С.О. СИМОНЯН

РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ
ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Рассматриваются динамические однопараметрические матричные уравнения типа Сильвестра. Для решения этих уравнений предлагаются два метода, основанные на дифференциальных преобразованиях. Приводятся результаты решения одного модельного примера обоими предложенными методами.

Ключевые слова: динамические матричные уравнения; методы, основанные на дифференциальных преобразованиях; модельный пример.

Введение. Динамические однопараметрические матричные уравнения типа Сильвестра имеют вид

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot B(t), \quad X(t_0) = fix, \quad (1)$$

где $A(t)$ и $B(t)$ - функциональные матрицы порядка m и n соответственно; $X(t)$ - неизвестная матрица размерами $m \times n$, подлежащая определению; $X(t_0)$ - начальное условие, причём t_0 - начало динамического процесса.

Для решения задачи (1) в работе [1] предложены блочно-матричная и кронекерова блочно-гиперматрично-гипервекторная вычислительные структуры, применением которых решен один модельный пример. В обоих случаях получены точно совпадающие друг с другом численно-аналитические решения.

Известно [2], что для автономных матричных уравнений ($A(t) = \text{const}$, $B(t) = \text{const}$) решение задачи (1) имеет вид

$$X(t) = \Phi_A(t) \cdot X(0) \cdot \Phi_B(t), \quad (2)$$

где $\Phi_A(t) = e^{At}$ и $\Phi_B(t) = e^{Bt}$ - фундаментальные матрицы матриц A и B соответственно, а для неавтономных матричных уравнений $A(t) = \text{var}$, $B(t) = \text{var}$, $t_0 \neq 0$:

$$X(t) = M_A(t, t_0) \cdot X(t_0) \cdot M_B(t, t_0), \quad (3)$$

где $M_A(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau}$ и $M_B(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t B(\tau) d\tau}$ – переходные матрицы (матрицанты) матриц $A(t)$ и $B(t)$ соответственно.

Известны [3, 4] также фундаментальные свойства фундаментальных матриц $\Phi_A(t)$ и $\Phi_B(t)$:

$$1) \Phi_A(0) = E_{m \times m}, \quad \Phi_B(0) = E_{n \times n}, \quad (4)$$

$$2) \dot{\Phi}_A(t) = A \cdot \Phi_A(t), \quad \dot{\Phi}_B(t) = B \cdot \Phi_B(t) \quad (5)$$

и переходных матриц $M_A(t, t_0)$ и $M_B(t, t_0)$:

$$1) M_A(t_0, t_0) = E_{m \times m}, \quad M_B(t_0, t_0) = E_{n \times n}, \quad (6)$$

$$2) \dot{M}_A(t, t_0) = A(t) \cdot M_A(t, t_0), \quad \dot{M}_B(t, t_0) = B(t) \cdot M_B(t, t_0), \quad (7)$$

где $E_{m \times m}$ и $E_{n \times n}$ – единичные матрицы порядков m и n соответственно.

Для определения переходных матриц $M_A(t, t_0)$ и $M_B(t, t_0)$ можно воспользоваться известными методами [3, 4] и, в частности, методом возмущений, методом матрицанта, при которых оперируют интегральными операторами, входящими в соответствующие ряды Неймана. Определение этих рядов обычно связано с достаточно большими вычислительными затруднениями.

Математический аппарат. Из-за последнего важного обстоятельства и в предположении, что матрицы $A(t)$, $B(t)$, $M_A(t, t_0)$, $M_B(t, t_0)$ и $X(t)$ обладают достаточно гладкими элементами в центре аппроксимации t_v , имеют место матричные дифференциальные преобразования [5]:

$$A(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K A(t)}{\partial t^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \cdot \quad A(t) = \chi_1(t, t_v, H, A(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (8)$$

$$B(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K B(t)}{\partial t^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \cdot \quad B(t) = \chi_2(t, t_v, H, B(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (9)$$

$$M_A(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K M_A(t, t_0)}{\partial t^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \cdot \quad M_A(t, t_0) = \chi_3(t, t_v, H, M_A(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (10)$$

$$M_B(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K M_B(t, t_0)}{\partial t^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty}, \quad M_B(t, t_0) = \chi_4(t, t_v, H, M_B(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (11)$$

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K X(t)}{\partial t^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty}, \quad X(t) = \chi_5(t, t_v, H, X_A(K), K = \overline{0, \infty}). \quad (12)$$

Представим два метода, основанные на них.

Первый метод. Для определения переходных матриц $M_A(t, t_0)$ и $M_B(t, t_0)$ и, следовательно, решения (3), не вдаваясь в подробности, матричные дифференциальные уравнения (7) из области оригиналов переведем в область дифференциальных изображений. Получим

$$\frac{K+1}{H} \cdot M_A(K+1) = \sum_{\ell=0}^K A(\ell) \cdot M_A(K-\ell), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (13)$$

$$\frac{K+1}{H} \cdot M_B(K+1) = \sum_{\ell=0}^K B(\ell) \cdot M_B(K-\ell), \quad K = \overline{0, \infty}. \quad (14)$$

Следовательно, с учетом матричных условий (6) из соотношений (13), (14) рекуррентно можно определить матричные дискреты $M_A(1), M_A(2), \dots$ и $M_B(1), M_B(2), \dots$, а затем, в соответствии с некоторым обратным дифференциальным преобразованием, и решение $X(t)$.

