А С Т Р О Ф И З И К А

ТОМ 65 НОЯБРЬ, 2022 ВЫПУСК 4

DOI: 10.54503/0571-7132-2022.65.4-587

ВЕРОЯТНОСТЬ ВЫХОДА И СРЕДНИЕ ЧИСЛА РАССЕЯНИЯ ФОТОНОВ. I. ТОЧНЫЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Д.И.НАГИРНЕР, Ю.В.МИЛАНОВА, А.В.ДЕМЕНТЬЕВ, Е.В.ВОЛКОВ

Поступила 25 октября 2022
Принята к печати 11 ноября 2022

С использованием основных формул теории переноса излучения получены более подробные сведения о характеристиках рассеяния фотонов в плоском слое, а именно, найдены вероятности выхода фотонов отдельно через верхнюю и нижнюю границы слоя и средние числа рассеяния таких фотонов.

Ключевые слова: *перенос излучения: средние числа рассеяний фотонов*

1. *Введение.* По теории переноса излучения опубликованы монографии [1-7] и обзорные статьи [8-15], подводящие итог ее развития. Представляет интерес исследование более сложных случаев переноса, имеющих непосредственные приложения к астрофизическим объектам, таких как комптоновское рассеяние энергичных фотонов релятивистскими электронами в активных ядрах галактик или рассеяние излучения в сильных магнитных полях пульсаров. При этом появляется потребность в сведениях из традиционной теории переноса для более конкретных ситуаций и крайних значений параметров, на которые можно было бы опереться.

Исходя из потребностей указанных приложений, предпринята попытка пополнить результаты классической теории переноса. При этом обнаружились уголки теории, куда оказалось возможно внести неожиданные дополнения.

В статьях данной серии будут представлены детали статистического описания процесса многократного рассеяния. В данной статье приводятся общие формулы для вероятностей выхода фотонов из плоских сред и средних чисел их рассеяния в удобной для исследования и вычисления форме с уточнением для выхода через границы слоя. Получены также асимптотики различных характеристик поля излучения в глубоких слоях полубесконечной среды и оптически толстого плоского слоя.

Во второй статье серии в качестве примеров будут рассмотрены: рассеяние в одномерной среде, для которой все величины выражаются через элементарные функции, и (трехмерное) изотропное монохроматическое рассеяние, для которого выведены асимптотики различных характеристик поля излучения в глубоких слоях полубесконечной среды и оптически толстого плоского слоя.

2. *Основные характеристики и уравнения, описывающие рассеяние в плоском слое.*

2.1. *Основное интегральное уравнение.* Основным интегральным уравнением теории переноса излучения в плоском слое служит уравнение

$$S(\tau)=S_0(\tau)+\frac{\lambda}{2}\int_0^{\tau_0}K(|\tau-\tau'|)S(\tau')d\tau', \tag{1}$$

где τ_0 - оптическая толщина слоя, τ - оптическая глубина в слое, $0<\lambda\le 1$ - вероятность выживания фотона при однократном акте рассеяния, $S_0(\tau)$ - заданная функция, определяемая первичными источниками излучения, а $S(\tau)$ - искомая функция источников. Ядро интегрального уравнения выражается через ядерную функцию, которая предполагается представимой в виде суперпозиции экспонент:

$$K(\tau)=\int_a^b A(y)e^{-y\tau}dy, \tag{2}$$

где пределы $0\le a\le b\le\infty$, а весовая функция $A(y)\ge 0$ достаточно гладкая, например, имеющая кусочно непрерывную производную. Конкретная форма функции $A(y)$ определяется видом рассматриваемого рассеяния.

Наряду с ядерной функцией важную роль играют ее двустороннее преобразование Лапласа и преобразование Фурье:

$$\mathcal{V}(p)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-p\tau}K(|\tau|)d\tau=\int_a^b\frac{yA(y)dy}{y^2-p^2},\quad V(u)=\mathcal{V}(iu)=\int_a^b\frac{yA(y)dy}{y^2+u^2}. \tag{3}$$

Во всех случаях рассеяния $\mathcal{V}(0)=V(0)\le 1$. Для простоты предположим, что точно $\mathcal{V}(0)=V(0)=1$. Отличие от единицы можно переложить на значение λ.

2.2. *Резольвента и резольвентная функция.* Резольвента уравнения (1), определяемая уравнением

$$\Gamma(\tau,\tau_1,\tau_0)=\frac{\lambda}{2}K(|\tau-\tau_1|)+\frac{\lambda}{2}\int_0^{\tau_0}K(|\tau-\tau'|)\Gamma(\tau',\tau_1,\tau_0)d\tau', \tag{4}$$

позволяет находить решение при произвольной функции $S_0(\tau)$:

$$S(\tau)=S_0(\tau)+\int_0^{\tau_0}\Gamma(\tau,\tau_1,\tau_0)S(\tau_1)d\tau_1. \tag{5}$$

Она выражается через свое частное значение - резольвентную функцию $\Phi(\tau,\tau_0)=\Gamma(\tau,0,\tau_0)$:

$$\Gamma(\tau,\tau_1,\tau_0)=\Phi(|\tau-\tau_1|,\tau_0)+$$
$$\int\limits_0^{\min(\tau,\tau_1)}\left[\Phi(\tau-t,\tau_0)\Phi(\tau_1-t,\tau_0)-\Phi(\tau_0-\tau+t,\tau_0)\Phi(\tau_0-\tau_1+t,\tau_0)\right]dt, \quad (6)$$

которая удовлетворяет уравнению (следующему из (4) при $\tau_1=0$)

$$\Phi(\tau,\tau_0)=\frac{\lambda}{2}K(\tau)+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^{\tau_0}K(|\tau-\tau'|)\Phi(\tau',\tau_0)d\tau'. \quad (7)$$

2.3. *Преобразование Лапласа.* В теории вводится преобразование Лапласа от резольвенты по конечному промежутку

$$D(\tau,p,\tau_0)=e^{-p\tau}+\int\limits_0^{\tau_0}\Gamma(\tau,\tau_1,\tau_0)e^{-p\tau_1}d\tau_1=e^{-p\tau}+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^{\tau_0}K(|\tau-\tau'|)D(\tau',p,\tau_0)d\tau'. \quad (8)$$

