

А.С. САРГСЯН

**ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ СДВИГОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СОСТАВНОМ
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С МЕТАЛЛИЧЕСКИМ
СЛОЕМ**

Рассматривается задача взаимодействия электрического и механического полей при полном контакте двух пьезоэлектрических полупространств. На разделительной плоскости контакта склеен металлический тонкий слой. Под действием линейного источника установившихся сдвиговых колебаний в составном пространстве распространяются электроупругие волны сдвига. Волновое поле представляется регулярными интегралами на разрезах в комплексной плоскости. Принимаются методы теории функций комплексного переменного и контурного интегрирования. При определенных значениях электроупругих параметров среды распространяются локализованные у контактной плоскости сдвиговые волны.

Ключевые слова: электроупругость, источник возмущений, сдвиговые колебания, поверхностные волны, пьезоэлектрик.

Введение. Исследование распространения сдвиговых волн в конструктивно неоднородных пьезоэлектрических средах актуально с точки зрения современной механики сплошной среды. Особое место в механике твердого тела и в математической физике занимают задачи взаимодействия физико-механических полей в деформируемых системах [1-4]. Изучение процессов распространения колебаний в составной пьезоэлектрической среде тесно связано с развитием прикладной физики и электроупругости и выявляет существенные физико-технические особенности при проектировании акустоэлектрических и измерительных инженерных устройств. В [2] рассмотрена задача линейного источника установившихся колебаний в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем. В [3] исследована задача дифракции плоской сдвиговой волны в пьезоэлектрическом пространстве при наличии полубесконечного металлического слоя малой толщины. Определяется волновое поле на контактном участке слоя со средой и в пьезоэлектрическом пространстве. В [4] рассмотрена задача о распространении локализованной электроупругой сдвиговой волны в составном пьезоэлектрическом пространстве, когда между электроупругими средами находится тонкий металлический электропроводящий слой. Выявлены условия существования этих волн. Отметим, что эти условия использованы в данной задаче о распространении

сдвиговых колебаний. Исследованию задач дифракции плоской электроупругой волны и локализованной, поверхностной волны на полубесконечной трещине между скрепленными диэлектрическими полупространствами с пьезоэффектом посвящены работы [5,6]. В данной работе рассматривается сдвиговое волновое поле в составной пьезоэлектрической среде, состоящей из двух полупространств, когда в одном из них действует линейный источник установившихся механических колебаний. Выявлены некоторые особенности электроупругого волнового поля, обусловленные наличием пьезоэффекта и тонкого металлического слоя между скрепленными полупространствами.

Постановка задачи. Рассматриваемая электроупругая среда состоит из двух полупространств–пьезоэлектриков класса *6mm* гексагональной симметрии с разными электроупругими характеристиками. Среда занимает пространство, отнесенное к декартовой системе координат $Oxyz$. Главная ось кристалла совпадает с осью Oz . На разделительной плоскости $y=0$ склеен тонкий металлический слой, который можно рассматривать как электрод.

Среда совершает установившиеся колебания под действием линейного источника, действующего в верхнем полупространстве по линии $x=0$, $y=b$:

$P(x, y, t) = P_1 \delta(x) \delta(y-b) e^{-i\omega t}$ (рис.1), где $P_1 = const$ – интенсивность действующей силы; ω – частота колебаний; t – параметр времени; $\delta(x)$ – функция Дирака. Среда находится в условиях антиплоской деформации. Задача заключается в определении сдвигового волнового поля в пьезоэлектрических полупространствах. За основу принимаем дифференциальные уравнения динамической теории упругости и уравнения электродинамики в квазистатическом приближении. Учитывается гармоническая зависимость от времени всех составляющих волнового поля (временной множитель $e^{-i\omega t}$), следовательно, задача решается в амплитудах. Для определения амплитуд перемещения $w_1(x, y)$, $w_2(x, y)$ и электрического потенциала $\Phi_1(x, y)$, $\Phi_2(x, y)$ в соответствующих полупространствах имеем уравнения [1–4]

$$\begin{aligned} c_i \Delta w_i + e_i \Delta \Phi_i + \omega^2 \rho_i w_i &= P \delta(x) \delta(y-b), \\ e_i \Delta w_i - \varepsilon_i \Delta \Phi_i &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

