

С.О. СИМОНЯН

О НЕОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ
ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ТРАНСПОНИРОВАННЫХ
АНАЛОГОВ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СИЛЬВЕСТРА

$$A(t) \cdot X(t) + X^T(t) \cdot B(t) = C(t)$$

(Прямой подход)

Исследуются вопросы неоднозначной разрешимости однопараметрических транспонированных аналогов матричных уравнений типа Сильвестра. Предлагаются аналитический, а также последовательный и параллельный численно-аналитические методы решения. Для численно-аналитических методов основным математическим аппаратом служат дифференциальные преобразования. При всех методах получены соответствующие условия неоднозначной разрешимости задачи. Рассмотрен модельный пример, для решения которого использованы численно-аналитические методы, и получен ряд точных дифференциально-тейлоровских решений. Предложенные численно-аналитические методы могут быть эффективно реализованы средствами современных информационных технологий.

Ключевые слова: однопараметрический транспонированный аналог матричного уравнения типа Сильвестра, редукция, аналитическое решение, дифференциальные преобразования, последовательная и параллельная численные процедуры, условия неоднозначной разрешимости, непрерывные решения непрерывной задачи, модельный пример, средства современных информационных технологий.

Введение. В работе [1] при однозначной разрешимости задач предложены методы решения однопараметрических транспонированных аналогов матричных уравнений типа Сильвестра

$$A(t) \cdot X(t) + X^T(t) \cdot B(t) = C(t), \quad (1)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $X(t)$ – однопараметрические матрицы одного и того же порядка m , причем $X(t)$ – подлежащая определению неизвестная матрица. На основе несложных эквивалентных преобразований (редукции (1)) здесь же получено представление

$$A(t) \cdot X(t) \cdot B^{-1}(t) - B^T(t) \cdot X(t) \cdot A^{-T}(t) = C(t) \cdot B^{-1}(t) - C^T(t) \cdot A^{-T}(t) = D_1(t)_{m \times m}, \quad (2)$$

достаточно сложное по сравнению с (1), однако, в отличие от (1), содержащее лишь только неизвестную матрицу $X(t)_{m \times m}$. Далее, применив аппарат кроневых произведений матриц [2], получена линейная по отношению к $\hat{X}(t)_{m^2 \times 1}$ гиперматрично-гипервекторная система уравнений

$$[A(t) \otimes B^{-T}(t) - B^T(t) \otimes A^{-1}(t)]_{m^2 \times m^2} \cdot \hat{X}(t)_{m^2 \times 1} = D(t) \cdot \hat{X}(t) = \hat{D}_1(t)_{m^2 \times 1}, \quad (3)$$

имеющая аналитическое решение

$$\hat{X}(t) = [A(t) \otimes B^{-T}(t) - B^T(t) \otimes A^{-1}(t)]^{-1} \cdot \hat{D}_1(t) = D^{-1}(t) \cdot \hat{D}_1(t) \quad (4)$$

при одновременном выполнении условий регулярности

$$\det A(t) \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}(t), \quad \forall t, \quad (5)$$

$$\det B(t) \neq 0 \Leftrightarrow \exists B^{-1}(t), \quad \forall t \quad (6)$$

и условия гиперрегулярности

$$\det D(t) \neq 0 \Leftrightarrow \exists D^{-1}(t), \quad \forall t, \quad (7)$$

т.е. при выполнении условий однозначной разрешимости (5)-(7) задачи (1).

Замечание 1. Отметим, что в общем случае для вычисления обратных матриц $A^{-1}(t)$, $B^{-1}(t)$ и $D^{-1}(t)$ могут быть использованы численно-аналитические методы, предложенные в [3].