Так как свободное слагаемое в уравнении (7) является суперпозицией экспонент $e^{-y\tau}$, то в силу линейности уравнения

$$\Phi(\tau,\tau_0)=\frac{\lambda}{2}\int\limits_a^b A(y)D(\tau,y,\tau_0)dy. \quad (9)$$

Функция $D(\tau,p,\tau_0)$ удовлетворяет также уравнению

$$\frac{\partial D(\tau,p,\tau_0)}{\partial\tau}=-pD(\tau,p,\tau_0)+X(p,\tau_0)\Phi(\tau,\tau_0)-Y(p,\tau_0)\Phi(\tau_0-\tau,\tau_0), \quad (10)$$

с помощью которого она выражается через свои частные значения и резольвентную функцию:

$$D(\tau,p,\tau_0)=X(p,\tau_0)\Psi(\tau,p,\tau_0)+Y(p,\tau_0)\left[\Psi(\tau_0-\tau,-p,\tau_0)-X(p,\tau_0)e^{p(\tau_0-\tau)}\right], \quad (11)$$

где

$$X(p,\tau_0)=D(0,p,\tau_0),\quad Y(p,\tau_0)=D(\tau_0,p,\tau_0),$$
$$\Psi(\tau,p,\tau_0)=e^{p\tau}\left[1+\int\limits_0^{\tau}e^{-p\tau'}\Phi(\tau',\tau_0)d\tau'\right]. \quad (12)$$

Эти частные значения называются *X*- и *Y*- функциями Чандрасекара.

Прямо из интегрального уравнения (4) получается линейное уравнение для $D(\tau,p,\tau_0)$ с интегралом по второму аргументу:

$$[1-\lambda\mathcal{U}(p)]D(\tau,p,\tau_0)=e^{-p\tau}-\frac{\lambda}{2}\int\limits_a^b A(y)dy\left[\frac{D(\tau,y,\tau_0)}{y-p}+\frac{D(\tau_0-\tau,y,\tau_0)}{y+p}e^{-p\tau_0}\right]. \quad (13)$$

При $p=\pm y$, $a<y<b$, интеграл для $\mathcal{U}(y)$ и интегралы справа понимаются как главное значение по Коши.

Заметим, что вместо резольвенты и резольвентной функции можно описывать многократное рассеяние функцией Грина и ее частным значением:

$$\Gamma_*(\tau, \tau_1, \tau_0) = \delta(\tau - \tau_1) + \Gamma(\tau, \tau_1, \tau_0), \quad \Phi_*(\tau, \tau_0) = \delta(\tau) + \Phi(\tau, \tau_0) \tag{14}$$

Тогда не требуется выделять внеинтегральные слагаемые в (4), (5), (7) и (8), но придется осторожно оперировать с дельта-функцией.

2.4. *Вероятность выхода*. Функция $D(\tau, p, \tau_0)$ пропорциональна вероятности выхода фотона из среды через границу $\tau = 0$, если первоначально фотон находился в поглощенном состоянии на глубине τ. Аргумент p определяет угловые и частотные характеристики выходящего фотона.

Нас здесь интересуют вероятности выхода фотона без уточнения этих характеристик. Для получения уравнений для них после замены p на y в (10) умножим это уравнение на $\frac{\lambda}{2} A(y) \frac{dy}{y}$ и проинтегрируем по y от a до b:

$$\frac{\partial P(\tau, \tau_0)}{\partial \tau} = -\Phi(\tau, \tau_0) + \Phi(\tau, \tau_0) P(0, \tau_0) - \Phi(\tau_0 - \tau, \tau_0) P(\tau_0, \tau_0). \tag{15}$$

Здесь полная вероятность выхода фотона с глубины τ через границу $\tau = 0$

$$P(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_a^b A(y) D(\tau, y, \tau_0) \frac{dy}{y} . \tag{16}$$

Для этой функции из (8) получается уравнение

$$P(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} L(\tau) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) P(\tau', \tau_0) d\tau', \quad L(\tau) = \int_\tau^\infty K(\tau') d\tau', \tag{17}$$

из которого также можно вывести (15) непосредственным дифференцированием.

Еще проще выводится равенство

$$\frac{\partial P(\tau, \tau_0)}{\partial \tau_0} = \Phi(\tau_0 - \tau, \tau_0) P(\tau_0, \tau_0). \tag{18}$$

Сложив два равенства (15) и (18), получим

$$\frac{\partial P(\tau, \tau_0)}{\partial \tau} + \frac{\partial P(\tau, \tau_0)}{\partial \tau_0} = -\Phi(\tau, \tau_0) + \Phi(\tau, \tau_0) P(0, \tau_0). \tag{19}$$

Уравнение (15) можно проинтегрировать по τ от 0 до τ и получить

$$\begin{aligned} P(\tau, \tau_0) &= P(0, \tau_0) + [P(0, \tau_0) - 1][\Psi(\tau, \tau_0) - 1] - P(\tau_0, \tau_0)[\Psi(\tau_0, \tau_0) - \Psi(\tau_0 - \tau, \tau_0)] = \\ &= 1 - [1 - P(0, \tau_0)]\Psi(\tau, \tau_0) - P(\tau_0, \tau_0)[\Psi(\tau_0, \tau_0) - \Psi(\tau_0 - \tau, \tau_0)], \end{aligned} \tag{20}$$

где интеграл от резольвентной функции

$$\Psi(\tau, \tau_0) = 1 + \int_0^\tau \Phi(\tau', \tau_0) d\tau' = \Psi(\tau, 0, \tau_0). \tag{21}$$

2.5. *Крайние значения вероятности выхода*. Подставим в (20) $\tau = \tau_0$:

$$\begin{aligned} P(\tau,\tau_0) &= P(0,\tau_0)+[P(0,\tau_0)-1][\Psi(\tau_0,\tau_0)-1]-P(\tau_0,\tau_0)[\Psi(\tau_0,\tau_0)-1]= \\ &= P(0,\tau_0)-[1+P(\tau_0,\tau_0)-P(0,\tau_0)][\Psi(\tau_0,\tau_0)-1]= \\ &= P(\tau_0,\tau_0)+1-[1+P(\tau_0,\tau_0)-P(0,\tau_0)]\Psi(\tau_0,\tau_0). \end{aligned} \tag{22}$$

