УДК 621.52+511.52

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

С.О. СИМОНЯН, М.А. АДАМЯН

СОПРЯЖЕННЫЕ АНАЛОГИ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ КОНЕЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предложены аналитический, а также численно-аналитические прямой и декомпозиционный сопряженные аналоги метода наименьших квадратов для решения линейных однопараметрических систем конечных уравнений. Рассмотрено решение одного модельного примера – некорректной задачи предложенными численно-аналитическими методами.

Ключевые слова: линейные однопараметрические системы конечных уравнений (ЛОСКУ), метод наименьших квадратов, сопряженные аналоги метода наименьших квадратов, модельный пример.

Введение. На основе дифференциально-тейлоровских преобразований [1] и матрично-векторных представлений в работе [2] предложен метод решения ЛОСКУ. Полученные в [2] научно-практические результаты были перепечатаны в [3]. В работе [4] проведен сравнительный анализ ряда методов решения ЛОСКУ – методов замороженных коэффициентов (МЗК), метода приравнивания коэффициентов (МПК), дифференциально-тейлоровской матрично-векторной модели (ДТ-МВМ) и предложенной в ней дифференциально-падеевской матрично-векторной модели (ДП-МВМ). В [5] предложены конструктивные декомпозиционные аналитические матрично-блочные методы определения решений некорректных ЛОСКУ с комплексными матрицами, в [6] - численно-аналитические декомпозиционные методы решения некорректных ЛОСКУ с комплексными матрицами. Разработке конструктивных декомпозиционных аналитических и численно-аналитических матрично-векторных методов решения ЛОСКУ с комплексными матрицами посвящена работа [7]. Работа [8] посвящена разработке спектрального, декомпозиционных аналитического и численно-аналитического методов решения ЛОСКУ. В настоящей работе предлагаются сопряженные аналоги метода наименьших квадратов для решения ЛОСКУ.

Аналитическое решение. Пусть задана линейная однопараметрическая система конечных уравнений

$$\underset{m\times n}{A(t)}\cdot\underset{n\times 1}{X(t)}=\underset{m\times 1}{a(t)} \tag{1}$$

с достаточно гладкими элементами матрицы системы $A(t)$, свободного члена $a(t)$ и неизвестного вектора $X(t)$, подлежащего определению.

Применение метода наименьших квадратов [1]

$$(\varepsilon^T(t),\, \varepsilon(t)) = (A(t)\cdot X(t) - a(t))^T \cdot (A(t)\cdot X(t) - a(t)) \to \min_{X(t)} \tag{2}$$

для решения системы (1) приводит к эквивалентной ей задаче

$$A^T(t)\cdot A(t)\cdot X(t) = A^T(t)\cdot a(t) \tag{3}$$

(что, очевидно, следует и из (1)) с дальнейшими представлениями

$$X(t) = A^+(t)\cdot a(t) \tag{4}$$

при некорректных задачах (1) ($m \neq n$) и

$$X(t) = A^{-1}(t)\cdot a(t) \tag{5}$$

при корректных задачах (1) (m=n), где $A^+(t)$ - обобщенная обратная к $A(t)$ матрица, а $A^{-1}(t)$ - обычная обратная матрица.

Теперь, как наиболее общий случай, по аналогии с (3), рассмотрим представление

$$\underset{n\times m}{A^*(t)}\cdot\underset{m\times n}{A\ (t)}\cdot\underset{n\times 1}{X(t)} = \underset{n\times m}{A^*(t)}\cdot\underset{m\times 1}{a(t)} \Leftrightarrow \underset{n\times n}{B(t)}\cdot\underset{n\times 1}{X(t)} = \underset{n\times 1}{b(t)}, \tag{6}$$

где $A^*(t)$ - сопряженная к $A(t)$ матрица. Отсюда, естественно, следует (прямой подход), что

$$X(t) = B^{-1}(t)\cdot b(t)\,. \tag{7}$$

Теперь (декомпозиционный подход), допустив, что $A(t)$, $A^*(t)$, $a(t)$ и $X(t)$ обладают комплексными элементами, т.е.

