

Ф.П. ГРИГОРЯН

## К СИНТЕЗУ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ. II

В линейной интегродифференциальной стационарной системе уравнений рассмотрена одна задача синтеза оптимального управления, которая обеспечивает минимизацию расхода топлива самолета или космического корабля. Она решена с помощью одной задачи вариационного исчисления с подвижными границами, когда концы траектории движущейся материальной точки перемещаются по двум заданным поверхностям эллипсоидов.

**Ключевые слова:** синтез оптимального управления, интегродифференциальная стационарная система управления.

В настоящей работе рассматривается одна актуальная задача об оптимизации относительно системы интегродифференциальных уравнений (СИДУ).

Предполагается, что данная СИДУ с помощью синтеза с наперед заданным спектром приводится к устойчивой системе в заданном конечном промежутке  $[t_0, T_1)$  ( $T_1 < \infty$ ), согласно определению К.А. Абгаряна [1,2].

Поскольку данную систему можно стабилизировать с различными заданными спектрами, то выбирается тот спектр, который должен обеспечить минимальное значение рассматриваемого функционала.

1. В работе [3] рассматривается следующая стационарная управляемая СИДУ:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ u(t) = \int_{-\infty}^t g(t-t')v(t')dt', \Rightarrow \dot{x}(t) = Ax(t) + B \int_{-\infty}^t g(t-t')bx(t')dr', \\ v(t) = bx(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$  – столбцовая матрица размера  $n \times 1$ , вектор состояния процесса;  $\dot{x}(t)$  – производная от  $x(t)$  по времени  $t$ ;  $x^T(t)$  – результат транспонирования;  $u(t)$  – скалярное управляющее воздействие (рассматривается как выходной сигнал регулятора);  $v(t)$  – скаляр, входной сигнал регулятора;  $g(t-t')$  – импульсная переходная функция регулятора;  $t'$  – момент подачи входного сигнала;  $t$  – момент появления выходного сигнала, а также стационарные матрицы

$$A = (a_{ij}), (i, j = \overline{1, n}); B = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T; b = (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

С учетом условий задачи синтеза, приведенных в работе [3], получается, что общее решение системы (1.1) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= WK \exp(\Lambda t) C, \\ \Lambda &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – наперед заданные различные числа;  $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)^T$  – столбец из произвольных постоянных;

$$W = (B, AB, \dots, A^{n-1}B),$$

$$K = (K_1, K_2, \dots, K_n), K_i = (\Delta_1(\lambda_i), \Delta_2(\lambda_i), \dots, \Delta_{n-1}(\lambda_i), \Delta_n(\lambda_i))^T, i = \overline{1, n},$$

$$\Delta_k(\lambda_i) = \lambda_i^{n-k} + \rho_1 \lambda_i^{n-(k+1)} + \rho_2 \lambda_i^{n-(k+2)} + \dots + \rho_{n-k}, k = \overline{1, n}, i = \overline{1, n}, \rho_0 = 1.$$

Приведем понятие устойчивости относительно заданной области, предлагаемое К.А. Абгаряном [1].

**Определение.** Если при достаточно малом  $\rho > 0$  любое возмущение  $x(t)$  процесса, начальное значение  $x_0 = x(t_0)$  которого удовлетворяет условию

$$(S(t_0)x_0, S(t_0)x_0) \leq \rho^2, \quad (1.3)$$

в промежутке  $t_0 \leq t < T_1$  удовлетворяет условию

$$(S(t)x(t), S(t)x(t)) \leq \rho^2, \quad (1.4)$$

где  $S(t)$  – заданная ограниченная матрица, то невозмущенный процесс устойчив в промежутке  $[t_0, T_1)$ , ( $T_1 < \infty$ ). В противном случае – неустойчив.

Известно, что решение (1.2) является траекторией подвижной точки в  $n$ -мерном фазовом пространстве [4].

Так как решение  $x(t)$  зависит от числа  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), значит, для различных групп получаются различные траектории движения – семейство кривых.

Поэтому возникает следующий вопрос: возможно ли выбрать из семейства кривых (траекторий) ту, которая доставляет минимальное значение расхода топлива [5].

Естественно ожидать, что такая траектория, которая обеспечивает наименьший расход топлива, должна иметь наименьшую длину.

Поэтому вопрос сводится к решению простейшей задачи вариационного исчисления [6,7].