Отсюда получается тождество

$$[1+P(\tau_0,\tau_0)-P(0,\tau_0)]\Psi(\tau_0,\tau_0)=1. \tag{23}$$

Еще одно тождество следует из уравнения (13). Подставив в него $\tau=0$ и $p=0$, воспользовавшись связью, вытекающей из определений (8) и (12):

$$D(0,0,\tau_0)=\Psi(\tau_0,\tau_0), \tag{24}$$

получим

$$(1-\lambda)\Psi(\tau_0,\tau_0)=1-P(\tau_0,\tau_0)-P(0,\tau_0). \tag{25}$$

Комбинирование двух тождеств дает соотношение

$$[1-P(0,\tau_0)-P(\tau_0,\tau_0)][1-P(0,\tau_0)+P(\tau_0,\tau_0)]=1-\lambda. \tag{26}$$

Для моментов крайних значений преобразования $D(\tau,p,\tau_0)$ вводятся специальные обозначения:

$$\alpha_n(\tau_0)=\int_a^b A(y)X(y,\tau_0)\frac{dy}{y^{n+1}}, \quad \beta_n(\tau_0)=\int_a^b A(y)Y(y,\tau_0)\frac{dy}{y^{n+1}}. \tag{27}$$

Соотношение (16) при $\tau=0$ и $\tau=\tau_0$ дает связь вероятностей выхода с моментами, через которые можно записать равенство (23):

$$P(0,\tau_0)=\frac{\lambda}{2}\alpha_0(\tau_0),\ P(\tau_0,\tau_0)=\frac{\lambda}{2}\beta_0(\tau_0),\ \Psi(\tau_0,\tau_0)=\frac{1}{1-\frac{\lambda}{2}\alpha_0(\tau_0)+\frac{\lambda}{2}\beta_0(\tau_0)}. \tag{28}$$

В дальнейшем используем не моменты, а крайние значения полной вероятности выхода.

Складывая первую строчку (20) со второй с измененными аргументами $\tau\leftrightarrow\tau_0-\tau$, получаем для вероятности выхода через обе границы

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\tau,\tau_0) &= P(\tau,\tau_0)+P(\tau_0-\tau,\tau_0)=1-[1-P(0,\tau_0)-P(\tau_0,\tau_0)]\times \\ &\times[\Psi(\tau,\tau_0)+\Psi(\tau_0-\tau,\tau_0)-\Psi(\tau_0,\tau_0)]. \end{aligned} \tag{29}$$

Воспользовавшись тождеством (25), перепишем (29) в другом виде

$$\mathcal{P}(\tau,\tau_0)=1-(1-\lambda)\Psi(\tau_0,\tau_0)[\Psi(\tau,\tau_0)+\Psi(\tau_0-\tau,\tau_0)-\Psi(\tau_0,\tau_0)]. \tag{30}$$

Еще один вид записи односторонних вероятностей, полностью симметричный:

$$\begin{aligned} P(\tau,\tau_0) &= \frac{1}{2}-[1-P(0,\tau_0)-P(\tau_0,\tau_0)]\left[\Psi(\tau,\tau_0)-\frac{1}{2}\Psi(\tau_0,\tau_0)\right]- \\ &-P(\tau_0,\tau_0)[\Psi(\tau_0,\tau_0)-\Psi(\tau_0-\tau,\tau_0)], \end{aligned} \tag{31}$$

$$P(\tau_0-\tau,\tau_0)=\frac{1}{2}-\left[1-P(0,\tau_0)-P(\tau_0,\tau_0)\right]\left[\Psi(\tau_0-\tau,\tau_0)-\frac{1}{2}\Psi(\tau_0,\tau_0)\right]+ \\ +P(\tau_0,\tau_0)\left[\Psi(\tau,\tau_0)-\Psi(\tau_0-\tau,\tau_0)\right]. \qquad (32)$$

Получение суммы (29) при такой записи тривиально.

Снова применив (25), найдем порознь

$$P(0,\tau_0)=1-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Psi(\tau_0,\tau_0)}+(1-\lambda)\Psi(\tau_0,\tau_0)\right], \\ P(\tau_0,\tau_0)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Psi(\tau_0,\tau_0)}-(1-\lambda)\Psi(\tau_0,\tau_0)\right]. \qquad (33)$$

3. *Средние числа рассеяния.*

3.1. *Определение.* По смыслу определения функции Грина (в расчете на единицу площади границы слоя рождается один фотон) произведение $\Gamma_*(\tau,\tau_1,\tau_0)d\tau$ представляет собой среднее число фотонов, излучающихся в слое $d\tau$ (также на единицу площади границы), или среднее число рассеяний, рожденных на глубине τ_1 фотона, причем первое излучение входит в это число. Среднее число рассеяний такого фотона во всей толщине слоя $N(\tau,\tau_0)$ равно интегралу от функции Грина и определяется уравнением, получающимся интегрированием уравнения для нее (т.е. уравнения (4) со свободным слагаемым $\delta(\tau-\tau_1)$) по τ. Ввиду симметричности $\Gamma_*(\tau,\tau_1,\tau_0)$ относительно аргументов τ и τ_1 можно интегрировать по τ_1, а аргументом оставить τ:

$$N(\tau,\tau_0)=\int_0^{\tau_0}\Gamma_*(\tau,\tau_1,\tau_0)d\tau_1=1+\frac{\lambda}{2}\int_0^{\tau_0}K(|\tau-\tau'|)N(\tau',\tau_0)d\tau'. \qquad (34)$$

Так как из этого следует, что $N(\tau,\tau_0)=D(\tau,0,\tau_0)$, то согласно (11) с учетом того, что $X(0,\tau_0)=Y(0,\tau_0)=\Psi(\tau_0,\tau_0)$,

$$N(\tau,\tau_0)=X(0,\tau_0)\left[\Psi(\tau,\tau_0)+\Psi(\tau_0-\tau,\tau_0)\right]-X^2(0,\tau_0)= \\ =\Psi(\tau_0,\tau_0)\left[\Psi(\tau,\tau_0)+\Psi(\tau_0-\tau,\tau_0)-\Psi(\tau_0,\tau_0)\right]. \qquad (35)$$