$$A(t) = A_1(t) + j\cdot A_2(t), \tag{8}$$

$$A^*(t) = [A_1(t) + j\cdot A_2(t)]^* = A_1^T(t) - j\cdot A_2^T(t)\,, \tag{9}$$

$$a(t) = a_1(t) + j\cdot a_2(t), \tag{10}$$

$$X(t) = X_1(t) + j \cdot X_2(t), \tag{11}$$

из (6) получим

$$\begin{aligned} & A_1^T(t) \cdot A_1(t) \cdot X_1(t) + A_2^T(t) \cdot A_2(t) \cdot X_1(t) - A_1^T(t) \cdot A_2(t) \cdot X_2(t) + \\ & + A_2^T(t) \cdot A_1(t) \cdot X_2(t) + j \cdot (A_1^T(t) \cdot A_1(t) \cdot X_2(t) + A_2^T(t) \cdot A_2(t) \cdot X_2(t) + \\ & + A_1^T(t) \cdot A_2(t) \cdot X_1(t) - A_2^T(t) \cdot A_1(t) \cdot X_1(t)) = A_1^T(t) \cdot a_1(t) + \\ & + A_2^T(t) \cdot a_2(t) + j \cdot (A_1^T(t) \cdot a_2(t) - A_2^T(t) \cdot a_1(t)). \end{aligned} \tag{12}$$

Сопоставление действительной и мнимой частей последнего соотношения приводит к следующей системе второго порядка с неизвестными векторами–столбцами $X_1(t)$ и $X_2(t)$ с размерами $n \times 1$:

$$\begin{cases} A_1^T(t) \cdot A_1(t) \cdot X_1(t) + A_2^T(t) \cdot A_2(t) \cdot X_1(t) - A_1^T(t) \cdot A_2(t) \cdot X_2(t) + \\ + A_2^T(t) \cdot A_1(t) \cdot X_2(t) = A_1^T(t) \cdot a_1(t) + A_2^T(t) \cdot a_2(t), & (13) \\ A_1^T(t) \cdot A_1(t) \cdot X_2(t) + A_2^T(t) \cdot A_2(t) \cdot X_2(t) + A_1^T(t) \cdot A_2(t) \cdot X_1(t) - \\ - A_2^T(t) \cdot A_1(t) \cdot X_1(t) = A_1^T(t) \cdot a_2(t) - A_2^T(t) \cdot a_1(t). & (14) \end{cases}$$

Эту систему можно представить в следующем матрично-векторном виде:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c|c} A_1^T(t) \cdot A_1(t) + A_2^T(t) \cdot A_2(t) & -A_1^T(t) \cdot A_2(t) + A_2^T(t) \cdot A_1(t) \\ \hline A_1^T(t) \cdot A_2(t) - A_2^T(t) \cdot A_1(t) & A_1^T(t) \cdot A_1(t) + A_2^T(t) \cdot A_2(t) \end{array}\right] \cdot \left(\begin{array}{c} X_1(t) \\ \hline X_2(t) \end{array}\right) = \\ & = \begin{bmatrix} A_1^T(t) & A_2^T(t) \\ -A_2^T(t) & A_1^T(t) \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c} a_1(t) \\ \hline a_2(t) \end{array}\right), \end{aligned} \tag{15}$$

или в более компактной записи:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_1^T(t) & A_2^T(t) \\ -A_2^T(t) & A_1^T(t) \end{bmatrix}}_{2n \times 2m} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} A_1(t) & -A_2(t) \\ A_2(t) & A_1(t) \end{bmatrix}}_{2m \times 2n} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{c} X_1(t) \\ \hline X_2(t) \end{array}\right)}_{2n \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1^T(t) & A_2^T(t) \\ -A_2^T(t) & A_1^T(t) \end{bmatrix}}_{2n \times 2m} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{c} a_1(t) \\ \hline a_2(t) \end{array}\right)}_{2m \times 1}. \tag{16}$$