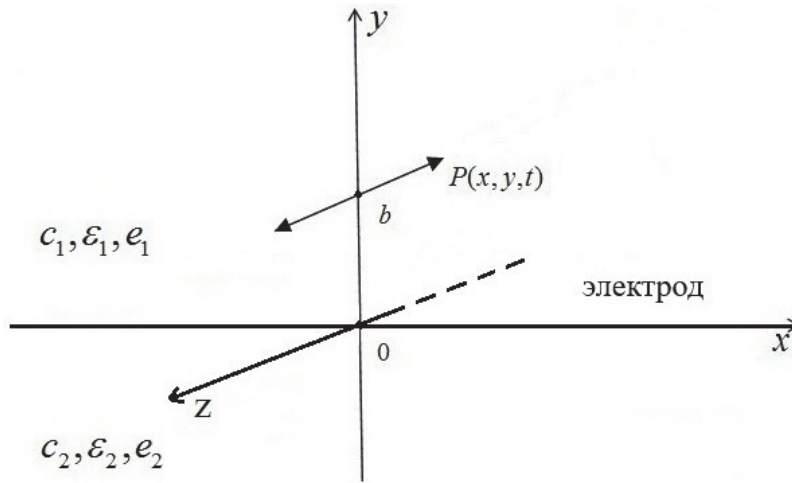


Рис.1

В этих уравнениях $P_2 = 0$, $\varepsilon_i = \varepsilon_{11}^{(i)}$, $e_i = e_{15}^{(i)}$, $c_i = c_{44}^{(i)}$, $i = 1, 2$ – диэлектрические, пьезоэлектрические и упругие постоянные соответствующих пьезоэлектрических полупространств $y > 0$ и $y < 0$, а ρ_i – плотность материалов

этих полупространств, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Решения уравнений (1) должны удовлетворять следующим условиям на плоскости $y = 0$:

$$\begin{aligned}\Phi_1(x, 0) &= \Phi_2(x, 0) = 0, \\ \sigma_{yz}^{(1)}(x, +0) &= \sigma_{yz}^{(2)}(x, -0), \\ w_1(x, +0) &= w_2(x, -0).\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь $\sigma_{yz}^{(1)}(x, y)$, $\sigma_{yz}^{(2)}(x, y)$ – амплитуды напряжений в соответствующих полупространствах:

$$\sigma_{yz}^{(i)} = c_i \frac{\partial w_i}{\partial y} + e_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}, \quad i = 1, 2.$$

Решение задачи. Применяя интегральное преобразование Фурье по переменной x к уравнениям (1) и условиям контакта (2), получим уравнения относительно трансформант искоемых функций:

$$\bar{w}_i = \int_{-\infty}^{\infty} w_i(x, y) e^{i\sigma x} dx, \quad \bar{\Phi}_i = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_i(x, y) e^{i\sigma x} dx,$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \bar{w}_1}{dy^2} - (\sigma^2 - k_1^2) \bar{w}_1 &= Q \delta(y - b), \\ \frac{d^2 \bar{\Phi}_1}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\Phi}_1 + k_1^2 \frac{e_1}{\varepsilon_1} \bar{w}_1 &= \frac{e_1}{\varepsilon_1} Q \delta(y - b),\end{aligned}\quad y > 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \bar{w}_2}{dy^2} - (\sigma^2 - k_2^2) \bar{w}_2 &= 0, \\ \frac{d^2 \bar{\Phi}_2}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\Phi}_2 + k_2^2 \frac{e_2}{\varepsilon_2} \bar{w}_2 &= 0,\end{aligned}\quad y < 0 \quad (4)$$