Путем комбинирования уравнений (17) и (34), определяющих функции $P(\tau,\tau_0)$ и $N(\tau,\tau_0)$, с использованием равенства

$$\int_0^{\tau_0}K(|\tau-\tau'|)d\tau'=2-L(\tau)-L(\tau_0-\tau) \qquad (36)$$

получается соотношение

$$(1-\lambda)N(\tau,\tau_0)+\mathcal{P}(\tau,\tau_0)=1. \qquad (37)$$

Из (37) и (30) следует, что

$$N(\tau,\tau_0)=\frac{1-\mathcal{P}(\tau,\tau_0)}{1-\lambda}=\Psi(\tau_0,\tau_0)\left[\Psi(\tau,\tau_0)+\Psi(\tau_0-\tau,\tau_0)-\Psi(\tau_0,\tau_0)\right]. \tag{38}$$

3.2. *Разделенные средние*. Средние числа рассеяний разделяются для фотонов, выходящих из среды N_E и поглощаемых в ней N_A. Очевидно соотношение, служащее фактически определением этих средних:

$$N(\tau,\tau_0)=\mathcal{P}(\tau,\tau_0)N_E(\tau,\tau_0)+\left[1-\mathcal{P}(\tau,\tau_0)\right]N_A(\tau,\tau_0). \tag{39}$$

Если найдено одно из них и известна вероятность $\mathcal{P}(\tau,\tau_0)$, то другое находится. Действительно, исключая из соотношений (37) и (39) $N(\tau,\tau_0)$, получаем

$$N_A(\tau,\tau_0)=\frac{1}{1-\lambda}-\frac{\mathcal{P}(\tau,\tau_0)}{1-\mathcal{P}(\tau,\tau_0)}N_E(\tau,\tau_0). \tag{40}$$

Еще более подробное рассмотрение предусматривает определение средних чисел рассеяний фотонов, которые вышли через определенную границу, как это было сделано по отношению к вероятностям выхода фотонов. Обозначим эти средние $N_+(\tau,\tau_0)$ и $N_-(\tau,\tau_0)=N_+(\tau_0-\tau,\tau_0)$ соответственно для верхней и нижней границы. Полное число рассеяний вышедших фотонов есть взвешенное среднее:

$$N_E(\tau,\tau_0)=\frac{P(\tau,\tau_0)N_+(\tau,\tau_0)+P(\tau_0-\tau,\tau_0)N_+(\tau_0-\tau,\tau_0)}{\mathcal{P}(\tau,\tau_0)}. \tag{41}$$

Задачи о средних числах рассеяний решались многими теоретиками. Наиболее существенные результаты получены в работах [16-22].

3.3. *Кратности рассеяния*. Все функции можно разложить по кратностям рассеяния, т.е. по степеням λ. Начнем с функции Грина:

$$\Gamma_*(\tau,\tau_1,\tau_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\Gamma_n(\tau,\tau_1,\tau_0). \tag{42}$$

При этом

$$\Gamma_0(\tau,\tau_1,\tau_0)=\delta(\tau-\tau_1),\quad \Gamma_n(\tau,\tau_1,\tau_0)=\frac{1}{2}\int_0^{\tau_0}e^{-|\tau'-\tau|}\,\Gamma_{n-1}(\tau',\tau_1,\tau_0)\,d\tau'. \tag{43}$$

Разложим по степеням λ вероятность и среднее число:

$$\mathcal{P}(\tau,\tau_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\mathcal{P}_n(\tau,\tau_0),\quad N(\tau,\tau_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n N_n(\tau,\tau_0). \tag{44}$$

Очевидно, что при чистом рассеянии, т.е. при $\lambda=1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{P}_n(\tau,\tau_0)=1. \tag{45}$$

Коэффициент $\mathcal{P}_n$ показывает, какой стала вероятность выхода после n-го рассеяния. Среднее число рассеяний (математическое ожидание) для этой величины

$$N_E=\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\lambda^n\mathcal{P}_n(\tau,\tau_0)}{\mathcal{P}(\tau,\tau_0)}=\frac{\lambda}{\mathcal{P}(\tau,\tau_0)}\frac{\partial\mathcal{P}(\tau,\tau_0)}{\partial\lambda}=\frac{\partial\ln\mathcal{P}(\tau,\tau_0)}{\partial\ln\lambda}. \tag{46}$$

Приведенные формулы позволяют выразить оба частных средних через полное число:

$$N_E(\tau,\tau_0)=\frac{\lambda N(\tau,\tau_0)}{1-(1-\lambda)N(\tau,\tau_0)}\left[1-(1-\lambda)\frac{\partial\ln N(\tau,\tau_0)}{\partial\lambda}\right],$$
$$N_A(\tau,\tau_0)=1+\lambda\frac{\partial\ln N(\tau,\tau_0)}{\partial\lambda}. \tag{47}$$

Все эти формулы были получены В.В.Соболевым в статьях [17-20] (кроме $N_\pm$).

Рассуждения, полностью совпадающие с теми, которые используются при выводе формулы (46), приводят к

$$N_+(\tau,\tau_0)=\lambda\frac{\partial\ln P(\tau,\tau_0)}{\partial\lambda},\quad N_-(\tau,\tau_0)=\lambda\frac{\partial\ln P(\tau_0-\tau,\tau_0)}{\partial\lambda}=N_+(\tau_0-\tau,\tau_0). \tag{48}$$

Формула (41), конечно, соблюдается.

Способ нахождения средних чисел рассеяний через производные по λ был предложен В.А.Амбарцумяном [16]. Он рассматривал интенсивность выходящего излучения, но можно применить такое рассуждение и к другим величинам, в частности, к вероятностям выхода.