Таким образом, в общем случае некорректная система (1) ($m \neq n$), обладающая наилучшим, однако приближенным решением (4), обусловленная использованием обобщенной обратной матрицы $A^+(t)$, в результате цепочки эквивалентных преобразований (6), (12)-(15) с учетом соотношений (8)-(11) сведена к корректной системе (16) с квадратной матрицей порядка 2*n*, обладающей решением

$$\left(\frac{X_1(t)}{X_2(t)}\right)=\left[\begin{bmatrix} A_1^T(t) & A_2^T(t) \\ -A_2^T(t) & A_1^T(t)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} A_1(t) & -A_2(t) \\ A_2(t)) & A_1(t)\end{bmatrix}\right]^{-1}\cdot\begin{bmatrix} A_1^T(t) & A_2^T(t) \\ -A_2^T(t) & A_1^T(t)\end{bmatrix}\cdot\left(\frac{a_1(t)}{a_2(t)}\right). \quad (17)$$

Далее обозначим

$$\begin{bmatrix} A_1(t) & -A_2(t) \\ A_2(t) & A_1(t)\end{bmatrix}=\underset{\sim}{A}(t),\ \left(\frac{X_1(t)}{X_2(t)}\right)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t)\end{pmatrix}=\underset{\sim}{X}(t),\ \left(\frac{a_1(t)}{a_2(t)}\right)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) \\ \vdots \\ a_{m1}(t) \\ a_{12}(t) \\ \vdots \\ a_{m2}(t)\end{pmatrix}=\underset{\sim}{a}(t), \quad (18)$$

при которых уравнение (16) приобретает вид

$$\underset{2n\times 2m}{\underset{\sim}{A}^T(t)}\cdot\underset{2m\times 2n}{\underset{\sim}{A}(t)}\cdot\underset{2n\times 1}{\underset{\sim}{X}(t)}=\underset{2n\times 2m}{\underset{\sim}{A}^T(t)}\cdot\underset{2m\times 1}{\underset{\sim}{a}(t)}\Leftrightarrow\underset{2n\times 2n}{B(t)}\cdot\underset{2n\times 1}{X(t)}=\underset{2n\times 1}{b(t)}, \quad (19)$$

а уравнение (17):

$$\underset{\sim}{X}(t)=[\underset{\sim}{A}^T(t)\cdot\underset{\sim}{A}(t)]^{-1}\cdot\underset{\sim}{A}^T(t)\cdot\underset{\sim}{a}(t)=\underset{\sim}{A}^+(t)\cdot\underset{\sim}{a}(t), \quad (20)$$

где $\underset{\sim}{A}^+(t)$ – обобщенная обратная к $\underset{\sim}{A}(t)$ матрица.

Замечание 1. Матрицы $\underset{\sim}{A}(t)$, $\underset{\sim}{A}^T(t)$, $[\underset{\sim}{A}^T(t)\cdot\underset{\sim}{A}(t)]$ и $[\underset{\sim}{A}^T(t)\cdot\underset{\sim}{A}(t)]^{-1}$ блочно-кососимметричны относительно первых главных диагоналей и блочно-симметричны относительно вторых главных диагоналей.

Численно-аналитическое решение (прямой подход). Теперь, допустив, что имеют место дифференциальные преобразования

$$B(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K B(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}\ \risingdotseq\ B(t)=\chi_1(t,t_\nu,H,B(K),\ K=\overline{0,\infty}), \quad (21)$$

$$b(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K b(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}\ \risingdotseq\ b(t)=\chi_2(t,t_\nu,H,b(K),\ K=\overline{0,\infty}), \quad (22)$$

$$X(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K X(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}\ \risingdotseq\ X(t)=\chi_3(t,t_\nu,H,X(K),\ K=\overline{0,\infty}), \quad (23)$$

систему (6) из области оригиналов переведем в область дифференциальных преобразований. При этом будем иметь представление

$$\sum_{\ell=0}^{K} B(k-\ell)\cdot X(\ell) = b(K)\,, \tag{24}$$

откуда

<u>при *K*=0</u>:

$$B(0)\cdot X(0) = b(0)\,, \tag{25}$$

следовательно,

$$X(0) = B^{-1}(0)\cdot b(0)\,; \tag{26}$$

<u>при *K*=1</u>:

$$B(1)\cdot X(0) + B(0)\cdot X(1) = b(1)\,, \tag{27}$$

следовательно,

$$X(1) = B^{-1}(0)\cdot (b(1) - B(1)\cdot X(0)); \tag{28}$$

<u>при *K*=2</u>:

$$B(2)\cdot X(0) + B(1)\cdot X(1) + B(0)\cdot X(2) = b(2)\,, \tag{29}$$

следовательно,

$$X(2) = B^{-1}(0)\cdot (b(2) - B(2)\cdot X(0) - B(1)\cdot X(1)); \tag{30}$$

...