и следующие условия при $y = 0$:

$$c_1 \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial y} + e_1 \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial y} = c_2 \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial y} + e_2 \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial y}, \quad \bar{\Phi}_1 = \bar{\Phi}_2 = 0, \quad \bar{w}_1 - \bar{w}_2 = 0. \quad (5)$$

Здесь $k_i = \omega / C_i$, C_i , $\chi_i = e_i^2 / c_i \varepsilon_i$, $i = 1, 2$ — соответственно волновое число, скорость распространения сдвиговой электроупругой волны и коэффициент электромеханической связи в полупространствах $y > 0$ и $y < 0$:

$$C_i = \sqrt{c_{44}^{(i)} (1 + \chi_i) / \rho_i}, \quad Q = P_1 / c_1 (1 + \chi_1).$$

Трансформанты функций амплитуд перемещения и потенциала электрического поля имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\bar{w}_1(\sigma, y) &= A(\sigma) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} - Q_1(\sigma, y), \\ \bar{\Phi}_1(\sigma, y) &= B(\sigma) e^{-|\sigma| y} + \frac{e_1}{\varepsilon_1} \bar{w}_1,\end{aligned}\quad y > 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned}\bar{w}_2(\sigma, y) &= A(\sigma) e^{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} y}, \\ \bar{\Phi}_2(\sigma, y) &= \frac{e_2 \varepsilon_1}{e_1 \varepsilon_2} B(\sigma) e^{|\sigma| y} + \frac{e_2}{\varepsilon_2} \bar{w}_2,\end{aligned}\quad y < 0, \quad (7)$$

где из-за контактных условий (5) имеем

$$\begin{aligned}A(\sigma) &= -\frac{(1 + \chi_1) Q e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} b}}{K(\sigma)}, \\ B(\sigma) &= -\frac{e_1}{\varepsilon_1} A(\sigma), \\ Q_1(\sigma, y) &= \frac{Q}{2\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}} (e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} |y-b|} - e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} (y+b)}).\end{aligned}\quad (8)$$

Характеристическая функция данной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} K(\sigma) &= K_1(\sigma) + \frac{c_2}{c_1} K_2(\sigma), \\ K_1(\sigma) &= (1 + \chi_1) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} - \chi_1 |\sigma|, \\ K_2(\sigma) &= (1 + \chi_2) \sqrt{\sigma^2 - k_2^2} - \chi_2 |\sigma|. \end{aligned} \quad (9)$$

Решение задачи (1), представляющее уходящую волну, имеет вид

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\sigma) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_1(\sigma, y) e^{-i\sigma x} d\sigma, \\ \Phi_1(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\sigma) e^{-|\sigma| y} e^{-i\sigma x} d\sigma + \frac{e_1}{\varepsilon_1} w_1, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} w_2(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\sigma) e^{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma, \\ \Phi_2(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \frac{e_2 \varepsilon_1}{e_1 \varepsilon_2} \int_{-\infty}^{\infty} B(\sigma) e^{|\sigma| y} e^{-i\sigma x} d\sigma + \frac{e_2}{\varepsilon_2} w_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Выполняя условия уходящей волны, принимается, что $\sqrt{\sigma^2 - k_i^2} = -i\sqrt{\sigma^2 - k_i^2}$, $i = 1, 2$, $\sqrt{\sigma^2 - k_i^2} \rightarrow |\sigma|$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, т.е. действительная ось комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ обходит точки ветвления $-k_1, -k_2$ двузначных функций $\gamma_i(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_i^2}$ сверху, а k_1, k_2 – снизу [2,3].

