

Ф.П. ГРИГОРЯН

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ
ПЕРЕМЕННЫХ. I

Рассматриваются передаточные функции многих комплексных переменных. Показано, что в задачах синтеза управления с наперед заданным спектром иногда передаточную функцию регулятора необходимо представить в виде аналитической функции многих комплексных переменных.

Ключевые слова: задачи синтеза управления, передаточные аналитические функции многих комплексных переменных, стационарные управляемые системы.

Рассматривается новое понятие: передаточные аналитические функции многих комплексных переменных. Одновременно показывается их применение в задачах синтеза одномерного управления с наперед заданными спектрами в стационарных управляемых системах.

Иногда бывают случаи, когда передаточная функция регулятора $W(p)$, $p = x + jy$, $j = \sqrt{-1}$ не имеет таких аналитических свойств, какие имеют отдельные блоки $W_k(p)$, $k = \overline{1, n}$. И наоборот, аналитические свойства передаточных функций отдельных блоков $W_k(p)$ не передаются передаточным функциям общей схемы $W(p)$ (параллельное соединение).

Поэтому возникает естественный вопрос: как сохранить взаимосвязь между свойствами передаточной функции параллельного соединения $W(p)$ и отдельных блоков $W_k(p)$, $k = \overline{1, n}$.

Этот вопрос можно решить, если принять, что иногда передаточные функции представляются в виде аналитических функций многих комплексных переменных, в отличие от случая с одной комплексной переменной.

Поэтому считаем необходимым процитировать следующие факты из теории аналитических функций многих комплексных переменных [1-3].

Пространство $C^n = C \times \dots \times C$ – декартово произведение из n экземпляров комплексной плоскости C . Для точки из C^n будем использовать обозначение $Z = (z_1, \dots, z_n)$, где $z_i = x_i + jy_i \in C$ и x_i, y_i – вещественные числа, $j = \sqrt{-1}$.

Возвращаемся к следующей задаче [4]:

1. Постановка задачи. Пусть задана следующая управляемая стационарная система:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + hu(t), \\ u(t) = \int_{-\infty}^t g(t-t')v(t') dt', \Rightarrow \dot{x}(t) = Ax(t) + h \int_{-\infty}^t g(t-t')bx(t') dt', \\ v(t) = bx(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ – столбцовая матрица размером $n \times 1$ состояния процесса (T – означает транспонирование); $v(t)$ – скаляр, входной сигнал регулятора; $g(t-t')$ – скаляр, импульсная переходная функция регулятора; $u(t)$ – скалярное управляющее воздействие, рассматриваемое как выходной сигнал регулятора; $A = (a_{ij}), (i, j = 1, 2, \dots, n)$; $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$; $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$; t' – момент подачи входного сигнала; t – момент появления выходного сигнала.

Наперед заданными желательными числами являются

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_1}; \underbrace{\mu, \mu, \dots, \mu}_{n_2}; 0, n_1 + n_2 + 1 = n \quad (1.2)$$

при

$$\lambda_i \neq \lambda_j, i, j = 1, 2, \dots, n_1, \mu \neq \lambda_i, \mu \neq 0. \quad (1.2_1)$$

Требуется построить $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ так, чтобы система (1.1) при новых неизвестных $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T$ была приведена к виду

$$\begin{cases} \dot{y}_i(t) = \lambda_i y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n_1), \\ \dot{y}_j(t) = \mu y_j \quad (j = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2), \\ \dot{y}_n(t) = 0 \cdot y_n, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_i = e^{\lambda_i t} C_i, \\ y_j = e^{\mu t} C_j, \\ y_n = C_n, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^{(1)} = e^{j_1 t} C^{(n_1)}, \\ j_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n_1}), \\ y^{(2)} = e^{\mu t} C^{(n_2)}, \\ y_n = C_n, \end{cases} \quad (1.3)$$

где $C^{(n_1)} = (C_1, \dots, C_{n_1})^T, C^{(n_2)} = (C_{n_1+1}, \dots, C_{n_1+n_2})^T$ – столбцы из произвольных постоянных; C_n – постоянный скаляр; $y^{(1)} = (y_1, \dots, y_{n_1})^T$, $y^{(2)} = (y_{n_1+1}, \dots, y_{n_1+n_2})^T$, $y = (y^{(1)}, y^{(2)}, y_n)^T$.