<u>при *K*=*K*</u>:

$$\sum_{\ell=0}^{K-1} B(k-\ell)\cdot X(\ell) + B(0)\cdot X(K) = b(K), \tag{31}$$

следовательно,

$$\underset{n\times 1}{X(K)} = \underset{n\times n}{B^{-1}(0)}\cdot(\underset{n\times 1}{b(K)} - \sum_{\ell=0}^{K-1} \underset{n\times n}{B(k-\ell)}\cdot \underset{n\times 1}{X(\ell)}). \tag{32}$$

Таким образом, имея векторные дискреты (26), (28), (30),...,(31), в соответствии с (23) можно восстановить решение $X(t)$.

Замечание 2. Соотношение (24) повторяет соотноошение (9) работы [8] с точностью до $\underset{\sim}{B}(K)$, $\underset{\sim}{B}^{T}(K)$, $\underset{\sim}{b}(K)$ вместо $A(K)$, $A^{T}(K)$, $a\,(K)$.

Численно-аналитическое решение (декомпозиционный подход). Теперь, допустив, что имеют место дифференциальные преобразования

$$\underset{\sim}{A}(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K \underset{\sim}{A}(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_\nu}, \quad K = \overline{0,\infty} \doteqdot \underset{\sim}{A}(t) = \chi_1(t, t_\nu, H, \underset{\sim}{A}(K), \; K = \overline{0,\infty} \;), \tag{33}$$

$$\underset{\sim}{a}(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K \underset{\sim}{a}(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_\nu}, \quad K = \overline{0,\infty} \doteqdot \underset{\sim}{a}(t) = \chi_2(t, t_\nu, H, \underset{\sim}{a}(K), \; K = \overline{0,\infty} \;), \tag{34}$$

$$\underset{\sim}{X}(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K \underset{\sim}{X}(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_\nu}, \quad K = \overline{0,\infty} \doteqdot \underset{\sim}{X}(t) = \chi_3(t, t_\nu, H, \underset{\sim}{X}(K), \; K = \overline{0,\infty}), \tag{35}$$

систему (19) из области оригиналов переведем в область дифференциальных изображений. При этом будем иметь представление

$$\sum_{\ell=0}^{K} \underset{\sim}{A}^T(K-\ell) \cdot \sum_{p=0}^{\ell} \underset{\sim}{A}(p) \cdot \underset{\sim}{X}(\ell - p) = \sum_{\ell=0}^{K} \underset{\sim}{A}^T(\ell) \cdot \underset{\sim}{a}(K-\ell), \tag{36}$$

откуда

__при *K*=0__:

$$\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(0) \cdot \underset{\sim}{A}(0) \cdot \underset{\sim}{X}(0) = \underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(0) \cdot \underset{\sim}{a}(0), \tag{37}$$

следовательно,

$$\underset{\sim}{X}(0) = [\underset{\sim}{A}^T(0) \cdot \underset{\sim}{A}(0)]^{-1} \cdot \underset{\sim}{A}^T(0) \cdot \underset{\sim}{a}(0) = \underset{\sim}{A}^{+}(0) \cdot \underset{\sim}{a}(0), \tag{38}$$

где $\underset{\sim}{A}^{+}(0)$ - псевдообратная к $\underset{\sim}{A}(0)$ матрица;