Математический аппарат. В настоящей работе рассматривается та же исходная задача (1), однако при выполнении условий регулярности (5), (6) и невыполнении условия гиперрегулярности (7), т.е. при условии неоднозначной разрешимости

$$\det D(t) = 0 \Leftrightarrow \nexists D^{-1}(t), \quad \forall t. \quad (8)$$

Естественно, при этом общее аналитическое решение задачи (1) будет иметь вид [4]

$$\hat{X}(t)_{m^2 \times 1} = D^+(t)_{m^2 \times m^2} \cdot \hat{D}_1(t)_{m^2 \times 1} + [E_{m^2 \times m^2} - D^+(t)_{m^2 \times m^2} \cdot D(t)_{m^2 \times m^2}] \cdot W(t)_{m^2 \times 1}, \quad (9)$$

где $D^+(t)$ – однопараметрическая обобщенная обратная гиперматрица порядка m^2 ; E – единичная матрица того же порядка, а $W(t) = (w(t)_1, \dots, w(t)_m)^T$ – произвольный однопараметрический корректирующий гипервектор с размерами $m^2 \times 1$.

Замечание 2. При выполнении условий (5), (6), (8) решение задачи (1) единственное, если, согласно (9), имеет место равенство

$$D^+(t) \cdot D(t) = E_{m^2 \times m^2} \quad (10)$$

при произвольном гипервекторе $W(t)$.

Теперь перейдем к представлению численно-аналитических методов решения рассматриваемой задачи, основанных на дифференциальных преобразованиях [5]. Естественно, что при этом предполагаем, что матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $X(t)$, а также обратные $A^{-1}(t)$ и $B^{-1}(t)$ в центре аппроксимации $t=t_v$ обладают частными производными, для которых имеют место дифференциальные преобразования

$$A(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K A(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \overline{\cdot} \quad A(t) = \chi_1(t, t_v, H, A(K), \quad K = \overline{0, \infty}), \quad (11)$$

$$B(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K B(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \overline{\cdot} \quad B(t) = \chi_2(t, t_v, H, B(K), \quad K = \overline{0, \infty}), \quad (12)$$

$$C(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K C(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \overline{\cdot} \quad C(t) = \chi_3(t, t_v, H, C(K), \quad K = \overline{0, \infty}), \quad (13)$$

$$A^{\overline{-1}}(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K A^{-1}(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \overline{\cdot} \quad A^{-1}(t) = \chi_4(t, t_v, H, A^{\overline{-1}}(K), \quad K = \overline{0, \infty}), \quad (14)$$

$$B^{\overline{-1}}(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K B^{-1}(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \overline{\cdot} \quad B^{-1}(t) = \chi_5(t, t_v, H, B^{\overline{-1}}(K), \quad K = \overline{0, \infty}), \quad (15)$$

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K X(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \overline{\cdot} \quad X(t) = \chi_6(t, t_v, H, X(K), \quad K = \overline{0, \infty}). \quad (16)$$

В соотношениях (11)-(16) матрицы $A(K)$, $B(K)$, $C(K)$, $A^{\overline{-1}}(K)$, $B^{\overline{-1}}(K)$ и $X(K)$ - матричные дискреты матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $A^{-1}(t)$, $B^{-1}(t)$ и $X(t)$ соответственно; $K = \overline{0, \infty}$ - целочисленный аргумент; H - масштабный коэффициент; t_v - центр аппроксимации; символ $\overline{\cdot}$ - знак перехода из области оригиналов в область дифференциальных изображений и наоборот;

$\chi_1(\bullet) \stackrel{\sim}{=} \chi_6(\bullet)$ - некоторые аппроксимирующие функции, восстанавливающие оригиналы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $A^{-1}(t)$, $B^{-1}(t)$ и $X(t)$ соответственно.

Замечание 3. Матрицы $A^{\neg 1}(K)$ и $B^{\neg 1}(K)$ - матричные дискреты обратных матриц $A^{-1}(t)$ и $B^{-1}(t)$, а не обратные матрицы матричных дискретов $A(K)$ и $B(K)$.