Предполагаются также следующие условия: для передаточной функции регулятора $W(p)$ удовлетворяются

$$W(\lambda_i) \neq 0, W(\mu) \neq 0, W(0) \neq 0, (i = \overline{1, n_1}), \frac{d^i W(p)}{dp^i} \Big|_{p=\mu} = 0 \quad (i = \overline{1, n_2 - 1}), \quad (1.4)$$

где p – комплексный параметр [5].

Более подробные преобразования решений задач, приведенных в [4], здесь повторять не будем.

Здесь в основном нас интересуют другие вопросы, связанные с условиями (1.4), на которых мы и остановимся. В условиях (1.4) утверждается, что свойства передаточной функции регулятора зависят от вида наперед заданного спектра (1.2). Поэтому можно представить, что регулятор образуется из трех звеньев (блоки), и каждый блок имеет свою передаточную функцию

$$W_1(p) = \frac{\lambda_1}{\beta_1 + \prod_{i=1}^{n_1} (p - \lambda_i)}, W_2(p) = \frac{\lambda_2}{\beta_2 + (p - \mu)^{n_2}}, W_3(p) = \frac{\lambda_3}{\beta_3 + p}, \quad (1.5)$$

каждая из которых удовлетворяет условиям (1.4) соответственно, где $\alpha_i \neq 0, \beta_i \neq 0, i = 1, 2, 3$ - произвольные постоянные, знаменатели дробей в (1.5), отличные от нуля.

Если представим, что регулятор является параллельным соединением трех блоков, то передаточной функцией его является [6]

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p) + W_3(p) = \frac{\alpha_1}{\beta_1 + \prod_{i=1}^{n_1} (p - \lambda_i)} + \frac{\alpha_2}{\beta_2 + (p - \mu)^{n_2}} + \frac{\alpha_3}{\beta_3 + p}. \quad (1.6)$$

Было бы желательно, чтобы функция $W(p)$ из (1.6) обладала условиями (1.4). Но, как можно заметить, она не удовлетворяет налагаемым условиям. На самом деле имеем

$$W'(p) = \frac{-\alpha_1 (\Delta_{n_1})'}{[\beta_1 + \Delta_{n_1}(p)]^2} + \frac{-\alpha_2 n_2 (p - \mu)^{n_2-1}}{[\beta_2 + (p - \mu)^{n_2}]^2} + \frac{-\alpha_3 n_3 p^{n_3-1}}{(\beta_3 + p)^2},$$

$$\Delta_{n_1}(p) = \prod_{i=1}^{\alpha_1} (p - \lambda_i).$$

В случае, когда $p = \mu$, вторая дробь в $W'(p)$ равняется нулю, а первая и третья дроби не равны нулю, потому по третьему условию имеем $\lambda_i \neq \mu, \mu \neq 0$, в противном случае - кратность числами λ_i и 0 будет увеличиваться, что опять же противоречит третьему условию задачи.

Возникает вопрос: как выйти из подобного “тупикового” положения? Для этого введем понятие передаточных функций многих комплексных переменных [1-3].

Примем, что: 1) передаточная функция регулятора $W(p)$ зависит от трех комплексных переменных $W(p) = W(p_1, p_2, p_3)$, $p = (p_1, p_2, p_3)$, $p_i = x_i + jy_i \in C, i = 1, 2, 3$; 2) передаточные функции каждого блока имеют вид соответственно

$$W_1(p_1) = \frac{\alpha_1}{\beta_1 + \prod_{i=1}^{n_1} (p_1 - \lambda_i)}, W_2(p_2) = \frac{\alpha_2}{\beta_2 + (p_2 - \mu)^{n_2}}, W_3(p_3) = \frac{\alpha_3}{\beta_3 + p_3}. \quad (1.7)$$

Тогда условия (1.4) в вышеставленной задаче можно заменить на следующие [1,2]:

а) в комплексной плоскости p_1 (p_1 - любое комплексное число, а $p_2 = p_3 = 0$):

$$W(p_1, p_2, p_3)|_{\substack{p_2=0 \\ p_3=0}} = W(p_1, 0, 0) = W_1(p_1)|_{p_1=\lambda_i} \neq 0, i = \overline{1, n_1}, \quad (1.8)$$