__при *K*=1__:

$$\begin{aligned} &\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(1) \cdot \underset{\sim}{A}(0) \cdot \underset{\sim}{X}(0) + \underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(0) \cdot \underset{\sim}{A}(1) \cdot \underset{\sim}{X}(0)) + \underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(0) \cdot \underset{\sim}{A}(0) \cdot \underset{\sim}{X}(1) = \\ &= \underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(1) \cdot \underset{\sim}{a}(0) + \underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(0) \cdot \underset{\sim}{a}(1), \end{aligned} \tag{39}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} &\underset{\sim}{X}(1) = [\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(0) \cdot \underset{\sim}{A}(0)]^{-1} \cdot (\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(1) \cdot \underset{\sim}{a}(0) + \underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(0) \cdot \underset{\sim}{a}(1) - \\ &- \underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(1) \cdot \underset{\sim}{A}(0) \cdot \underset{\sim}{X}(0) - \underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(0) \cdot \underset{\sim}{A}(1) \cdot \underset{\sim}{X}(0)); \end{aligned} \tag{40}$$

при *K*=2:

$$\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(2)\cdot\underset{\sim}{A}(0)\cdot\underset{\sim}{X}(0)+\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(1)\cdot\underset{\sim}{A}(1)\cdot\underset{\sim}{X}(0)+\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(1)\cdot\underset{\sim}{A}(0)\cdot\underset{\sim}{X}(1)+$$
$$+\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(0)\cdot\underset{\sim}{A}(2)\cdot\underset{\sim}{X}(0)+\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(0)\cdot\underset{\sim}{A}(1)\cdot\underset{\sim}{X}(1)+\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(0)\cdot\underset{\sim}{A}(0)\cdot\underset{\sim}{X}(2)= \quad (41)$$
$$=\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(2)\cdot\underset{\sim}{a}(0)+\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(1)\cdot\underset{\sim}{a}(1)+\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(0)\cdot\underset{\sim}{a}(2),$$

следовательно,

$$\underset{\sim}{X}(2)=[\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(0)\cdot\underset{\sim}{A}(1)]^{-1}\cdot(\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(2)\cdot\underset{\sim}{a}(0)+\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(1)\cdot\underset{\sim}{a}(1)+\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(0)\cdot\underset{\sim}{a}(2)-$$
$$-\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(2)\cdot\underset{\sim}{A}(0)\cdot\underset{\sim}{X}(0)-\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(1)\cdot\underset{\sim}{A}(1)\cdot\underset{\sim}{X}(0)-\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(1)\cdot\underset{\sim}{A}(0)\cdot\underset{\sim}{X}(1)- \quad (42)$$
$$-\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(0)\cdot\underset{\sim}{A}(2)\cdot\underset{\sim}{X}(0)-\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(0)\cdot\underset{\sim}{A}(1)\cdot\underset{\sim}{X}(1));$$

при *K*=*K*:

$$\sum_{\ell=0}^{K}\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(K-\ell)\sum_{p=0}^{\ell}\underset{\sim}{A}(p)\cdot\underset{\sim}{X}(\ell-p))+\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(0)\cdot\underset{\sim}{A}(0)\cdot\underset{\sim}{X}(K)=$$
$$\ell-p=\overline{0,\ K-1}. \quad (43)$$
$$=\sum_{\ell=0}^{K}\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}(\ell)\cdot\underset{\sim}{a}(K-\ell),$$

следовательно,

$$\underset{\substack{\sim\\2n\times1}}{X}(K)=[\underset{\substack{\sim\\2n\times2n}}{A^{\mathrm{T}}}(0)\cdot\underset{\sim}{A}(0)]^{-1}\cdot(\sum_{\ell=0}^{K}\underset{\substack{\sim\\2n\times2m}}{A^{\mathrm{T}}}(\ell)\cdot\underset{\substack{\sim\\2m\times1}}{a}(K-\ell)-$$
$$-\sum_{\ell=0}^{K}\underset{\substack{\sim\\2n\times2m}}{A^{\mathrm{T}}}(K-\ell)\sum_{p=0}^{\ell}\underset{\substack{\sim\\2m\times2n}}{A}(p)\cdot\underset{\substack{\sim\\2n\times1}}{X}(\ell-p)). \quad (44)$$
$$\ell-p=\overline{0,\ K-1}.$$

Таким образом, имея векторные дискреты (38), (40), (42), ..., (44), в соответствии с (35) можно восстановить решение $\underset{\sim}{X}(t)$.