Пусть в (1.2) обозначим

$$W = (s_{ij}), K = (k_{ij}), M = WK, M = (m_{ij}), i, j = \overline{1, n}, \det(WK) \neq 0. \quad (1.5)$$

Тогда (1.2) приводится к виду

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n C_i m_{1i} e^{\lambda_i t} \\ \sum_{i=1}^n C_i m_{2i} e^{\lambda_i t} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n C_i m_{ni} e^{\lambda_i t} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \sum_{i=1}^n C_i m_{1i} e^{\lambda_i t}, \\ x_2(t) = \sum_{i=1}^n C_i m_{2i} e^{\lambda_i t}, \\ \dots \\ x_n(t) = \sum_{i=1}^n C_i m_{ni} e^{\lambda_i t}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Уравнения (1.6) являются параметрическими уравнениями траектории движения материальной точки, аргумент  $t$  называется переменным параметром [8].

С помощью выражения (1.2) преобразуем левую сторону (1.4) (скалярное произведение).

Вместо  $S(t)$  возьмем

$$S(t) = (WK)^{-1}. \quad (1.7)$$

Подставим (1.7) в (1.4) и обозначим

$$V(t, x(t)) = ((WK)^{-1}x(t), (WK)^{-1}x(t)) \leq \rho^2, \quad (1.8)$$

отсюда

$$V(t, x(t)) = ((WK)^{-1}x(t))^* \cdot (WK)^{-1}x(t) \leq \rho^2,$$

где символ  $*$  – сопряженная матрица [9].

Значит,

$$V(t, x(t)) = x^*(t)((WK)^{-1})^* \cdot (WK)^{-1}x(t) \leq \rho^2. \quad (1.9)$$

Легко проверить, что

$$((WK)^{-1})^* \cdot (WK)^{-1}$$

является эрмитовой матрицей. Действительно,

$$[((WK)^{-1})^* \cdot (WK)^{-1}]^* = [(WK)^{-1}]^* \cdot [((WK)^{-1})^*]^* = [(WK)^{-1}]^* \cdot (WK)^{-1},$$

т.е. все характеристические числа эрмитовой матрицы (1.10) в (1.9) являются вещественными числами.

Пусть

$$[(WK)^{-1}]^* \cdot (WK)^{-1} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \dots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

С помощью матрицы (1.11) выражение (1.9) преобразуется к следующей квадратичной форме:

$$\begin{aligned}
V(t, x(t)) = & \Delta_{11}x_1(t)x_1(t) + \Delta_{12}x_1(t)x_2(t) + \dots + \Delta_{1n}x_1(t)x_n(t) + \\
& + \Delta_{21}x_2(t)x_1(t) + \Delta_{22}x_2(t)x_2(t) + \dots + \Delta_{2n}x_2(t)x_n(t) + \\
& \vdots \\
& + \Delta_{n1}x_n(t)x_1(t) + \Delta_{n2}x_n(t)x_2(t) + \dots + \Delta_{nn}x_n(t)x_n(t).
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Приведем квадратичную форму (1.12) к каноническому виду методом Якоби [8-10].

При помощи метода исключения Гаусса приведем матрицу (1.11) к следующему виду [9]:

$$G_n = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \dots & \Delta_{1n} \\ 0 & \Delta_{22}^{(1)} & \Delta_{23}^{(1)} & \dots & \Delta_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & \Delta_{33}^{(1)} & \dots & \Delta_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Delta_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}, \Delta_{11} \neq 0, \Delta_{22}^{(1)} \neq 0, \Delta_{33}^{(1)} \neq 0, \dots, \Delta_{nn}^{(n-1)} \neq 0. \tag{1.13}$$

Тогда квадратичная форма (1.12) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned}
V(t, x(t)) = & (\Delta_{11}x_1(t) + \Delta_{12}x_2(t) + \Delta_{13}x_3(t) + \dots + \Delta_{1n}x_n(t))^2 + \\
& + (\Delta_{22}^{(1)}x_2(t) + \Delta_{23}^{(1)}x_3(t) + \dots + \Delta_{2n}^{(1)}x_n(t))^2 + \dots + (\Delta_{nn}x_n(t))^2 \leq \rho^2.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Обозначим

$$\begin{cases} X_1(t) = \Delta_{11}x_1(t) + \Delta_{12}x_2(t) + \Delta_{13}x_3(t) + \dots + \Delta_{1n}x_n(t), \\ X_2(t) = \Delta_{22}^{(1)}x_2(t) + \Delta_{23}^{(1)}x_3(t) + \dots + \Delta_{2n}^{(1)}x_n(t), \\ \vdots \\ X_n(t) = \Delta_{nn}^{(n-1)}x_n(t). \end{cases} \tag{1.15}$$