1. **Последовательный численно-аналитический метод решения.** С учётом соотношений (11)- (16) и предположения, что имеют место условия

$$\exists A^{\neg 1}(K), \quad \forall K = \overline{0, \infty}, \quad (17)$$

$$\exists B^{\neg 1}(K), \quad \forall K = \overline{0, \infty}, \quad (18)$$

однопараметрическую гиперматрично-гипервекторную линейную систему (3) из области оригиналов переведём в область дифференциальных изображений. Получим:

при $K=0$:

$$\begin{aligned} [A(0) \otimes B^{\neg T}(0) - B^T(0) \otimes A^{\neg 1}(0)] \cdot \hat{X}(0) &= D(0,0) \cdot \hat{X}(0) = \\ &= C(0) \cdot B^{\neg 1}(0) - C^T(0) \cdot A^{\neg 1}(0) = \hat{D}_1(0), \end{aligned} \quad (19)$$

откуда при выполнении условия

$$\det D(0,0) = 0 \Leftrightarrow \text{rang} D(0,0) < m^2 \Leftrightarrow \nexists D^{-1}(0,0) \quad (20)$$

будем иметь

$$\hat{X}(0) = D^+(0,0) \cdot \hat{D}_1(0) + [E - D^+(0,0) \cdot D(0,0)] \cdot W(0), \quad (21)$$

где $D^+(0,0)$ - числовая обобщенная обратная гиперматрица порядка m^2 ; E - единичная матрица того же порядка, а $W(0) = (w(0)_1, \dots, w(0)_{m^2})^T$ - произвольный корректирующий числовой гипервектор с размерами $m^2 \times 1$;

при $K=1$:

$$\begin{aligned}
& [A(0) \otimes B^{\bar{\top}}(0) - B^T(0) \otimes A^{\bar{\top}}(0)] \cdot \hat{X}(1) + [A(1) \otimes B^{\bar{\top}}(0) + \\
& + A(0) \otimes B^{\bar{\top}}(1) - B^T(1) \otimes A^{\bar{\top}}(0) - B^T(0) \otimes A^{\bar{\top}}(1)] \cdot \hat{X}(0) = \\
& = D(0,0) \cdot \hat{X}(1) + D(1,0; 0,1) \cdot \hat{X}(0) = \\
& = C(1) \cdot B^{\bar{\top}}(0) + C(0) \cdot B^{\bar{\top}}(1) - C^T(1) \cdot A^{\bar{\top}}(0) - C^T(0) \cdot A^{\bar{\top}}(1) = \hat{D}_1(1),
\end{aligned} \tag{22}$$

откуда при выполнении условия (20) будем иметь

$$\hat{X}(1) = D^+(0,0) \cdot [\hat{D}_1(1) - D(1,0;0,1) \cdot \hat{X}(0)] + [E - D^+(0,0) \cdot D(0,0)] \cdot W(1), \quad (23)$$

где $W(1) = (w(1)_1, \dots, w(1)_m)^T$ - произвольный числовой гипервектор с размерами $m^2 \times 1$;

при $K=2$:

$$\begin{aligned}
& [A(0) \otimes B^{\neg T}(0) - B^T(0) \otimes A^{\neg V}(0)] \cdot \hat{X}(2) + [A(1) \otimes B^{\neg T}(0) + \\
& + A(0) \otimes B^{\neg T}(1) - B^T(1) \otimes A^{\neg V}(0) - B^T(0) \otimes A^{\neg V}(1)] \cdot \hat{X}(1) + \\
& + [A(2) \otimes B^{\neg T}(0) + A(1) \otimes B^{\neg T}(1) + A(0) \otimes B^{\neg T}(2) - \\
& - B^T(2) \otimes A^{\neg V}(0) - B^T(1) \otimes A^{\neg V}(1) - B^T(0) \otimes A^{\neg V}(2)] \cdot \hat{X}(0) = \\
& = D(0,0) \cdot \hat{X}(2) + D(1,0; 0,1) \cdot \hat{X}(1) + D(2,0; 1,1; 0,2) \cdot \hat{X}(0) = \\
& \quad \underbrace{\hspace{15em}} \\
& = \left[\begin{array}{c} C(2) \cdot B^{\neg V}(0) + C(1) \cdot B^{\neg V}(1) + C(0) \cdot B^{\neg V}(2) - \\ - C^T(2) \cdot A^{\neg T}(0) - C^T(1) \cdot A^{\neg T}(1) - C^T(0) \cdot A^{\neg T}(2) \end{array} \right] = \hat{D}_1(2), \quad (24)
\end{aligned}$$