Замечание 3. Соотношения (36), (38), (40), (42), ..., (44) повторяют соотношения (9) - (13) работы [8] с точностью до $\underset{\sim}{A}^{T}(K),\underset{\sim}{A}(K),\underset{\sim}{X}(K),\underset{\sim}{a}(K),\ K=\overline{0,\infty}$ вместо $A^{T}(K),\ A(K),\ X(K),\ \ a(K),\ \ K=\overline{0,\infty}$.

Замечание 4. Матрицы $\underset{\sim}{A}(K),\ \underset{\sim}{A}^T(\ell),\ [\underset{\sim}{A}^T(\ell)\cdot\underset{\sim}{A}(p)],\quad [\underset{\sim}{A}^T(\ell)\cdot\underset{\sim}{A}(p)]^{-1}$, $\ell+p=K,\ \forall\ell=\overline{0,K},\forall p=\overline{0,K},\quad \forall K=\overline{0,\infty}$ блочно-кососимметричны относительно первых главных диагоналей и блочно-симметричны относительно вторых главных диагоналей.

Модельный пример. Пусть задана некорректная (переопределенная) ЛОСКУ

$$\begin{bmatrix} (t-1-j) & 0 \\ t^2 & (t+1+jt) \\ (-t+j) & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (t^2-2j) \\ (t^3-jt-j) \\ (-t^2-t-1+j) \end{pmatrix}$$

с неизвестным вектором $X(t)=(x_1(t),\ x_2(t))^T$.

1. Рассмотрим решение этой задачи сопряженным аналогом метода наименьших квадратов (прямым подходом).

Умножив обе части заданной некорректной системы уравнений на сопряженную матрицу

$$A^*(t)=\begin{bmatrix} (t-1+j) & t^2 & (-t-j) \\ 0 & (t+1-jt) & 0 \end{bmatrix},$$

в соответствии с (6) получим следующую эквивалентную корректную систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} (t^4+2t^2-2t+3) & (t^3+t^2+jt^3) \\ (t^3+t^2-jt^3) & (2t^2+2t+1) \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} (t^5+2t^3+t+3-jt^3+jt^2-2jt+3j) \\ (t^4+t^3-t^2-t-jt^4-jt^2-2jt-j) \end{pmatrix}.$$

Тогда при $t_\nu=0,\ H=1$ будем иметь следующие матричные и векторные дискреты:

$$B(0)=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B(1)=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ \ B(2)=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ B(3)=\begin{bmatrix} 0 & (1+j) \\ (1-j) & 0 \end{bmatrix},...,$$
$$b(0)=\begin{pmatrix} (3+3j) \\ -j \end{pmatrix},\ \ b(1)=\begin{pmatrix} (1-2j) \\ (-1-2j) \end{pmatrix},\ b(2)=\begin{pmatrix} j \\ (-1-j) \end{pmatrix},\ b(3)=\begin{pmatrix} (2-j) \\ 1 \end{pmatrix},,...,$$

а также

$$B^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Далее имеем:

<u>при *K*=0</u> согласно (26):

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (3+3j) \\ -j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+j) \\ -j \end{pmatrix};$$

<u>при *K*=1</u> согласно (28):

$$X(1) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{pmatrix} (1-2j) \\ (-1-2j) \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1+j) \\ -j \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

<u>при *K*=2</u> согласно (30):

$$X(2) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} j \\ (1+j) \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1+j) \\ -j \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

<u>при *K*=3</u> согласно (32):

$$X(3) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} (2-j) \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & (1+j) \\ (1-j & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1+j) \\ -j \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \cancelto{0}{\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-j+j-1-1 \\ 1-2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и т.д. Таким образом, маклореновское решение задачи имеет вид

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+j \\ -j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t^2 + \ldots = \begin{pmatrix} (t+1+j) \\ (-t-j) \end{pmatrix}.$$

2. Теперь рассмотрим решение этой задачи декомпозиционным сопряженным аналогом метода наименьших квадратов. Имеем

$$A_1(0)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ A_1(1)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\ A_1(2)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ A_1(K)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \forall K\ge 3,$$

$$A_2(0)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ A_2(1)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ A_2(K)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \ \forall K\ge 2;$$

$$a_1(0)=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\ a_1(1)=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\ a_1(2)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\ a_1(3)=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, a_1(K)=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \forall K\ge 4,$$

$$a_2(0)=\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 1\end{pmatrix},\ a_2(1)=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\end{pmatrix},\ a_2(K)=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \forall K\ge 2,$$