Систему (1.15) с помощью матрицы  $G_n$  можно написать в виде

$$X(t) = G_n x(t), \tag{1.16}$$

где

$$X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))^T, x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T.$$

Рассмотрим так называемые главные миноры матрицы (1.11) [8-10]

$$D_1 = \Delta_{11}, D_2 = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{vmatrix}, \dots, D_n = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \dots & \Delta_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.17}$$

Поэтому тождество (1.14) можно записать в виде [8-10]

$$V(t, X(t)) = \frac{D_0}{D_1}(X_1(t))^2 + \frac{D_1}{D_2}(X_2(t))^2 + \dots + \frac{D_{n-1}}{D_n}(X_n(t))^2 \leq \rho^2 \quad (D_0 = 1). \tag{1.18}$$

Правая сторона выражения (1.18) является каноническим видом квадратичной формы  $V(t, X(t))$ .

Уравнения (1.15) являются параметрическими уравнениями для канонического вида (1.18).

**Замечания.**

1. Геометрически соотношения (1.15) или (1.18) в пространстве координат  $X_1, X_2, \dots, X_n$  при каждом фиксированном  $t$  представляют собой  $n$ -мерный эллипсоид [1].

2. В  $n + 1$ -мерном пространстве координат  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и времени  $t$  соотношения (1.15) или (1.18) представляют некоторую трубку, каждое сечение которой с гиперплоскостью  $t = t^*$  представляет эллипсоид [1].

Произведя в системе (1.15) или (1.16) параллельный перенос по направлению времени на  $t_0$ , получим систему

$$X(t - t_0) = G_n x(t - t_0). \quad (1.19)$$

Произведя то же самое относительно  $T_1$ , получим систему

$$X(t - T_1) = G_n x(t - T_1). \quad (1.20)$$

Система уравнений (1.19) представляет собой  $n$ -мерный эллипсоид, который является пересечением трубки (1.15) с гиперплоскостью  $t = t_0$ , а система (1.20) - то же самое с гиперплоскостью  $t = T_1$ .

Вышеизложенный материал позволяет сформулировать следующую задачу.

2. Постановка задачи. Пусть класс функций (1.2) имеет непрерывную производную  $\dot{x}(t)$  на отрезке  $[t_0, T_1]$ . Тогда выражение

$$J[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] = \int_{t_0}^{T_1} \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) + \dots + \dot{x}_n^2(t)} dt \quad (2.1)$$

будет функционалом, определенным на этом классе функций. Левый конец траекторий (1.2) перемещается по поверхности эллипсоида (1.19), а правый - (1.20).

Требуется определить:

1) экстремаль и минимальное значение функционала (2.1), когда левые крайние точки траекторий (1.2) перемещаются по поверхности эллипсоида (1.19), а правые - эллипсоида (1.20);

2) числа  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), которые соответствуют найденной экстремали.

Решение. Обозначим подынтегральную функцию (2.1) через

$$F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) + \dots + \dot{x}_n^2(t)}. \quad (2.2)$$

Функционал (2.1) геометрически выражает длину дуги кривой  $x(t)$  с концами  $x(0)$  при  $t = 0$  и  $x(t_1)$  при  $t = t_1$  [6].

Система уравнений Эйлера имеет вид [6,7].

$$\begin{aligned} \begin{cases} F_{x_k} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}_k} = 0, \\ F_{\dot{x}_k} = 0, k = \overline{1, n} \end{cases} &\Rightarrow \frac{d}{dt} F_{\dot{x}_k} = 0 \Rightarrow F_{\dot{x}_k \dot{x}_k} \cdot \ddot{x}_k = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_k = 0 \\ F_{\dot{x}_k \dot{x}_k} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ddot{x}_k = 0, k = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = 0, \\ \ddot{x}_2(t) = 0, \\ \dots \\ \ddot{x}_n(t) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha_1, \\ \dot{x}_2(t) = \alpha_2, \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = \alpha_n, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 t + \beta_1, \\ x_2(t) = \alpha_2 t + \beta_2, \\ \dots \\ x_n(t) = \alpha_n t + \beta_n, \end{cases} \quad (2.3)$$

где  $\alpha_i, \beta_i, (i = \overline{1, n})$  – произвольные постоянные.