В случае частной задачи, когда между пьезоэлектрическими полупространствами отсутствует акустический контакт в плоскости $y=0$, характеристическое уравнение для определения волнового числа поверхностной волны примет вид [1–4,7]

$$(1 + \chi_1) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} - \chi_1 |\sigma| = 0, \quad (12)$$

которое имеет единственный положительный корень:

$$\sigma_1 = k_1 \frac{1 + \chi_1}{\sqrt{1 + 2\chi_1}} > k_1 > 0, \quad (13)$$

т.е. в пьезоэлектрических полупространствах возникают поверхностные сдвиговые электроупругие волны Гуляева–Блюстейна со скоростью $\frac{\omega}{\sigma_1} < C_1$.

Рассмотрим волновое поле в составном пьезоэлектрическом полупространстве $x < 0$. Представим функции амплитуд $w_1(x, y)$, $w_2(x, y)$ в виде интегралов

$$w_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^{(1)}(\sigma) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B^{(1)}(\sigma) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\sigma, y) e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad (14)$$

$$w_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^{(1)}(\sigma) e^{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B^{(1)}(\sigma) e^{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad (15)$$

где

$$A^{(1)}(\sigma) = -\frac{(1 + \chi_1) Q e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} b}}{K_0(\sigma)},$$

$$B^{(1)}(\sigma) = -\frac{(1 + \chi_1)(c_1 \chi_1 + c_2 \chi_2) Q (|\sigma| - \sigma)}{c_1 K(\sigma) K_0(\sigma)} e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} b}, \quad (16)$$

$$K_0(\sigma) = (1 + \chi_1) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} - \chi_1 \sigma + \frac{c_2}{c_1} \left((1 + \chi_2) \sqrt{\sigma^2 - k_2^2} - \chi_2 \sigma \right).$$

Функция $K(\sigma)$ имеет нули только в точках $\pm \sigma_0$ [4], σ_0 – единственный положительный корень уравнения $K(\sigma) = 0$ при $\sigma = \sigma_0 > k_2 > k_1 > 0$, если

$$\sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}} < \frac{\chi_1}{1 + \chi_1} \left(1 + \frac{c_2 \chi_2}{c_1 \chi_1} \right). \quad (17)$$

Преобразуем интегралы (14), (15) методом контурного интегрирования в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$. Действительная ось обходит как точки ветвления функций $\gamma_i(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_i^2}$, так и нули функции $K(\sigma)$, представляющие полюсы соответствующих подынтегральных функций. Обеспечивая условия уходящей волны, действительная ось комплексной плоскости обходит точку $\sigma = -\sigma_0$ сверху, а точку $\sigma = +\sigma_0$ – снизу. Для выбора ветвей двужначных функций $\gamma_1(\alpha)$, $\gamma_2(\alpha)$ следует провести в комплексной плоскости разрезы до бесконечности от точек $\sigma = k_1$, $\sigma = k_2$ в верхней полуплоскости и от точек $\sigma = -k_1$, $\sigma = -k_2$ – в нижней полуплоскости, принимая за основу принцип

уходящей волны [2,3]. Аналитическое продолжение функции $|\sigma|$ в комплексной плоскости представляется в виде $|\alpha| = \alpha$ при $\operatorname{Re} \alpha > 0$ и $|\alpha| = -\alpha$ при $\operatorname{Re} \alpha < 0$. Путь интегрирования замыкается в верхней полуплоскости комплексной плоскости (рис.2) [2,3,5].

Аналитические продолжения подынтегральных функций $A^{(1)}(\sigma)$, $B^{(1)}(\sigma)$ при таких разрезах в комплексной плоскости внутри контура интегрирования имеют единственную особую точку $\sigma = \sigma_0$ – простой полюс $K_*(\sigma_0) = 0$.

Задача симметрична по x , следовательно такие же представления функций амплитуд имеют место и в составном полупространстве $x > 0$. Путь интегрирования замыкается уже в нижней полуплоскости комплексной плоскости. Аналитические продолжения подынтегральных функций внутри контура интегрирования в этом случае имеют единственную особую точку $\sigma = -\sigma_0$.