а также

$$\underset{\sim}{A}(0)=\left[\begin{array}{cc:cc}-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ \hdashline -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right],\quad \underset{\sim}{A}^T(0)=\left[\begin{array}{ccc:ccc}-1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right],$$

$$\underset{\sim}{A}^T(0)\cdot\underset{\sim}{A}(0)=\left[\begin{array}{cc:cc}3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right],\quad [\underset{\sim}{A}^T(0)\cdot A(0)]^{-1}=\left[\begin{array}{cc:cc}1/3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right],$$

$$\underset{\sim}{A}^T(0)\cdot\underset{\sim}{a}(0)=\left(\begin{array}{c}3\\ 0\\ \hdashline 3\\ -1\end{array}\right).$$

Далее получим:

при *K*=0 согласно (38):

$$\underset{\sim}{X}(0)=\begin{pmatrix} X_{11}(0)\\ X_{21}(0)\\ \hdashline X_{12}(0)\\ X_{22}(0)\end{pmatrix}=\left[\begin{array}{cc:cc} 1/3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\cdot\begin{pmatrix} 3\\ 0\\ \hline 3\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ \hline 1\\ -1\end{pmatrix},$$

следовательно,

$$\begin{pmatrix} X_{11}(0)\\ X_{21}(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} X_{12}(0)\\ X_{22}(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix};$$

при *K*=1 согласно (40):

$$\underset{\sim}{X}(1)=\begin{pmatrix} X_{11}(1)\\ X_{21}(1)\\ \hdashline X_{12}(1)\\ X_{22}(1)\end{pmatrix}=\left[\begin{array}{cc:cc} 1/3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\cdot\left(\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ \hdashline -3\\ -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \hdashline 1\\ -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ \hdashline -3\\ 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3\\ 1\\ \hdashline 1\\ -1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ \hdashline 0\\ 0\end{pmatrix},$$

следовательно,

$$\begin{pmatrix} X_{11}(1)\\ X_{21}(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} X_{12}(1)\\ X_{22}(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix};$$

при *K*=2 согласно (42):

$$\underset{\sim}{X}(2)=\begin{pmatrix} X_{11}(2)\\ X_{21}(2)\\ \hdashline X_{12}(2)\\ X_{22}(2)\end{pmatrix}=\left[\begin{array}{cc:cc} 1/3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\cdot\left(\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \hdashline -1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ \hdashline 0\\ -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ \hdashline 2\\ 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \hdashline -1\\ 0\end{pmatrix}-\right.$$

$$\left.-\begin{pmatrix} 2\\ 0\\ \hdashline 2\\ -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1\\ -1\\ \hdashline -2\\ 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ \hdashline 0\\ 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1\\ -1\\ \hdashline 2\\ -1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \hdashline 0\\ 0\end{pmatrix},$$

следовательно,

$$\begin{pmatrix} X_{11}(2) \\ X_{21}(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} X_{12}(2) \\ X_{22}(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

и т.д. Таким образом, имеем следующее маклореновское решение:

$$X(t) = X(0) + X(1) \cdot t + ... = \begin{pmatrix} X_{11}(0) + j \cdot X_{12}(0) \\ X_{21}(0) + j \cdot X_{22}(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{11}(1) + j \cdot X_{12}(1) \\ X_{21}(1) + j \cdot X_{22}(1) \end{pmatrix} \cdot t + ... =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + j \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + j \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot t = \begin{pmatrix} (1 + j + t) \\ (-j - t) \end{pmatrix},$$

что точно совпадает с полученным выше решением при применении прямого подхода.