В частности, при дифференциально-тейлоровских преобразованиях [5] будем иметь представление

$$X(t) = \sum_{\ell=0}^K M_A(\ell) \left(\frac{t-t_v}{H} \right)^\ell \cdot X(t_0) \cdot \sum_{\ell=0}^K M_B(\ell) \left(\frac{t-t_v}{H} \right)^\ell. \quad (15)$$

Второй метод. Для решения задачи (1) можно использовать и соотношение (3) непосредственно. В соответствии с правилами алгебры дифференциальных преобразований, перевод (3) из области оригиналов в область дифференциальных изображений приводит к следующему соотношению:

$$X(K) = \sum_{\ell=0}^K M_A(K-\ell) \cdot X(0) \cdot M_B(\ell), \quad \ell = \overline{0, K}, \quad (16)$$

откуда

при $K=0$:

$$X(0) = \overset{E_{m \times m}}{M_A(0)} \cdot X(0) \cdot \overset{E_{n \times n}}{M_B(0)} = X(t_0); \quad (17)$$

при $K=1$:

$$\begin{aligned} X(1) &= M_A(1) \cdot X(0) \cdot \overset{E_{n \times n}}{M_B(0)} + \overset{E_{m \times m}}{M_A(0)} \cdot X(0) \cdot M_B(1) = \\ &= M_A(1) \cdot X(0) + X(0) \cdot M_B(1); \end{aligned} \quad (18)$$

при $K=2$:

$$\begin{aligned} X(2) &= \overset{E_{n \times n}}{M_A(2)} \cdot X(0) \cdot M_B(0) + M_A(1) \cdot X(0) \cdot M_B(1) + \\ &+ M_A(0) \cdot X(0) \cdot \overset{E_{m \times m}}{M_B(2)} = M_A(2) \cdot X(0) + M_A(1) \cdot X(0) \cdot M_B(1) + X(0) \cdot M_B(2); \end{aligned} \quad (19)$$

при $K=3$:

$$\begin{aligned} X(3) &= M_A(3) \cdot X(0) \cdot \overset{E_{n \times n}}{M_B(0)} + M_A(2) \cdot X(0) \cdot M_B(1) + \\ &+ M_A(1) \cdot X(0) \cdot M_B(2) + \overset{E_{m \times m}}{M_A(0)} \cdot X(0) \cdot M_B(3) = \\ &= M_A(3) \cdot X(0) + M_A(2) \cdot X(0) \cdot M_B(1) + \\ &+ M_A(1) \cdot X(0) \cdot M_B(2) + X(0) \cdot M_B(3); \end{aligned} \quad (20)$$

при $K=4$:

$$\begin{aligned}
 X(4) &= M_A(4) \cdot X(0) \cdot M_B(0) + M_A(3) \cdot X(0) \cdot M_B(1) + M_A(2) \cdot X(0) \cdot M_B(2) + \\
 &\quad + M_A(1) \cdot X(0) \cdot M_B(3) + M_A(0) \cdot X(0) \cdot M_B(4) = \\
 &= M_A(4) \cdot X(0) + M_A(3) \cdot X(0) \cdot M_B(1) + M_A(2) \cdot X(0) \cdot M_B(2) + \\
 &\quad + M_A(1) \cdot X(0) \cdot M_B(3) + X(0) \cdot M_B(4)
 \end{aligned} \tag{21}$$

и т.д.

Итак, имея матричные дискреты (17)-(21), в частности, в соответствии с дифференциально-тейлоровскими преобразованиями, будем иметь решение

$$X(t) = \sum_{\ell=0}^K X(\ell) \left(\frac{t-t_v}{H} \right)^\ell, \quad K = \overline{0, \infty}. \tag{22}$$

Замечание 1. Очевидно, количество слагаемых в правых частях (17)-(21), ... равно $K+1$, $\forall K = \overline{0, \infty}$.