Производные по λ от вероятностей выхода, согласно формулам (31)-(32), выражаются через производные по λ от функции $\Psi(\tau,\tau_0)$ и вероятностей $P(0,\tau_0)$ и $P(\tau_0,\tau_0)$. Эти последние

$$\frac{\partial P(0,\tau_0)}{\partial\lambda}=-\frac{1}{2}\left[1-\lambda-\frac{1}{\Psi^2(\tau_0,\tau_0)}\right]\frac{\partial\Psi(\tau_0,\tau_0)}{\partial\lambda}+\frac{1}{2}\Psi(\tau_0,\tau_0), \tag{49}$$

$$\frac{\partial P(\tau_0,\tau_0)}{\partial\lambda}=-\frac{1}{2}\left[1-\lambda+\frac{1}{\Psi^2(\tau_0,\tau_0)}\right]\frac{\partial\Psi(\tau_0,\tau_0)}{\partial\lambda}+\frac{1}{2}\Psi(\tau_0,\tau_0). \tag{50}$$

Все приведенные формулы для средних чисел рассеяния справедливы для слоевых источников, т.е. расположенных на определенной глубине τ. Если источники распределены по слою, то для определения средних чисел рассеяния надо просто произвести усреднение по их распределению.

4. *Точные решения для полубесконечной среды и асимптотики для толстого слоя.*

4.1. *Резольвентная функция полубесконечной среды.* В случае полубесконечной среды все уравнения получают свою предельную форму, подставив в них $\tau_0=\infty$, $X(p,\infty)=H(p)$, $Y(p,\infty)=0$ и у других функций опустив аргумент τ_0. Тогда уравнение (7) допускает точное аналитическое решение:

$$\Phi(\tau)=C_0 e^{-k(\tau+\tau_e)}+\int\limits_a^b \mathcal{R}(y,\lambda)\frac{dy}{H(y)}, \qquad \mathcal{R}(y,\lambda)=\frac{\lambda}{2}\frac{A(y)}{[1-\lambda\,\mathcal{V}(y)]^2+\left[\frac{\lambda\pi}{2}A(y)\right]}. \tag{51}$$

Здесь k ($0\le k\le a$) - характеристическое число, корень характеристического уравнения

$$1-\lambda\,\mathcal{V}(k)=0. \tag{52}$$

H-функция (носящая имя Чандрасекара) может быть найдена по точной формуле

$$\ln H(p)=-\frac{p}{\pi}\int\limits_0^\infty \ln(1-\lambda\,V(u))\frac{du}{p^2+u^2}. \tag{53}$$

Во внеинтегральном слагаемом коэффициент C_0 и величина τ_e, называемая экстраполированной длиной, определяются формулами

$$C_0=\sqrt{\frac{2k}{\lambda\,\mathcal{V}'(k)}}, \quad \tau_e=\frac{\ln\left(2k\lambda\,\mathcal{V}'(k)H^2(k)\right)}{2k}. \tag{54}$$

Для последней может быть получено выражение

$$\tau_e(\lambda)=\frac{1}{2k}\ln\frac{a+k}{a-k}-\frac{1}{\pi}\int\limits_a^b \operatorname{arcctg}(\mathcal{X}(y,\lambda))\frac{dy}{y^2-k^2}, \quad \mathcal{X}(y,\lambda)=\frac{1-\lambda\,\mathcal{V}(y)}{\lambda\pi\,A(y)/2}. \tag{55}$$

Если не существует решения (52), внеинтегральное слагаемое в (51) отсутствует и величины (54) не возникают.

4.2. *Задача Милна.* Если существует решение характеристического уравнения (52), то существует и решение задачи Милна, т.е. решение однородного уравнения (положим $S_M(0)=1$)

$$S_M(\tau)=\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\infty K(|\tau-\tau'|)S_M(\tau')d\tau'. \tag{56}$$

Это решение разбивается на растущую $e^{k\tau}H(k)$ и убывающую $\Psi_*(\tau)$ части, которые определяются формулами

$$S_M(\tau)=e^{k\tau}\left[1+\int\limits_0^\tau \Phi(\tau')e^{-k\tau'}d\tau'\right]=e^{k\tau}H(k)-\Psi_*(\tau), \tag{57}$$

$$\Psi_*(\tau)=\int\limits_\tau^\infty e^{-k(\tau'-\tau)}\,\Phi(\tau')d\tau'=\int\limits_0^\infty e^{-k\tau'}\,\Phi(\tau+\tau')d\tau'. \tag{58}$$

Для вывода выражения для нерастущей части решения задачи Милна исходим из явного выражения резольвентной функции (51). Подставив это выражение в определение (58), получим

$$\Psi_*(\tau)=\frac{C_0}{2k}e^{-k(\tau+\tau_e)}+\int_a^b \mathcal{R}(y,\lambda)\frac{e^{-y\tau}dy}{(y+k)H(y)}. \tag{59}$$

Эта функция не растет с ростом τ, но внеинтегральное слагаемое, а с ним и вся функция обращаются в бесконечность при переходе к чистому рассеянию, т.е. при $k\to 0$, в отличие от полного решения $S_M(\tau)$, которое остается конечным, так как его внеинтегральное слагаемое $C_0\frac{\operatorname{sh}k(\tau+\tau_e)}{k}$. Значение в нуле и асимптотика при больших τ нерастущей части

$$\Psi_*(0)=H(k)-1,\quad \Psi_*(\tau)\sim\frac{C_0}{2k}e^{-k(\tau+\tau_e)}. \tag{60}$$

Полный интеграл от нее

$$\int_0^\infty \Psi_*(\tau)d\tau=\frac{1}{k}\left[\int_0^\infty \Phi(\tau')d\tau'-\int_0^\infty \Phi(\tau')e^{-k\tau'}d\tau'\right]=\frac{H(0)-H(k)}{k}=\frac{1}{k}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}-H(k)\right]. \tag{61}$$

Интеграл при $k\to 0$ расходится как $1/k^2$. Интеграл по промежутку $[\tau,\infty]$

$$\int_\tau^\infty \Psi_*(\tau)d\tau=\frac{C_0}{2k^2}e^{-k(\tau+\tau_e)}+\int_a^b \mathcal{R}(y,\lambda)\frac{e^{-y\tau}dy}{y(y+k)H(y)}. \tag{62}$$

Интегралы по промежуткам с левым концом 0 получаются как разности (61) и (62). Асимптотика при $\tau\gg 1$

$$\int_0^\tau \Psi_*(\tau')d\tau'\sim\frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}-\frac{H(k)}{k}\left(1+e^{-k(\tau+2\tau_e)}\right),\quad H(k)=\frac{C_0}{2k}e^{k\tau_e}. \tag{63}$$

Приведем также интеграл от резольвентной функции:

$$\Psi(\tau)=1+\int_0^\tau \Psi(\tau')d\tau'=\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}-\frac{C_0}{k}e^{-k(\tau+\tau_e)}-\int_a^b \mathcal{R}(y,\lambda)\frac{e^{-y\tau}dy}{yH(y)}. \tag{64}$$

4.3. *Асимптотики при больших* τ_0. Внеинтегральные слагаемые дают возможность получить асимптотики рассматриваемых величин.