Заключение. Решение задачи в виде (4) или (5), связанное с достаточно труднореализуемой вычислительной процедурой по определению матриц $A^{+}(t)$ или $A^{-1}(t)$, при предложенных численно-аналитических методах полностью исключается и фактически сводится к рекуррентным численным вычислительным процедурам по определению матричных дискретов $X(K)$, $K = \overline{0, \infty}$ неизвестного вектора $X(t)$ и восстановлению его обратными дифференциальными преобразованиями. При реализации этих процедур, очевидно, должны быть использованы широкие возможности современных информационных технологий [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пухов Г.Е**. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. - Киев: Наукова думка, 1984.- 420 с.
2. **Симонян С.О., Аветисян А.Г.** Способ решения систем линейных неавтономных уравнений на базе дифференциально-тейлоровских преобразований // Электронное моделирование. – 1998. - Т. 19, № 4. – С. 19-25.
3. **Simonyan S.H., Avetisyan A.G.** The Method Linear Non-Autonomus Finit Equation Set Solution on the Basis of Differential-Taylor Transform // Engineering Simulation. – 1998. – Vol.15, № 2. – P. 407-421.
4. **Симонян С.О., Аветисян А.Г., Асланян Л.М.** Дифференциально-падеевская матрично-векторная модель решения систем линейных неавтономных уравнений // Моделирование, оптимизация, управление: Сб. научн. тр. ГИУА. – Ереван, 1998. – Вып. 1. – С.65-71.
5. **Симонян С.О., Адамян М.А.** Аналитические декомпозиционные методы решения линейных однопараметрических некорректных систем конечных уравнений с комплексными матрицами (I) // Вестник ГИУА. Серия “Информационные технологии, электроника, радиотехника”. – 2014. - Вып. 17, № 2.- С. 9-14.

6. **Симонян С.О., Адамян М.А.** Численно-аналитические декомпозиционные методы решения линейных однопараметрических некорректных систем конечных уравнений с комплексными матрицами (II) // Вестник ГИУА. Серия “Информационные технологии, электроника, радиотехника”. – 2014. - Вып. 17, № 2.- С. 15-21.
7. **Симонян С.О., Адамян М.А.** Декомпозиционные методы решения линейных однопараметрических корректных систем конечных уравнений с комплексными матрицами // Известия НАН РА и НПУА. Серия ТН. – 2015. – Т. LXVIII, №1. – С.61-72.
8. **Симонян С.О., Адамян М.А.** К некоторым методам решения линейных однопараметрических систем конечных уравнений // Известия НАН РА и НПУА. Серия ТН. – 2015. – Т. LXVIII, №2. – С.225-237.
9. **Straustrup B.** The C^{++} Programming Language. - 4th Edition. - Boston: Addison – Wesleg Professional, 2013. – 1368 p.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 12.09.2018.

Ս.Հ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Մ.Ա. ԱԴԱՄՅԱՆ

ԳԾԱՅԻՆ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՆՎԱԶԱԳՈՒՅՆ ՔԱՌԱԿՈՒՍԻՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԻ ՀԱՄԱԼՈՒԾ ՆՄԱՆԱԿԸ

Առաջարկվել են գծային միապարամետրական վերջավոր հավասարումների համակարգերի լուծման համար նվազագույն քառակուսիների մեթոդի անալիտիկ, ինչպես նաև դեկոմպոզիցիոն թվա-անալիտիկ համալուծ նմանակները: Դիտարկվել է մեկ մոդելային օրինակի՝ ոչ կոռեկտ խնդրի լուծումը՝ առաջարկված թվա-անալիտիկ մեթոդներով:

Առանցքային բառեր. գծային միապարամետրական վերջավոր հավասարումների համակարգեր, նվազագույն քառակուսիների մեթոդ, նվազագույն քառակուսիների մեթոդի համալուծ նմանակներ, մոդելային օրինակ:

S.H. SIMONYAN, M.A. ADAMYAN

SUBJECTIVE ANALOGUES OF THE METHOD OF THE MINIMAL QUADRATIC SOLUTION OF LINEAR ONE-PARAMETRIC SYSTEMS OF FINITE EQUATIONS

Analytical, as well as numerical-analytical direct and decompositional equivalents of the method for the solution of linear quadratic systems of single-parameter systems of finite eqations are proposed. The solution of one model – the incorrect task proposed by the numerical-analytical methods is considered.

Keywords: linear single-parameter systems of finite equations, method of minimal squares, similar methods of minimal squares, model.