Обозначим

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T, \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^T, \quad (2.4)$$

тогда система (2.3) примет следующий вид:

$$x(t) = \alpha t + \beta. \quad (2.5)$$

Уравнения (2.3) являются параметрическими уравнениями экстремалей [6,8].

Параметрическую систему уравнений (2.3) можно преобразовать к следующему каноническому виду:

$$\frac{x_1(t) - \beta_1}{\alpha_1} = \frac{x_2(t) - \beta_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{x_n(t) - \beta_n}{\alpha_n} = t. \quad (2.6)$$

С помощью (2.3) можно получить минимальное значение функционала (2.1)

$$\min J[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] = \int_{t_0}^{T_1} \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2} dt = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2} \cdot t|_{t_0}^{T_1}, \quad (2.7)$$

или

$$\min J[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] = V \cdot (T_1 - t_0), \quad (2.7_1)$$

где

$$V = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2}. \quad (2.8)$$

Выражение  $V$  из (2.8) является величиной скорости равномерного прямолинейного движения по направлению вектора  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  [8]. Тогда правая сторона выражения (2.7<sub>1</sub>) представляет собой произведение скорости на течение времени, т.е.  $V \cdot (T_1 - t_0)$  выражает длину пути материальной точки равномерного линейного движения на кратчайшем пути (экстремаль).

Следовательно, можно заключить, что минимальное значение функционала (2.1) равно длине экстремали в промежутке времени  $[t_0, T_1]$ .

Условия трансверсальности имеют вид [6]

$$[F + (\dot{X}_1 - \dot{x}_1)F_{\dot{x}_1} + (\dot{X}_2 - \dot{x}_2)F_{\dot{x}_2} + \dots + (\dot{X}_n - \dot{x}_n)F_{\dot{x}_n}]|_{t=t_0} = 0,$$

отсюда при (2.1)

$$\left[ F + (\dot{X}_1 - \dot{x}_1) \frac{\dot{x}_1}{F} + (\dot{X}_2 - \dot{x}_2) \frac{\dot{x}_2}{F} + \dots + (\dot{X}_n - \dot{x}_n) \frac{\dot{x}_n}{F} \right] \Big|_{t=t_0} = 0,$$

или

$$[F^2 + (\dot{X}_1 - \dot{x}_1)\dot{x}_1 + (\dot{X}_2 - \dot{x}_2)\dot{x}_2 + \dots + (\dot{X}_n - \dot{x}_n)\dot{x}_n] \Big|_{t=t_0} = 0,$$

значит,

$$[F^2 + \dot{X}_1\dot{x}_1 + \dot{X}_2\dot{x}_2 + \dots + \dot{X}_n\dot{x}_n - (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dots + \dot{x}_n^2)] \Big|_{t=t_0} = 0,$$

следовательно,

$$\left\{ (\dot{X}_1\dot{x}_1 + \dot{X}_2\dot{x}_2 + \dots + \dot{X}_n\dot{x}_n) \Big|_{t=t_0} = 0, \right. \quad (2.9)$$

$$\left. (\dot{X}_1\dot{x}_1 + \dot{X}_2\dot{x}_2 + \dots + \dot{X}_n\dot{x}_n) \Big|_{t=T_1} = 0. \right. \quad (2.10)$$

Подставив значения  $\dot{x}_i(t) = \alpha_i, i = \overline{1, n}$  из (2.3) в (2.9) и (2.10), получим

$$\left\{ (\dot{X}_1\alpha_1 + \dot{X}_2\alpha_2 + \dots + \dot{X}_n\alpha_n) \Big|_{t=t_0} = 0, \right. \quad (2.11)$$

$$\left. (\dot{X}_1\alpha_1 + \dot{X}_2\alpha_2 + \dots + \dot{X}_n\alpha_n) \Big|_{t=T_1} = 0. \right. \quad (2.12)$$

Соотношения (2.11) и (2.12) выражают перпендикулярность искомой экстремали (2.5) (или (2.3)) соответственно на левой стороне поверхности эллипсоида (1.19) и на правой стороне поверхности эллипсоида (1.20).