Существование сдвиговых поверхностных волн в полупространствах обусловлено пьезоэффектом, и наличие источника механических колебаний приводит к распространению этих электроупругих волн. На контактной плоскости раздела амплитуда поверхностной волны принимает максимальное значение.

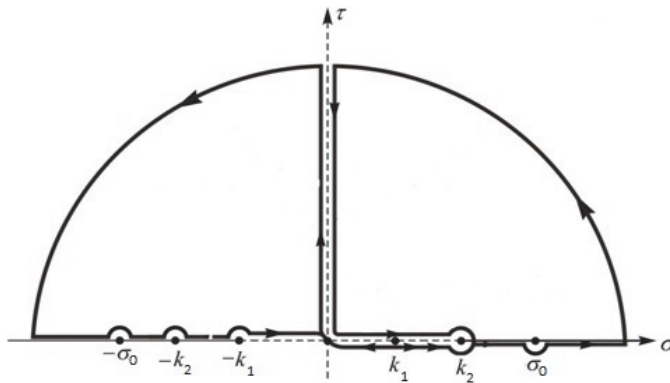


Рис.2

После контурного интегрирования [2,3,8] получим представления функций амплитуд в виде суммы поверхностных волн, если имеет место условие (17), и регулярных интегралов по берегам разрезом, характеризующих объемные затухающие волны. В пространстве появляются обусловленные наличием пьезоэффекта объемные волны, распространяющиеся от контактной поверхности по направлению y и имеющие неволновой характер по x на контактной поверхности.

Функции амплитуд поверхностных волн, распространяющихся в составном полупространстве $x < 0$, имеют вид

$$\begin{aligned} w_{10}(x, y) &= A_0 e^{-\sqrt{\sigma_0^2 - k_1^2} y} e^{-i\sigma_0 x}, & y > 0, \\ w_{20}(x, y) &= A_0 e^{\sqrt{\sigma_0^2 - k_2^2} y} e^{-i\sigma_0 x}, & y < 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$A_0 = \frac{i(1 + \chi_1)Q}{K_0'(\sigma_0)} e^{-\sqrt{\sigma_0^2 - k_1^2} b}, \quad K_0'(\sigma) = \frac{dK(\sigma)}{d\sigma},$$

и в составном полупространстве $x > 0$:

$$\begin{aligned} w_{10}(x, y) &= A_0 e^{-\sqrt{\sigma_0^2 - k_1^2} y} e^{i\sigma_0 x}, & y > 0, \\ w_{20}(x, y) &= A_0 e^{\sqrt{\sigma_0^2 - k_2^2} y} e^{i\sigma_0 x}, & y < 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Асимптотическое представление перемещений на граничной плоскости $y = 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ имеет вид

$$w_1(x, 0) = A_0 e^{i\sigma_0 |x|} + e^{ik_1 x} O(|k_1 x|^{-3/2}) + \chi_1 O(|k_1 x|^{-2}). \quad (20)$$

Заключение. Неоднородность среды, пьезоэффект и наличие тонкого металлического электропроводящего слоя приводят к существенным изменениям электроупругого волнового поля. Источник механических колебаний в среде, обладающей пьезоэффектом, приводит к распространению сдвиговой поверхностной волны, локализованной у плоскости полного электромеханического контакта при некоторых определенных значениях электроупругих параметров. Поверхностные электроупругие волны имеют фундаментальное значение в микроэлектронной, акустоэлектрической технике. Результаты рассмотренной задачи о распространении сдвиговых колебаний в составном пьезоэлектрическом пространстве могут быть использованы при изучении прикладных задач о системах обработки информации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение 1982. – 240 с.
2. Григорян Э.Х., Синянян С.С. Задача линейного источника сдвиговых колебаний в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем // Изв. НАН Армении. Механика. – 2009. – Т.62, №1. – С.40–51.