откуда при выполнении условия (20) будем иметь

$$\begin{aligned} \hat{X}(2) = & D^+(0,0) \cdot [\hat{D}_1(2) - D(1,0;0,1) \cdot \hat{X}(1) - D(2,0;1,1;0,2) \cdot \hat{X}(0)] + \\ & + [E - D^+(0,0) \cdot D(0,0)] \cdot W(2), \end{aligned} \quad (25)$$

где $W(2) = (w(2)_1, \dots, w(2)_m)^T$ - произвольный корректирующий числовой гипервектор с размерами $m^2 \times 1$;

•
•
•

при $K=K$:

$$\begin{aligned}
& [A(0) \otimes B^{\bar{T}}(0) - B^T(0) \otimes A^{\bar{1}}(0)] \cdot \hat{X}(K) + [A(1) \otimes B^{\bar{T}}(0) + A(0) \otimes B^{\bar{T}}(1) - \\
& - B^T(1) \otimes A^{\bar{1}}(0) - B^T(0) \otimes A^{\bar{1}}(1)] \cdot \hat{X}(K-1) + [A(2) \otimes B^{\bar{T}}(0) + A(1) \otimes B^{\bar{T}}(1) + \\
& + A(0) \otimes B^{\bar{T}}(2) - B^T(2) \otimes A^{\bar{1}}(0) - B^T(1) \otimes A^{\bar{1}}(1) - B^T(0) \otimes A^{\bar{1}}(2)] \cdot \hat{X}(K-2) + \\
& \dots + [A(K-1) \otimes B^{\bar{T}}(0) + A(K-2) \otimes B^{\bar{T}}(1) + \dots + A(0) \otimes B^{\bar{T}}(K-1) - \\
& - B^T(K-1) \otimes A^{\bar{1}}(0) - B^T(K-2) \otimes A^{\bar{1}}(1) - \dots - B^T(0) \otimes A^{\bar{1}}(K-1)] \cdot \hat{X}(1) + \\
& + [A(K) \otimes B^{\bar{T}}(0) + A(K-1) \otimes B^{\bar{T}}(1) + \dots + A(0) \otimes B^{\bar{T}}(K) - \\
& - B^T(K) \otimes A^{\bar{1}}(0) - B^T(K-1) \otimes A^{\bar{1}}(1) - \dots - B^T(0) \otimes A^{\bar{1}}(K)] \cdot \hat{X}(0) = \\
& = D(0,0) \cdot \hat{X}(K) + D(1,0; 0,1) \cdot \hat{X}(K-1) + D(2,0;1,1; 0,2) \cdot \hat{X}(K-2) + \dots + \\
& + D(K-1,0;K-2,1;\dots;1,K-2;0,K-1) \cdot \hat{X}(1) + D(K,0;\dots;0,K) \cdot \hat{X}(0) = \\
& = \overbrace{\left[\begin{array}{l} C(K) \cdot B^{\bar{1}}(0) + C(K-1) \cdot B^{\bar{1}}(1) + \dots + C(0) \cdot B^{\bar{1}}(K) - \\ - C^T(K) \cdot A^{\bar{T}}(0) - C^T(K-1) \cdot A^{\bar{T}}(1) - \dots - C(0) \cdot A^{\bar{T}}(K) \end{array} \right]} = \hat{D}_1(K)
\end{aligned} \tag{26}$$