б) в комплексной плоскости p_2 (p_2 - любое комплексное число, а $p_1 = p_3 = 0$):

$$\begin{aligned} W(p_1, p_2, p_3)|_{\substack{p_1=0 \\ p_3=0}} &= W(0, p_2, 0) = W_2(p_2)|_{p_2 \neq 0}, \\ \frac{\partial^i W(p_1, p_2, p_3)}{\partial p_2^i} \Big|_{p_2=\mu} &= \frac{d^i W_2(p_2)}{dp_2^i} \Big|_{p_2=\mu} = 0, i = \overline{1, n_2 - 1}; \end{aligned} \quad (1.9)$$

в) в комплексной плоскости p_3 (p_3 - любое комплексное число, а $p_1 = p_2 = 0$):

$$W(p_1, p_2, p_3)|_{\substack{p_1=0 \\ p_2=0}} = W(0, 0, p_3) = W_3(p_3)|_{p_3=0} \neq 0, \quad (1.10)$$

При (1.7) в случае параллельного соединения передаточной функцией регулятора является [6]

$$\begin{aligned} W(p) &= W(p_1, p_2, p_3) = W_1(p_1) + W_2(p_2) + W_3(p_3) = \\ &= \frac{\alpha_1}{\beta_1 + \prod_{i=1}^{n_1} (p_1 - \lambda_i)} + \frac{\alpha_2}{\beta_2 + (p_2 - \mu)^{n_2}} + \frac{\alpha_3}{\beta_3 + p_3}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Можно заметить, что функция из (1.11) удовлетворяет условиям (1.8) – (1.10) соответственно.

2. Пример. Рассмотрим задачу программы управления космическим аппаратом при посадке на Луну [4,7]. Движение космического аппарата в конце посадки будем рассматривать в относительной системе координат охуз. Начало относительной системы координат поместим в расчетную точку прилунения.

Для простоты рассмотрим однородную часть системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\varpi^2 x_1 + u\alpha_2, \\ \dot{x}_3 = x_4, \alpha_2^2 + \alpha_4^2 = 1, \\ \dot{x}_4 = 2\varpi^2 x_3 + u\alpha_4, \end{cases} \quad (2.1)$$

Обозначим

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\varpi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2\varpi^2 & 0 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \begin{cases} u = \int_{-\infty}^t g(t-t')v(t')dt', \\ v(t) = bx(t), \\ b = (b_1, b_2, b_3, b_4). \end{cases} \quad (2.2)$$

Тогда система (2.1) примет вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + h \int_{-\infty}^t g(t-t')bx(t')dt'. \quad (2.3)$$

Предположим, что наперед заданными желательными числами являются

$$1, 1, 2, 0. \quad (2.4)$$

Требуется построить передаточную функцию регулятора $W(p)$ так, чтобы она удовлетворяла следующим условиям:

$$W(p)|_{p=1} \neq 0, \left. \frac{dW(p)}{dp} \right|_{p=1} = 0; W(p)|_{p=2} \neq 0, W(p)|_{p=0} \neq 0. \quad (2.5)$$

Решение. Представим, что регулятор образуется из трех звеньев, соответствующих видам (2.4), и каждое из них имеет свою передаточную функцию

$$W_1(p) = \frac{\alpha_1}{\beta_1 + (p-1)^2}, W_2(p) = \frac{\alpha_2}{\beta_2 + (p-2)}, W_3(p) = \frac{\alpha_3}{\beta_3 + p}. \quad (2.6)$$

Можно заметить, что $W_1(p)$ удовлетворяет первой части условия (2.5), $W_2(p)$ – второй части, а $W_3(p)$ – третьей части.

Если представим, что эти блоки соединены последовательно, то для передаточной функции регулятора $W(p)$ получим

$$\tilde{W}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p) = \frac{\alpha_1}{\beta_1 + (p-1)^2} \cdot \frac{\alpha_2}{\beta_2 + (p-2)} \cdot \frac{\alpha_3}{\beta_3 + p}, \quad (2.7)$$

а в случае параллельного соединения:

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p) + W_3(p) = \frac{\alpha_1}{\beta_1 + (p-1)^2} + \frac{\alpha_2}{\beta_2 + (p-2)} + \frac{\alpha_3}{\beta_3 + p}. \quad (2.8)$$

Видно, что передаточная функция регулятора $\tilde{W}(p)$ удовлетворяет условиям (2.5), а $W(p)$ не удовлетворяет.

