) \cdot \hat{X}(1) + G(2) \cdot \hat{X}(0)] = \\ &= [[G^+(0) \cdot G(1)]^2 - G^+(0) \cdot G(2)] \cdot \hat{X}(0); \end{aligned} \quad (27)$$

...

при $K=K$:

$$\begin{aligned} G(0) \cdot \hat{X}(K) + G(1) \cdot \hat{X}(K-1) + G(2) \cdot \hat{X}(K-2) + \dots \\ \dots + G(K-2) \cdot \hat{X}(2) + G(K-1) \cdot \hat{X}(1) + G(K) \cdot \hat{X}(0) = \hat{0}, \end{aligned} \quad (28)$$

откуда

$$\begin{aligned} \hat{X}(K) &= -G^+(0) \cdot [G(1) \cdot \hat{X}(K-1) + G(2) \cdot \hat{X}(K-2) + \dots \\ &\dots + G(K-2) \cdot \hat{X}(2) + G(K-1) \cdot \hat{X}(1) + G(K) \cdot \hat{X}(0)] = \\ &= -G^+(0) \cdot \sum_{l=1}^K G(l) \cdot \hat{X}(K-l). \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом, имея гипервекторные дискретизации (21 б), (25), (27),...(29), можно построить матричные дискретизации

$$X(K) = \begin{bmatrix} X_{11}(K) & X_{12}(K) & \dots & X_{1m}(K) \\ X_{21}(K) & X_{22}(K) & \dots & X_{2m}(K) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{m1}(K) & X_{m2}(K) & \dots & X_{mm}(K) \end{bmatrix}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad (30)$$

и в соответствии с правой частью (16) восстановить решение $X(t)$ задачи (8). В частности, при дифференциально-тейлоровских преобразованиях [1]:

$$X(t) = \sum_{l=0}^K X(l) \cdot (t - t_v)^\ell. \quad (31)$$

Заключение. Таким образом, для решения однопараметрической матричной палиндромной задачи (8) предложены аналитический и численно-аналитический методы. Первый из них, скорее всего, представляет теоретический, а второй – научно-практический интерес.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Симонян С.О.** Методы решения однопараметрических матричных непрерывных уравнений типа Сильвестра $A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot B(t) = C(t)$ // Известия НАН РА и НПУА. Сер. ТН. - 2015. – Т. LXVIII, №3.- С. 370-381.
2. **Симонян С.О.** Декомпозиционные методы решения линейных однопараметрических матричных непрерывных уравнений типа Сильвестра $A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot B(t) = C(t)$ // Известия НАН РА и НПУА. Сер. ТН. - 2015. - Т. LXVIII, №4.- С. 497-510.
3. **Симонян С.О., Адамян Г.В., Симонян А.С., Паповян Р.А.** Методы решения линейных однопараметрических матричных непрерывных уравнений типа $A^T(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot A(t) = C(t)$ // Вестник ИАА. – 2015. - Т.12, № 2. - С. 216-224.
4. **Симонян С.О.** К решению однопараметрических матричных уравнений типа Сильвестра $A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot B(t) = C(t)$ // Известия НАН РА и НПУА. Сер. ТН.- 2016. - Т. LXIX, №1. - С. 49-60.
5. **Симонян С.О., Айвазян А.А.** К решению однопараметрических матричных уравнений типа $A(t) \cdot X(t) + X^*(t) \cdot B(t) = C(t)$ // Ж. “Радиоэлектроника, информатика, управление” / Запорожский национальный технический университет.- Запорожье, 2016.- С. 44-53.
6. **Симонян С.О., Адамян Г.В., Айвазян А.А.** К решению однопараметрических матричных уравнений типа $A(t) \cdot X(t) + B(t) \cdot X^T(t) = C(t)$ // Известия НАН РА и НПУА. Сер. ТН.- 2016. - Т. LXIX, №3. - С. 304-314.
7. **Симонян С.О.** Методы решения обобщенных однопараметрических транспонированных аналогов матричных уравнений типа Сильвестра $A(t) \cdot X(t) \cdot D(t) + F(t) \cdot X^T(t) \cdot B(t) = C(t)$ // Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиотехника. - 2016. - №1. - С. 12-24.
8. **Симонян С.О., Айвазян А.А.** Методы решения обобщенных однопараметрических матричных уравнений (сопряженных аналогов) типа Сильвестра $A(t) \cdot X(t) \cdot D(t) + F(t) \cdot X^T(t) \cdot B(t) = C(t)$ // Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиотехника. – 2017. - N 1. – С. 9-20.
9. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. - Киев: Наукова думка, 1990. – 419 с.
10. **Fernando De Teran and Froilan M.Dopico.** The solution of the equation $X \cdot A + A \cdot X^T = 0$ and its application to the theory of orbits // Proceedings of HUA Linear Algebra Appl. - 2011. - 434. – P. 44-67.

11. **Fernando De Teran and Frolian M.Dopico.** The equation $X \cdot A + A \cdot X^* = 0$ and the dimension of congruence orbits // Electric on Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810. A publication of the International on Linear Algebra Society. - April, 2011. - Vol. 22. - P. 448-465.
12. **Икрамов Х.Д.** Численное решение матричных уравнений. – М.: Наука, 1984. – 192 с.
13. **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 632 с.
14. **Симонян С.О., Аветисян А.Г.** Вычисление определителей неавтономных матриц на основе ДТ-формализма // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. – 1999. - Т.52, N 1. - С. 88-94.
15. **Симонян С.О.** Прикладные аспекты применения ДТ-преобразований при построении траекторий равновесных состояний динамических систем // Электронное моделирование. – 1993. – Т.15, N2. – С. 58-65.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 01.09.2019.

Ս.Հ. ՄԻՄՈՆՅԱՆ

$A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot A(t) = 0$ ՏԻՊԻ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՊԱԼԻՆԴՐՈՄԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Առաջարկվել են միապարամետրական մատրիցային պալինդրոմային խնդիրների լուծման երկու եղանակներ՝ անալիտիկ եղանակը, որը ներկայացնում է որոշակի տեսական հետաքրքրություն, և թվա-անալիտիկ եղանակը, որը ներկայացնում է գիտա-գործնական հետաքրքրություն: Վերջինիս դեպքում որպես հիմնական մաթեմատիկական ապարատ են ծառայում դիֆերենցիալ ձևափոխությունները:

Առանցքային բառեր. միապարամետրական մատրիցային պալինդրոմային խնդիրներ, լուծման անալիտիկ եղանակ, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, լուծման թվա-անալիտիկ եղանակ:

S.H. SIMONYAN

SOLUTION OF ONE-PARAMETRIC MATRIX PALINDROM PROBLEMS OF THE TYPE $A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot A(t) = 0$

Two methods are proposed for solving one-parameter matrix palindromic problems - the analytical method, which is of certain theoretical interest, and the numerical-analytical method which is of scientific and practical interest. In the latter case, differential transformations serve as the main mathematical apparatus.

Keywords: single parametric matrix palindromic problems, analytical solution method, differential transformations, numerical-analytical solution method.