или

$$\begin{aligned}
& [A(0) \otimes B^{\bar{T}}(0) - B^T(0) \otimes A^{\bar{1}}(0)] \cdot \hat{X}(K) + \sum_{l=0}^K \sum_{P=1}^K [A(l) \otimes B^{\bar{T}}(P-l) - \\
& - B^T(l) \otimes A^{\bar{1}}(P-l)] \cdot \hat{X}(K-P) = \\
& = D(0,0) \cdot \hat{X}(K) + D(1,0;0,1) \cdot \hat{X}(K-1) + D(2,0;1,1;0,2) \cdot \hat{X}(K-2) + \dots + \\
& + D(K-1,0;K-2,1;\dots;1,K-2;0,K-1) \cdot \hat{X}(1) - D(K,0;\dots;0,K) \cdot \hat{X}(0) = \\
& = \sum_{l=0}^K [C(l) \cdot B^{\bar{1}}(K-l) - C^T(l) \cdot A^{\bar{T}}(K-l)] = \hat{D}_1(K),
\end{aligned} \tag{27}$$

откуда при выполнении условия (20) будем иметь

$$\begin{aligned} \hat{X}(K) = & D^+(0,0) \cdot [\hat{D}_1(K) - D(1,0;0,1) \cdot \hat{X}(K-1) - D(2,0;1,1;0,2) \cdot \hat{X}(K-2) - \\ & \dots - D(K-1,0;K-2,1;\dots;1,K-2;0,K-1) \cdot \hat{X}(1) - D(K,0;\dots,0,K) \cdot \hat{X}(0)] + \\ & + [E - D^+(0,0) \cdot D(0,0)] \cdot W(K), \end{aligned} \quad (28)$$

где $W(K) = (w(K)_1, \dots, w(K)_{m^2})^T$ – произвольный корректирующий числовой гипервектор с размерами $m^2 \times 1$.

Таким образом, имея гипервекторы (матричные дискреты) (21), (23), (25) и (28), в соответствии с (16) можно найти решения $X(t)$ исходной задачи (1).

Замечание 4. При выполнении условий (17), (18), (20) и равенства

$$D^+(0,0) \cdot D(0,0) = E_{m^2 \times m^2} \quad (29)$$

задача будет обладать единственным решением.

2. Параллельный численно-аналитический метод решения. Объединив соотношения (21), (23), (25),...,(28), получим следующее суперматрично-супервекторное представление:

$$\begin{bmatrix} D(0,0) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D(1,0;0,1) & D(0,0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D(2,0;\dots;0,2) & D(1,0;0,1) & D(0,0) & 0 & \dots & 0 \\ D(3,0;\dots;0,3) & D(2,0;\dots;0,2) & D(1,0;0,1) & D(0,0) & \dots & 0 \\ D(4,0;\dots;0,4) & D(3,0;\dots;0,3) & D(2,0;\dots;0,2) & D(1,0;0,1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D(K,0;\dots;0,K) & D(K-1,0;\dots;0,K-1) & \dots & \dots & \dots & D(0,0) \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{X}(0) \\ \hat{X}(1) \\ \hat{X}(2) \\ \hat{X}(3) \\ \hat{X}(4) \\ \vdots \\ \hat{X}(K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{D}_1(0) \\ \hat{D}_1(1) \\ \hat{D}_1(2) \\ \hat{D}_1(3) \\ \hat{D}_1(4) \\ \vdots \\ \hat{D}_1(K) \end{pmatrix}, \quad (30)$$

или в компактной записи

$$D(\bullet)_{(K+1) \cdot m^2 \times (K+1) \cdot m^2} \cdot \hat{X}(\bullet)_{(K+1) \cdot m^2 \times 1} = \hat{D}_1(\bullet)_{(K+1) \cdot m^2 \times 1}, \quad (31)$$

откуда при выполнении условия

$$\det D(\bullet) = 0 \Leftrightarrow \text{rang} D(\bullet) < (K+1) \cdot m^2 \Leftrightarrow \exists D^{-1}(\bullet) \quad (32)$$