Замечание 2. В работе [1] вышеотмеченными вычислительными структурами была решена задача

$$\frac{dX(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -t^2 \\ 0 & -t & t \\ t & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X(t) + X(t) \cdot \begin{bmatrix} 1 & t \\ t^2 & -t \end{bmatrix}, \quad X(t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

В настоящей работе эту же задачу сначала решим первым методом с применением соотношений (6)-(15), при которых

$$M_A(t) = \begin{bmatrix} (1+t+1/2 \cdot t^2 + 1/6 \cdot t^3 + \dots) & (t+1/2 \cdot t^2 + \dots) & (-1/6 \cdot t^3 + \dots) \\ 0 & (1-1/2 \cdot t^2 + 1/3 \cdot t^3 + \dots) & (1/2 \cdot t^2 + \dots) \\ (1/2 \cdot t^2 + 1/3 \cdot t^3 + \dots) & (t+1/6 \cdot t^3 + \dots) & (1+1/6 \cdot t^3 + \dots) \end{bmatrix},$$

$$M_B(t) = \begin{bmatrix} (1+t+\frac{1}{2} \cdot t^2 + \frac{1}{6} \cdot t^3 + \dots) & (\frac{1}{2} \cdot t^2 + \frac{1}{6} \cdot t^3 + \dots) \\ \frac{1}{3} \cdot t^3 + \dots & (1-\frac{1}{2} \cdot t^2 + \dots) \end{bmatrix},$$

а решение задачи

$$X(t) = \begin{bmatrix} (1+2t+2t^2+2t^3+11/12 \cdot t^4+1/3 \cdot t^5+\dots) & (1+5/6 \cdot t^3+5/12 \cdot t^4+1/4 \cdot t^5+\dots) \\ (-t^2-4/3 \cdot t^3-1/2 \cdot t^4-1/9 \cdot t^6+\dots) & (-1+t^2-1/3 \cdot t^3-3/4 \cdot t^4+\dots) \\ (-2-2 \cdot t-1/2 \cdot t^2+1/6 \cdot t^3-1/12 \cdot t^4+\dots) & (-t-1/2 \cdot t^2+1/3 \cdot t^3+\dots) \end{bmatrix},$$

мало отличается от решения, полученного в [1].

Теперь представим результаты решения задачи вторым методом на основе использования соотношений (16)-(22). В соответствии с полученными $M_A(t)$ и $M_B(t)$ имеем

$$M_A(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_A(2) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_A(3) = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}, \dots;$$

$$M_B(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_B(2) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad M_B(3) = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}, \dots$$

Тогда согласно (16)-(21) получим

$$X(1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad X(2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ -0,5 & -0,5 \end{bmatrix}, \quad X(3) = \begin{bmatrix} 2 & 5/4 \\ -4/3 & -1/3 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}, \dots,$$

при которых решение $X(t)$ также мало отличается от решения, полученного в [1].

Действительно, с учетом (22) имеем

$$X(t) = \begin{bmatrix} (1+2t+2t^2+2t^3+\dots) & (1+5/6 \cdot t^3+\dots) \\ (-t^2-4/3 \cdot t^3+\dots) & (-1+t^2-1/3 \cdot t^3+\dots) \\ (-2-2t-1/2 \cdot t^2+1/6 \cdot t^3+\dots) & (-t-1/2 \cdot t^2+1/3 \cdot t^3+\dots) \end{bmatrix}.$$

Заключение. Таким образом, применение операционного метода дифференциальных преобразований для решения задачи (1) приводит к простым рекуррентным численным процедурам на первом этапе вычислений при нахождении матричных дискретов решения и простой операции суммирования для восстановления $X(t)$ на втором этапе вычислений. Предложенные численно-аналитические методы выгодно отличаются от вышеотмеченных методов возмущений, матрицанта и др., оперирующих интегральными операторами по определению соответствующих рядов Неймана, достаточно осложняющими вычислительные процедуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Симонян С.О., Папоян О.С.** К решению динамических однопараметрических матричных уравнений типа Сильвестра $\frac{dX(t)}{dt} = A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot B(t), X(t_0) = fix$
// Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиоэлектроника. – 2018. - № 2. – С. 9-20.
2. **Ланкастер П.** Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
3. **Чаки Ф.** Современная теория управления. - М.: Мир, 1975. - 424 с.
4. <https://studfiles.net /preview/6126433/page:13>
5. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. - Киев: Наукова думка, 1984. - 420 с.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 13.12.2018.

Մ.Հ. ՄԻՄՈՆՅԱՆ

ԴԻՆԱՄԻԿ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԳՇՄՅԻՆ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՄԱՄԲ

Դիտարկվում են Միլվեստրի տիպի դինամիկ միապարամետրական մատրիցային հավասարումները: Այդ հավասարումների լուծման համար առաջարկվում են երկու մեթոդներ, որոնք հիմնված են դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա: Ներկայացվում են մեկ մոդելային օրինակի լուծման արդյունքները՝ առաջարկված երկու մեթոդներով:

Առանցքային բառեր. դինամիկ մատրիցային հավասարումներ, դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա հիմնված մեթոդներ, մոդելային օրինակ:

S.H. SIMONYAN

SOLUTION OF DYNAMIC ONE-PARAMETRIC LINEAR MATRIX EQUATIONS BY APPLYING DIFFERENTIAL TRANSFORMATIONS

Dynamic one-parameter matrix equations of Sylvester type are considered. To solve these equations, two methods are proposed based on differential transformations. The results of solving a single model example by both proposed methods are given.

Keywords: dynamic matrix equations; methods based on differential transformations, model example.