Через представленные здесь функции при больших оптических толщинах слоя прежде всего выражается асимптотика резольвентной функции, определяемой уравнением (7) (см. [2,7]):

$$\Phi(\tau,\tau_0)\sim\Phi_{as}(\tau,\tau_0)=\Phi(\tau)-\frac{k}{\operatorname{sh}k(\tau_0+2\tau_e)}\left[\Psi_*(\tau_0-\tau)-e^{-k(\tau_0+2\tau_e)}\Psi_*(\tau)\right]. \tag{65}$$

Асимптотика ее крайнего значения

$$\Phi(\tau_0,\tau_0)\sim\Phi(\tau_0)-\frac{k}{\operatorname{sh}k(\tau_0+2\tau_e)}\left[H(k)-1-e^{-k(\tau_0+3\tau_e)}\frac{C_0}{2k}e^{-k\tau_0}\right]\sim\frac{k}{\operatorname{sh}k(\tau_0+2\tau_e)}. \tag{66}$$

Следующей найдем асимптотику функции (21) в крайней точке:

$$\Psi(\tau_0,\tau_0)\sim\Psi(\tau_0)-\frac{k}{\operatorname{sh}k(\tau_0+2\tau_e)}\left[\int\limits_0^{\tau_0}\Psi_*(\tau_0-\tau')d\tau'-e^{-k(\tau_0+2\tau_e)}\int\limits_0^{\tau_0}\Psi_*(\tau')d\tau'\right]. \qquad (67)$$

После подстановки асимптотик входящих сюда величин и сокращений, получается сравнительно простое выражение

$$\Psi(\tau_0,\tau_0)\sim\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}\operatorname{th}k\left(\frac{\tau_0}{2}+\tau_e\right). \qquad (68)$$

Легко показать, что эта асимптотика удовлетворяет соотношению

$$\frac{d\Psi(\tau_0,\tau_0)}{d\tau_0}=\Psi(\tau_0,\tau_0)\Phi(\tau_0,\tau_0). \qquad (69)$$

С помощью формул (33) и (68) получаем асимптотики

$$P(0,\tau_0)\sim 1-\frac{\sqrt{1-\lambda}}{2}\left[\operatorname{cth}k\left(\frac{\tau_0}{2}+\tau_e\right)+\operatorname{th}k\left(\frac{\tau_0}{2}+\tau_e\right)\right]=1-\frac{\sqrt{1-\lambda}}{\operatorname{th}k(\tau_0+2\tau_e)}, \qquad (70)$$

$$P(\tau_0,\tau_0)\sim\frac{\sqrt{1-\lambda}}{2}\left[\operatorname{cth}k\left(\frac{\tau_0}{2}+\tau_e\right)-\operatorname{th}k\left(\frac{\tau_0}{2}+\tau_e\right)\right]=\frac{\sqrt{1-\lambda}}{\operatorname{sh}k(\tau_0+2\tau_e)}, \qquad (71)$$

$$\mathcal{P}(0,\tau_0)=P(0,\tau_0)+(\tau_0,\tau_0)=1-\sqrt{1-\lambda}\,\frac{\operatorname{ch}k(\tau_0+2\tau_e)-1}{\operatorname{sh}k(\tau_0+2\tau_e)}=1-\sqrt{1-\lambda}\operatorname{th}k\left(\frac{\tau_0}{2}+\tau_e\right). \qquad (72)$$

И эти асимптотики удовлетворяют уравнениям, следующим из (15) и (19):

$$\frac{dP(0,\tau_0)}{d\tau_0}=\Phi(\tau_0,\tau_0)P(\tau_0,\tau_0),\quad \frac{dP(\tau_0,\tau_0)}{d\tau_0}=-\Phi(\tau_0,\tau_0)[1-P(0,\tau_0)], \qquad (73)$$

$$\frac{d\mathcal{P}(0,\tau_0)}{d\tau_0}=-\Phi(\tau_0,\tau_0)[1-\mathcal{P}(0,\tau_0)]. \qquad (74)$$

Тождества (23) и (25) выполняются и для асимптотик.

4.4. *Асимптотики X- и Y-функций*. Асимптотики этих функций при наличии характеристического числа выглядят довольно просто [7]:

$$X(p,\tau_0)\sim H(p)\left[1+\frac{k}{\operatorname{sh}k(\tau_0+2\tau_e)}\frac{e^{-k(\tau_0+2\tau_e)}}{k-p}\right]-H(-p)\frac{k}{\operatorname{sh}k(\tau_0+2\tau_e)}\frac{1}{k+p}e^{-p\tau_0}, \qquad (75)$$

$$Y(p,\tau_0)\sim -H(p)\frac{k}{\operatorname{sh}k(\tau_0+2\tau_e)}\frac{1}{k-p}+H(-p)\left[1+\frac{k}{\operatorname{sh}k(\tau_0+2\tau_e)}\frac{e^{-k(\tau_0+2\tau_e)}}{k+p}\right]e^{-p\tau_0}. \qquad (76)$$

Связь между этими функциями $Y(p,\tau_0)=e^{-p\tau_0}X(-p,\tau_0)$ соблюдается и у их асимптотик. Вторые слагаемые, пропорциональные $e^{-p\tau_0}$, следует учитывать только тогда, если $p\le a$.