Теперь перейдем к определению произвольных постоянных  $\alpha_i, \beta_i, i = \overline{1, n}$  из (2.3).

Воспользуемся тем фактом, что левый конец экстремали (2.3) перемещается по поверхности эллипсоида (1.19), а правый – по (1.20).

Согласно приведенным выше замечаниям, следует, что координаты всех точек эллипсоида (1.19) имеют одинаковые значения  $t = t_0$ , а для эллипсоида (1.20) -  $t = T_1$ .

Нетрудно заметить, что левый конец экстремали (2.5) имеет вид

$$x(t_0) = \alpha t_0 + \beta, \quad (2.13)$$

а правый конец:

$$x(T_1) = \alpha T_1 + \beta. \quad (2.14)$$

Таким образом, имеем следующие уравнения:

$$\begin{cases} \alpha t_0 + \beta = (t_0, t_0, \dots, t_0)^T = t_0 \cdot (1, 1, \dots, 1)^T, \\ \alpha T_1 + \beta = (T_1, T_1, \dots, T_1)^T = T_1 \cdot (1, 1, \dots, 1)^T. \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\alpha T_1 + \beta = (T_1, T_1, \dots, T_1)^T = T_1 \cdot (1, 1, \dots, 1)^T. \quad (2.16)$$

Вычитая (2.15) из уравнения (2.16), получим

$$\alpha(T_1 - t_0) = (T_1 - t_0)(1, 1, \dots, 1)^T,$$

т.е.

$$\alpha = (1, 1, \dots, 1)^T, (t_0 \neq T_1). \quad (2.17)$$

Из (2.15) и (2.17) следует

$$t_0 \cdot (1, 1, \dots, 1)^T + \beta = t_0 (1, 1, \dots, 1)^T,$$

значит,

$$\beta = t_0(1, 1, \dots, 1)^T - t_0 (1, 1, \dots, 1)^T,$$

следовательно,

$$\beta = (0, 0, \dots, 0)^T. \quad (2.18)$$

Из (2.17) и (2.18) следует окончательный вид для экстремали (2.6):

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_n(t) = t. \quad (2.19)$$

Следовательно, искомая экстремаль проходит через начало координат  $(0, 0, \dots, 0)$  и имеет направляющий вектор

$$\tilde{\alpha} = \{1, 1, \dots, 1\}. \quad (2.20)$$

С помощью (2.17) полученное минимальное значение (2.7) для функционала (2.1) приобретает вид

$$\min J[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] = \int_{t_0}^{T_1} \sqrt{1 + 1 + \dots + 1} dt = \sqrt{n} \cdot t \Big|_{t_0}^{T_1},$$

или

$$\min J[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] = \sqrt{n} \cdot (T_1 - t_0) = V \cdot (T_1 - t_0), \quad (2.21)$$



где

$$V = \sqrt{n} \quad (2.22)$$

является величиной скорости равномерного прямолинейного движения по направлению вектора  $\tilde{a} = \{1, 1, \dots, 1\}$ .

Остался один из следующих основных вопросов: как определить значения  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), которые соответствуют полученной выше экстремали (2.3)? Поступим следующим образом: пусть произвольные постоянные  $C_i, i = \overline{1, n}$  из (1.6) уже известны при начальных условиях, когда  $t = t_0$ . Экстремаль (2.3) должна совпасть с одной из любых траекторий (1.6) при соответствующем выборе  $\lambda_i, i = \overline{1, n}$ . Сравнивая системы (1.6) и (2.3) при (2.14), (2.17), (2.18) и  $t = T_1$ , получим следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1 m_{11} e^{\lambda_1 T_1} + C_2 m_{12} e^{\lambda_2 T_1} + \dots + C_n m_{1n} e^{\lambda_n T_1} = T_1, \\ C_1 m_{21} e^{\lambda_1 T_1} + C_2 m_{22} e^{\lambda_2 T_1} + \dots + C_n m_{2n} e^{\lambda_n T_1} = T_1, \\ \dots \\ C_1 m_{n1} e^{\lambda_1 T_1} + C_2 m_{n2} e^{\lambda_2 T_1} + \dots + C_n m_{nn} e^{\lambda_n T_1} = T_1. \end{cases} \quad (2.23)$$