3. **Григорян Э.Х., Мелкумян А.С.** Дифракция сдвиговой плоской волны в пьезоэлектрическом пространстве на краю полубесконечного металлического слоя // Изв. НАН Армении. Механика. – 2004. – Т.57, №4. – С.43–52.
4. **Аветисян А.С., Маргарян Дж.М.** Электроупругие поверхностные волны сдвига на границе раздела двух пьезоэлектрических полупространств //Изв. НАН Армении. Механика. – 1994. – Т.47, №3–4. – С.31–36.
5. **Григорян Э.Х., Джилаван С.А., Казарян А.А.** Дифракция сдвиговой плоской волны на полубесконечной трещине в пространстве пьезоэлектрик–диэлектрик //Труды 7-й Межд.конф. “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”.– Ереван, 2011. – С.137–143.
6. **Джилаван С.А., Саргсян А.С.** Дифракция поверхностной волны сдвига на полубесконечной трещине в составном пьезоэлектрическом пространстве // Материалы 5-й Межд.конф. “Актуальные проблемы механики сплошной среды”.– Ереван, 2017. – С.79–80.
7. **Belubekyan M.V., Belubekyan V.M.** Surface waves in piezoactive elastic system of a layer on a semi-space// Proc. of the Yerevan State University. Phys. & Math. Sei. – 2013. – 3. – P. 45–48.
8. **Агаян К.Л., Григорян Э.Х.** О новом методе определения асимптотических формул в задачах дифракции волн //Доклады НАН Армении. – 2010. – Т.110, №3. – С. 261–271.

Ереванский государственный университет. Материал поступил в редакцию 15.02.2019.

Ա.Ս. ՄԱՐԳԱՅԱՆ

ՄԱՀՔԻ ԷԼԵԿՏՐԱԱՌԱՋԱԿԱՆ ՏՍՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ՄԵՏԱՂԱԿԱՆ ՇԵՐՏՈՎ ՊԻԵԶՈԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Դիտարկվում է պիեզոէլեկտրական երկու կիսատարածության լրիվ հպման դեպքում էլեկտրական և մեխանիկական դաշտերի փոխազդեցության խնդիրը: Դրանց բաժանման հարթությանը ամրակցված է մետաղական բարակ շերտ: Կայունացված սահքային տատանումների աղբյուրի ազդեցությամբ բաղադրյալ տարածությունում տարածվում են սահքի էլեկտրաառաձգական ալիքներ: Ալիքային դաշտը ներկայացվում է կոմպլեքս հարթությունում ճեղքերի վրա ռեզուլյար ինտեգրալների տեսքով: Կիրառվում են կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների և կոնտուրային ինտեգրման մեթոդներ: Միջավայրի էլեկտրաառաձգական բնութագրիչների որոշակի արժեքների դեպքում տարածվում են հպման հարթության մոտ տեղայնացված սահքի ալիքներ:

Առանցքային բառեր. էլեկտրաառաձգականություն, գրգռումների աղբյուր, սահքային տատանումներ, մակերևութային ալիքներ, պիեզոէլեկտրիկ:

A.S. SARGSYAN

**ELECTROELASTIC SHIFT VIBRATIONS IN COMPOSITE
PIEZOELECTRIC SPACE WITH A METALLIC LAYER**

The problem of interaction of electrical and mechanical fields at the full contact of two piezoelectric half-spaces is considered. On the separation plane of the contact, a metallic thin layer is glued. Under the action of a linear source of the stationary shear vibrations, electroelastic shear waves propagate in the composite space. The wave field is represented by regular integrals on the cuts in the complex plane. The methods of the theory of functions of complex variable and contour integration are admitted. At certain values of the electroelastic parameters of the medium, shear waves localized at the contact plane propagate.

Keywords: electroelasticity, source of disturbances, shear vibrations, surface waves, piezoelectric.