4.5. *Крупномасштабные асимптотики*. Наряду с асимптотиками величин на краях слоя могут быть получены и так называемые асимптотики, справедливые в предположениях, что в оптически толстом слое ($\tau_0 >> 1$) рассматриваются слои, далекие от обеих границ, т.е. $\tau >> 1$ и $\tau_0 - \tau >> 1$. Получим такую асимптотику сначала для функции $\Psi(\tau, \tau_0)$. Для этого проинтегрируем равенство (65), справедливое при $\tau_0 >> 1$ и всех $0 \le \tau \le \tau_0$, по τ от 0 до τ:

$$\Psi_{as}(\tau, \tau_0) = \Psi_{as}(\tau) - \frac{k}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)} \left[\int_0^\tau \Psi_*(\tau_0 - \tau') d\tau' - e^{-k(\tau_0 + 2\tau_e)} \int_0^\tau \Psi_*(\tau') d\tau' \right]. \quad (77)$$

При принятых предположениях асимптотика интеграла от резольвентной функции полубесконечной среды

$$\Psi_{as}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} - \frac{C}{k} e^{-k\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} - \frac{C_0}{k} e^{-k(\tau + \tau_e)}. \quad (78)$$

Асимптотика интеграла от нерастущей части решения задачи Милна с аргументом $\tau_0 - \tau'$ получается из (62):

$$\int_0^\tau \Psi_*(\tau_0 - \tau') d\tau' = \int_{\tau_0 - \tau}^{\tau_0} \Psi_*(\tau') d\tau' = \int_{\tau_0 - \tau}^{\infty} \Psi_*(\tau') d\tau' - \int_{\tau_0}^{\infty} \Psi_*(\tau') d\tau' = \frac{C_0}{2k^2} e^{-k(\tau_0 + \tau_e)} \left(e^{k\tau} - 1 \right). \quad (79)$$

Найдя разность в квадратных скобках, согласно (63), получим полную крупномасштабную асимптотику

$$\Psi_{as}(\tau, \tau_0) = \frac{\operatorname{cth} k(\tau_0 + 2\tau_e)}{\sqrt{1-\lambda}} - \frac{C_0}{k} \frac{\operatorname{ch} k(\tau_0 - \tau + \tau_e)}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)}. \quad (80)$$

Следующей найдем вероятность по формуле (20):

$$\begin{aligned} P(\tau, \tau_0) \sim 1 &- \frac{\sqrt{1-\lambda}}{\operatorname{th} k(\tau_0 + 2\tau_e)} \left[\frac{\operatorname{cth} k(\tau_0 + 2\tau_e)}{\sqrt{1-\lambda}} - \frac{C_0}{k} \frac{\operatorname{ch} k(\tau_0 - \tau + \tau_e)}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)} \right] - \\ &- \frac{\sqrt{1-\lambda}}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)} \left[\frac{\operatorname{th} k(\tau_0/2 + \tau_e)}{\sqrt{1-\lambda}} - \frac{\operatorname{cth} k(\tau_0 + 2\tau_e)}{\sqrt{1-\lambda}} - \frac{C_0}{k} \frac{\operatorname{ch} k(\tau + \tau_e)}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)} \right]. \end{aligned} \quad (81)$$

Слагаемые, не содержащие множителя C_0, сокращаются, а слагаемые при множителе $(C_0/k)\sqrt{1-\lambda}$ преобразуются. Окончательно получается простое выражение:

$$P(\tau, \tau_0) \sim \frac{C_0}{k} \sqrt{1-\lambda} \frac{\operatorname{sh} k(\tau_0 - \tau + \tau_e)}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)}. \quad (82)$$

Полная вероятность равна сумме, так что

$$\mathcal{P}(\tau, \tau_0) \sim \frac{C_0}{k} \sqrt{1-\lambda} \frac{\operatorname{sh} k(\tau_0 - \tau + \tau_e) + \operatorname{sh} k(\tau + \tau_e)}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)} = \frac{C_0}{k} \sqrt{1-\lambda} \frac{\operatorname{ch} k(\tau_0/2 - \tau)}{\operatorname{ch} k(\tau_0/2 + \tau_e)}. \quad (83)$$

Как и должно быть, асимптотика этой вероятности симметрична относительно середины слоя.

5. *Асимптотики чисел рассеяния.*

5.1. *Полное число.* Асимптотические формулы для полного числа рассеяний получаются сразу из (3), (72) и (83). При крайних глубинах

$$N(0,\tau_0)=N(\tau_0,\tau_0)=\Psi(\tau_0,\tau_0)\sim\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}\operatorname{th}k(\tau_0/2+\tau_e) \tag{84}$$

и крупномасштабная асимптотика, как и вероятность, симметричная относительно середины слоя:

$$N(\tau,\tau_0)\sim\frac{1}{1-\lambda}-\frac{C_0}{k\sqrt{1-\lambda}}\frac{\operatorname{ch}k(\tau_0/2-\tau)}{\operatorname{ch}k(\tau_0/2+\tau_e)}. \tag{85}$$

Получение же формул для частичных чисел рассеяния требует вычисления производных по λ. Начнем с величин, зависящих только от этой переменной.

5.2. *Производные от k, C_0 и τ_e.* Сначала, дифференцируя уравнение (52), находим производную от характеристического числа:

$$-\mathcal{V}(k)-\lambda\mathcal{V}'(k)\frac{dk}{d\lambda}=0,\quad \frac{dk}{d\lambda}=-\frac{\mathcal{V}(k)}{\lambda\mathcal{V}'(k)}, \tag{86}$$

а также от коэффициента (54)

$$\frac{d\ln C_0}{d\lambda}=\frac{1}{2}\frac{\mathcal{V}(k)}{\lambda\mathcal{V}'(k)}\left(\frac{\mathcal{V}''(k)}{\mathcal{V}'(k)}-\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{2\lambda}. \tag{87}$$

Следующими берем производные от экстраполированной длины (55):

$$\frac{d\tau_e}{d\lambda}=\frac{\mathcal{V}(k)}{k\lambda\mathcal{V}'(k)}\left[\frac{1}{2k}\ln\frac{a+k}{a-k}-\frac{a}{a^2-k^2}+\frac{2k^2}{\pi}\int_a^b\operatorname{arcctg}\mathcal{X}(y,\lambda)\frac{dy}{\left(y^2-k^2\right)^2}\right]-$$
$$-\frac{1}{\lambda}\int_a^b\mathcal{R}(y,\lambda)\frac{dy}{y^2-k^2}, \tag{88}$$

и произведения ее на k:

$$\frac{dk\tau_e}{d\lambda}=\frac{\mathcal{V}(k)}{\lambda\mathcal{V}'(k)}\left[\frac{1}{\pi}\int_a^b\operatorname{arcctg}\mathcal{X}(y,\lambda)\frac{dy\left(y^2+k^2\right)}{\left(y^2-k^2\right)^2}-\frac{a}{a^2-k^2}\right]-\frac{k}{\lambda}\int_a^b\mathcal{R}(y,\lambda)\frac{dy}{y^2-k^2}. \tag{89}$$