Предполагая,  $C_i \neq 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ) и возвращаясь к работе [3], можно доказать, что матрица  $N = (C_i m_{ji})$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ) невырожденная. Следовательно,

$$(e^{\lambda_1 T_1}, e^{\lambda_2 T_1}, \dots, e^{\lambda_n T_1})^T = N^{-1} \cdot (T_1, T_1, \dots, T_1)^T. \quad (2.24)$$

Матрицу  $N^{-1}$  представляем с помощью строк следующим образом:

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix}.$$

Тогда выражение (2.24) можно преобразовать к виду

$$(e^{\lambda_1 T_1}, e^{\lambda_2 T_1}, \dots, e^{\lambda_n T_1})^T = (N_1, N_2, \dots, N_n)^T \cdot (1, 1, \dots, 1)^T \cdot T_1,$$

откуда следует

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 T_1} = N_1 \cdot (1, 1, \dots, 1)^T \cdot T_1, \\ e^{\lambda_2 T_1} = N_2 \cdot (1, 1, \dots, 1)^T \cdot T_1, \\ \vdots \\ e^{\lambda_n T_1} = N_n \cdot (1, 1, \dots, 1)^T \cdot T_1. \end{cases} \quad (2.25)$$

Так как левые стороны в (2.25) - положительные числа, то значит, и правые стороны - также положительные числа.

Прологарифмировав обе стороны системы (2.25) и разделив на  $T_1 \neq 0$ , окончательно находим

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{T_1} \ln[N_1 \cdot (1, 1, \dots, 1)^T \cdot T_1], \\ \lambda_2 = \frac{1}{T_1} \ln[N_2 \cdot (1, 1, \dots, 1)^T \cdot T_1], \\ \vdots \\ \lambda_n = \frac{1}{T_1} \ln[N_n \cdot (1, 1, \dots, 1)^T \cdot T_1]. \end{cases} \quad (2.26)$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Абгарян К.А.** Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. – М.: Наука, 1973. - 431 с.
2. **Абгарян К.А.** К теории устойчивости процессов на заданном промежутке времени //ПММ.– М., 1975. – Т. 39, вып. 5. – С.827-834.
3. **Григорян Ф.П.** Синтез управлений с желаемым спектром в системе автоматического регулирования //Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. -2002. –Т. 55, N1. –С. 121-127.
4. **Бермант А.Ф., Араманович И.Г.** Краткий курс математического анализа. Для ВТУЗ-ов. – М.: Наука, 1969. - 735 с.
5. **Дорф Р., Бишоп Р.** Современные системы управления. –М.: Лаборатория базовых знаний “Юнимедиастиль”, 2002. -831 с.
6. **Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.Н.** Вариационное исчисление. –М.: Наука, 1973. - 190 с.
7. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. - 542 с.
8. **Ефимов Н.В.** Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1969. - 272 с.
9. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. – М.: Наука, 1967. - 376 с.
10. **Александров П.С.** Лекции по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968. - 912 с.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 15.04. 2018.

### Ֆ.Պ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

#### ՕՊՏԻՄԱԼ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ՄԻՆԹԵԶԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ. II

Գծային ինտեգրալիֆերենցիալ հավասարումների ստացիոնար համակարգում դիտարկված է օպտիմալ կառավարման սինթեզի մի խնդիր, որն ապահովում է ինքնաթիռի կամ տիեզերանավի վառելանյութի ծախսի նվազարկումը: Այն լուծվել է վարիացիոն հաշվի տեղաշարժվող եզրերով մի խնդրի միջոցով, երբ շարժվող նյութական կետի հետագծերի ծայրերը շարժվում են տրված երկու էլիպսոիդների մակերևույթների վրայով:

**Առանցքային բաներ.** օպտիմալ կառավարման սինթեզ, ինտեգրալիֆերենցիալ հավասարումների ստացիոնար համակարգ:

**F.P. GRIGORYAN**

**THE SYNTHESIS OF OPTIMAL CONTROL. II**

In a linear integro-differential stationary system of equations, one problem of optimal control synthesis is considered which ensures the minimization of fuel consumption of an airplane or a space jar. It is solved with the help of one problem of the calculus of variations with moving boundaries when the ends of the trajectory of a moving material point move along the two given surfaces of the ellipsoids.

**Keywords:** synthesis, optimal control, integro-differential stationary system of equations.