(что, очевидно, эквивалентно условию (20)) будем иметь

$$\hat{X}(\bullet) = D^+(\bullet) \cdot \hat{D}_1(\bullet) + [E - D^+(\bullet) \cdot D(\bullet)] \cdot W(0), \quad (33)$$

где

$$D^+(\bullet) = \begin{bmatrix} D_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D_1 & D_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D_2 & D_1 & D_0 & 0 & \dots & 0 \\ D_3 & D_2 & D_1 & D_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_K & D_{K-1} & D_{K-2} & D_{K-3} & \dots & D_0 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

причем

$$\begin{cases} D_0 = D^+(0,0), \\ D_1 = -D^+(0,0) \cdot D(1,0;0,1) \cdot D^+(0,0), \\ D_2 = -D^+(0,0) \cdot [D(2,0;1,1;0,2) \cdot D^+(0,0) - (D(1,0;0,1) \cdot D^+(0,0))^2], \\ \dots\dots\dots \\ D_K = -D^+(0,0) \cdot \sum_{P=1}^K D(P) \cdot D_{K-P}, \end{cases} \quad (35)$$

а супервектор:

$$W(\bullet) = (W(\bullet)_1^T, \dots, W(\bullet)_{(K+1) \cdot m^2}^T)^T, \quad (36)$$

причем гипервекторы:

$$W(\bullet)_i = (w(j)_1^T, \dots, w(j)_{m^2}^T)_i, \quad i = \overline{1, (K+1) \cdot m^2}, \quad j = \overline{0, K}. \quad (37)$$

Таким образом, при параллельном численно-аналитическом методе, имея супервекторы (матричные дискреты) (33), в соответствии с правой частью (16) можно восстановить решения $X(t)$ исходной задачи.

Замечание 5. При выполнении условий (17), (18), а также (20) (или (32)) и равенства

$$D^+(\bullet) \cdot D(\bullet) = E_{(K+1) \cdot m^2 \times (K+1) \cdot m^2}$$

задача будет обладать единственным решением.

Модельный пример. Пусть задано матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} t & 0 \\ jt & jt \end{bmatrix} \cdot X(t) + X^T(t) \cdot \begin{bmatrix} (j-t) & 1 \\ 0 & -jt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j & 1 \\ 2jt & (t+jt^2) \end{bmatrix}.$$

Заметим, что из-за малых размеров матриц $A(t)$ и $B(t)$ здесь мы будем пользоваться точными аналитическими представлениями

$$A^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ -\frac{1}{t} & -\frac{j}{t} \end{bmatrix}, \quad B^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{j-t} & -\frac{j}{t(j-t)} \\ 0 & \frac{j}{t} \end{bmatrix}$$

с целью выявления вычислительных характеристик методов, предложенных в настоящей работе. Очевидно, $t_v \neq 0$, следовательно, в частности, при $t_v = 1$, $H=1$ имеем

$$\begin{aligned} A(0) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j & j \end{bmatrix}, \quad A(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j & j \end{bmatrix}, \quad A(K) = [0], \quad \forall K \geq 2; \\ B(0) &= \begin{bmatrix} (j-1) & 1 \\ 0 & -j \end{bmatrix}, \quad B(1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}, \quad B(K) = [0], \quad \forall K \geq 2; \\ C(0) &= \begin{bmatrix} j & 1 \\ 2j & (1+j) \end{bmatrix}, \quad C(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2j & (1+2j) \end{bmatrix}, \quad C(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}, \\ C(K) &= [0], \quad \forall K \geq 3; \\ A^{\nabla}(0) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -j \end{bmatrix}, \quad A^{\nabla}(1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & j \end{bmatrix}, \quad A^{\nabla}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -j \end{bmatrix}, \quad \dots; \\ B^{\nabla}(0) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{j-1} & -\frac{j}{j-1} \\ 0 & j \end{bmatrix}, \quad B^{\nabla}(1) = \begin{bmatrix} 0,5 \cdot j & (1-0,5 \cdot j) \\ 0 & -j \end{bmatrix}, \\ B^{\nabla}(2) &= \begin{bmatrix} 0,25(1-j) & 0,25(-5+j) \\ 0 & j \end{bmatrix}, \quad \dots \end{aligned}$$