Причиной этого противоречия является факт передаточной функции $W(p)$, зависящей от одной комплексной переменной $p = x + jy$.

А теперь предположим обратное: $W(p)$ зависит от трех комплексных переменных $p = (p_1, p_2, p_3)$, $p_i = x_i + jy_i$, $i = 1, 2$, т.е. $W(p) = W(p_1, p_2, p_3)$:

$$W_1(p_1) = \frac{\alpha_1}{\beta_1 + (p_1 - 1)^2}, W_2(p_2) = \frac{\alpha_2}{\beta_2 + (p_2 - 2)}, W_3(p_3) = \frac{\alpha_3}{\beta_3 + p_3}.$$

Тогда условия (2.5) можно заменить на следующие [1,2] (в комплексной плоскости):

а) p_1 (p_1 - любое комплексное число, а $p_2 = 0, p_3 = 0$):

$$W(p_1, p_2, p_3)|_{p_1=1} \neq 0, \frac{\partial W(p_1, p_2, p_3)}{\partial p_1} \Big|_{p_1=1} = 0; \quad (2.9)$$

б) p_2 (p_2 - любое комплексное число, а $p_1 = 0, p_3 = 0$):

$$W(p_1, p_2, p_3)|_{p_2=2} \neq 0, \quad (2.10)$$

в) p_3 (p_3 - любое комплексное число, а $p_1 = 0, p_2 = 0$):

$$W(p_1, p_2, p_3)|_{p_3=0} \neq 0. \quad (2.11)$$

Значит, в случае параллельного соединения передаточной функцией регулятора является

$$\begin{aligned} W(p) &= W_1(p_1, p_2, p_3) = W_1(p_1) + W_2(p_2) + W_3(p_3) = \\ &= \frac{\alpha_1}{\beta_1 + (p_1 - 1)^2} + \frac{\alpha_2}{\beta_2 + (p_2 - 2)} + \frac{\alpha_3}{\beta_3 + p_3}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Можно заметить, что функция $W(p)$ из (2.12) уже удовлетворяет условиям (2.9), (2.10) и (2.11) соответственно.

Замечание. При наличии одного нулевого корня в спектре (1.2) и когда $Re \mu < 0, Re \lambda_i < 0$ ($i = \overline{1, n_1}$), то система (1.3) устойчива, но асимптотической устойчивости нет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Маркушевич А.И.** Краткий курс теории аналитических функций. –М.: Наука, 1966. –387 с.
2. **Ганнинг Р., Росси Х.** Аналитические функции многих комплексных переменных. –М.: Мир, 1969. – 395 с.
3. **Шилов Г.Е.** Математический анализ. Специальный курс. –М.: Наука, 1961. – 433 с.
4. **Григорян Ф.П.** О построении управления с желаемым спектром в САР //Изд. АН Армении. Механика. – 2003. – Т. 56, N 2. – С. 59-69.
5. **Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э.** Функции комплексного переменного, операционное исчисление, теория устойчивости. –М.: Наука, 1968. – 415 с.
6. **Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г.** Методы теории автоматического управления. –М.: Наука, 1971. – 743 с.
7. **Пономарев В.М.** Теория управления движением космических аппаратов. –М.: Наука, 1965. – 455 с.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 15.04.2018.

Ֆ.Պ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ՇԱՏ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՓՈԽԱՆՑՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ: I

Նախօրոք տրված սպեկտրներով կառավարման սինթեզի խնդիրներում երբեմն անհրաժեշտ է լինում կարգավորիչի փոխանցման ֆունկցիան պատկերացնել որպես շատ կոմպլեքս փոփոխականների անալիտիկ ֆունկցիա:

Առանցքային բառեր. կառավարման սինթեզի խնդիրներ, կոմպլեքս շատ փոփոխականների փոխանցման անալիտիկ ֆունկցիաներ, կառավարելի ստացիոնար համակարգեր:

F.P. GRIGORYAN

TRANSMITTING FUNCTIONS OF MANY COMPLEX VARIABLES. I

The transmitting functions of many complex variables are studied. It is shown that in the control synthesis problems with a prescribed range of times, the transfer function of the regulator should be submitted as an analytic function of several complex variables.

Keywords: transmission analytical functions of many complex variables, stationary controlled systems.