5.3. *Границы слоя.* Для того, чтобы получить асимптотики средних чисел рассеяния фотонов с границ слоя по формулам (49)-(50), находим производную

$$\frac{\partial\Psi(\tau_0,\tau_0)}{\partial\lambda}\sim\Psi(\tau_0,\tau_0)\left[\frac{1}{2}\frac{1}{1-\lambda}+\frac{1}{\operatorname{sh}k(\tau_0+2\tau_e)}\mathcal{D}(\lambda,\tau_0)\right], \tag{90}$$

где

$$\mathcal{D}(\lambda, \tau_0) = \tau_0 \frac{dk}{d\lambda} + 2\frac{dk\,\tau_e}{d\lambda}. \tag{91}$$

Тогда

$$\frac{\partial P(0, \tau_0)}{\partial\lambda} \sim \frac{\Psi(\tau_0, \tau_0)}{2}\left[1 + \frac{1}{2\operatorname{sh}^2 k(\tau_0/2 + \tau_e)} - \frac{1-\lambda}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)\operatorname{sh}^2 k(\tau_0/2 + \tau_e)}\mathcal{D}(\lambda, \tau_0)\right], \tag{92}$$

$$\frac{\partial P(\tau_0, \tau_0)}{\partial\lambda} \sim \frac{\Psi(\tau_0, \tau_0)}{2}\left[1 - \frac{\operatorname{ch} k(\tau_0 + 2\tau_e)}{2\operatorname{sh}^2 k(\tau_0/2 + \tau_e)} + \frac{1-\lambda}{\operatorname{th} k(\tau_0 + 2\tau_e)\operatorname{sh}^2 k(\tau_0/2 + \tau_e)}\mathcal{D}(\lambda, \tau_0)\right]. \tag{93}$$

Сложение этих формул дает

$$\frac{\partial\mathcal{P}(0, \tau_0)}{\partial\lambda} \sim \Psi(\tau_0, \tau_0)\left[\frac{1}{2} - \frac{1-\lambda}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)}\mathcal{D}(\lambda, \tau_0)\right], \tag{94}$$

что, конечно, получается и из (25).

Полученные производные и приведенные выше формулы (47)-(48) позволяют найти асимптотики чисел рассеяния.

6. *Заключение*. Таким образом, в статье воспроизведены известные формулы теории переноса излучения в плоских средах, точные решения для полубесконечной среды и асимптотики основных величин для ее глубоких слоев при наличии решения характеристического уравнения в удобной компактной форме. Для плоского слоя найдены точные соотношения между вероятностями выхода фотонов из слоя и средними числами рассеяний. С их помощью для оптически толстого слоя получены асимптотики этих величин для границ слоя и для его внутренних слоев (крупномасштабные). При этом разграничиваются средние числа фотонов, выходящих через верхнюю и нижнюю границы.

Во второй статье серии полученные результаты будут применены к двум конкретным видам рассеяния.

Санкт-Петербургский государственный университет,
Россия, e-mail: dinagirner@gmail.com

THE ESCAPE PROBABILITY AND MEAN NUMBERS OF SCATTERINGS OF PHOTONS. I. EXACT AND ASYMPTOTIC FORMULAE

D.I.NAGIRNER, Y.V.MILANOVA, A.V.DEMENTYEV, E.V.VOLKOV

Using the basic formulae of the theory of radiative transfer, more detailed information on the characteristics of photon scattering in a plane layer is obtained. Namely, the probabilities of photon escape separately through the upper and lower boundaries of the layer and the mean numbers of scatterings of such photons are found.

Keywords: *radiation transfer: mean numbers of scatterings of photons*

ЛИТЕРАТУРА

1. *С.Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии. М., ИЛ, 1953.
2. *В.В.Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет. М., Наука, 1972.
3. *В.В.Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел. М., Наука, 1969.
4. *V.V.Ivanov*, Transfer of Radiation in Spectral Lines. Boulder, NBS, 385, 1973.
5. *H.C. van de Hulst*, Multiple Light Scattering. N.Y., Academic Press, 1980.
6. *К.Кейз*, *П.Цвайфель*, Линейная теория переноса. М., Мир, 1972.
7. *D.I.Nagirner*, Astrophys. Space Phys. Rev., **13**, 1, 2006.
8. *Д.И.Нагирнер*, Астрофизика, **26**, 157, 1987, (Astrophysics, **26**, 90, 1987).
9. *Д.И.Нагирнер*, Астрофизика, **10**, 445, 1974, (Astrophysics, **10**, 274, 1974).
10. *D.I.Nagirner*, Astrophys. Space Phys. Rev., **3**, 255, 1984.
11. *V.V.Ivanov*, *S.I.Grachev*, *V.M.Loskutov*, Astron. Astrophys., **318**, 315, 1996.
12. *V.V.Ivanov*, *S.I.Grachev*, *V.M.Loskutov*, Astron. Astrophys., **321**, 968, 1997.
13. *В.П.Гринин*, Астрофизика, **20**, 365, 1984, (Astrophysics, **20**, 190, 1984).
14. *В.П.Гринин*, Труды Астрон. обс. ЛГУ, **44**, 236, 1994.
15. *С.И.Грачев*, Труды Астрон. обс. ЛГУ, **44**, 203, 1994.
16. *В.А.Амбарцумян*, Докл. АН Арм. ССР, **8**, 101, 1948.
17. *В.В.Соболев*, Астрофизика, **2**, 135, 1966, (Astrophysics, **2**, 69, 1966).
18. *В.В.Соболев*, Астрофизика, **2**, 239, 1966, (Astrophysics, **2**, 119, 1966).
19. *В.В.Соболев*, Астрофизика, **3**, 5, 1967, (Astrophysics, **3**, 1, 1967).
20. *В.В.Соболев*, Астрофизика, **3**, 137, 1967, (Astrophysics, **3**, 69, 1967).
21. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **21**, 324, 1984, (Astrophysics, **21**, 527, 1984).
22. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **21**, 595, 1984, (Astrophysics, **21**, 685, 1984).