1. При применении последовательного численно-аналитического метода получим (вычисления производились с точностью до $\varepsilon \cong 10^{-4}$)

$$D(0,0) = \left[\begin{array}{cc|cc} 0,5(1-3j) & 0 & & \\ 1,5(-1+j) & -1 & & \\ \hline -0,5(1+j) & 0 & 0,5(1+j) & 0 \\ -0,5(1+j) & 1 & -0,5(1+3j) & 0 \end{array} \right],$$

$$D^+(0,0) = \left[\begin{array}{cc|cc} (0,0888+0,2666 \cdot j) & (-0,1111-0,1111 \cdot j) & (-0,1111+0,2222 \cdot j) & 0,1111 \cdot j \\ (-0,3111-0,1555j) & -0,5555 & (-0,2222-0,6666 \cdot j) & (-0,2222-0,2222 \cdot j) \\ \hline (0,0888-0,2888 \cdot j) & (-0,2222-0,3333 \cdot j) & (-0,6111-0,5000 \cdot j) & (-0,0555+0,2777 \cdot j) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Нетрудно убедиться, что в соответствии с (19) имеем

$$\hat{D}_1(0) = \begin{pmatrix} 0,5 \cdot (1-3j) \\ 0,5 \cdot (-5+3j) \\ -j \\ (-2+j) \end{pmatrix},$$

а также

$$D^+(0,0) \cdot D(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E - D^+(0,0) \cdot D(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, в соответствии с (21) имеем

$$\hat{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -j \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w(0)_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -j \\ w(0)_4 \end{pmatrix}, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & w(0)_4 \end{bmatrix}.$$

Далее

$$D(1,0;0,1) = \left[\begin{array}{cc|cc} (-0,5+j) & 0 & & \\ (0,5-j) & 1 & \mathbf{0} & \\ \hline (1-0,5 \cdot j) & 0 & -0,5 \cdot j & 0 \\ (-1+0,5 \cdot j) & -j & 0,5 \cdot j & 0 \end{array} \right], \quad \hat{D}_1(1) = \begin{pmatrix} (-0,5+j) \\ (0,5-j) \\ (1-j) \\ (-3+j) \end{pmatrix},$$

при которых в соответствии с (23) получим

$$\hat{X}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{-j} \\ w(1)_4 \end{pmatrix}, \quad X(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -j & w(1)_4 \end{bmatrix}.$$

Точно так же получим

$$D(2,0;1,1;0,2) = \left[\begin{array}{cc|cc} (0,25-0,75 \cdot j) & 0 & & \\ (-0,25+0,75 \cdot j) & -1 & \mathbf{0} & \\ \hline (-1,25+0,25 \cdot j) & 0 & (-0,25+0,25 \cdot j) & 0 \\ (1,25-0,25 \cdot j) & j & (0,25-0,25 \cdot j) & 0 \end{array} \right],$$

$$\hat{D}_1(2) = \begin{pmatrix} (0,25-0,75 \cdot j) \\ (-0,25+0,75 \cdot j) \\ (-1,5+0,5 \cdot j) \\ (1,5-0,5 \cdot j) \end{pmatrix},$$

при которых в соответствии с (25) получим

$$\hat{X}(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{0}{0} \\ w(2)_4 \end{pmatrix}, \quad \hat{X}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w(2)_4 \end{bmatrix}.$$

И наконец, при $K=3$ имеем

$$D(3,0;2,1;1,2;0,3) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0,75 \cdot j & j & 0 & & & \\ -0,75 \cdot j & j & 1 & & & \\ \hline 1,25 & 0 & 0,25 & 0 & & \\ -1,25 & -j & -0,25 & 0 & & \end{array} \right] \cdot \hat{D}_1(3) = \begin{pmatrix} 0,75 \cdot j \\ -0,75 \cdot j \\ 1,5 \\ -1,5 \end{pmatrix},$$

$$\hat{X}(3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w(3)_4 \end{pmatrix}, \quad X(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w(3)_4 \end{bmatrix}$$

и т.д, а при $K>3$ в соответствии с (28) имеем

$$\hat{X}(K) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w(K)_4 \end{pmatrix}, \quad X(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w(K)_4 \end{bmatrix}, \quad \forall K.$$

Поэтому общее дифференциально-тейлоровское решение модельного примера будет иметь вид

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & w(0)_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -j & w(1)_4 \end{bmatrix} (t-1) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w(2)_4 \end{bmatrix} \cdot (t-1)^2 + \dots =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t \\ -jt & [(w(0)_4 - w(1)_4 + w(2)_4) + (w(1)_4 - 2w(2)_4)t + w(2)_4 \cdot t^2 + \dots] \end{bmatrix}.$$

Отсюда очевидно, что при произвольных конкретных значениях $w(0)_4, w(1)_4, w(2)_4, \dots$ может быть получено бесчисленное множество решений задачи. В частности:

а) при $w(0)_4 = w(1)_4 = w(2)_4 = 0$ решением является

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ -jt & 0 \end{bmatrix};$$

б) при $w(0)_4 = w(2)_4 = 0$, $w(1)_4 = 1$ решением является

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ -jt & (-1+t) \end{bmatrix};$$

в) при $w(0)_4 = 1$, $w(1)_4 = 2$, $w(2)_4 = 0$ решением является

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ -jt & (-1+2t) \end{bmatrix};$$

г) при $w(0)_4 = 1$, $w(1)_4 = 2$, $w(2)_4 = 3$ решением является

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ -jt & (2-4t+3t^2) \end{bmatrix}$$

и т.д. В абсолютной точности этих решений можно легко удостовериться подстановкой их в исходное матричное уравнение.

2. При применении параллельного численно-аналитического метода имеем (вычисления производились с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$)

$$D_0 = D^+(0,0);$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} (0,0911+0,1030 \cdot j) & (-0,0852-0,0704 \cdot j) & (-0,0074+0,1074 \cdot j) & (0,0630+0,0222 \cdot j) \\ (-0,2726+0,0548 \cdot j) & (-0,4889+0,0148 \cdot j) & (-0,2333-0,5519 \cdot j) & (-0,2481-0,0407 \cdot j) \\ (-0,0348-0,1081 \cdot j) & (0,1556-0,4407 \cdot j) & (0,4278-0,1241 \cdot j) & (-0,1315)+0,0315 \cdot j \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} (-0,0311-0,0429 \cdot j) & (-0,0001+0,0132 \cdot j) & (-0,0005-0,0490 \cdot j) & (-0,0137-0,0491 \cdot j) \\ (0,0912+0,0541 \cdot j) & (0,0390-0,0200 \cdot j) & (0,0542+0,0959 \cdot j) & (-0,0742+0,1349 \cdot j) \\ (0,0852+0,0535 \cdot j) & (-0,0106-0,0337 \cdot j) & (0,0362+0,0828 \cdot j) & (0,0699+0,0722 \cdot j) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

при которых в соответствии с (30)-(36) получаются точно такие же результаты, что и при применении последовательного численно-аналитического метода

(из-за громоздкости матриц $D(\bullet)$ и $D^+(\bullet)$ здесь они не приводятся).

Заключение. Таким образом, для рассматриваемой задачи в настоящей работе предложены:

- аналитический метод решения, при котором условиями неоднозначной разрешимости служат:

- соотношения регулярности (5) и (6),
- соотношение негиперрегулярности (8);

- последовательный численно-аналитический метод решения, при котором условиями неоднозначной разрешимости служат:
 - соотношения регулярности (17) и (18),
 - соотношение негиперрегулярности (20);
- параллельный численно-аналитический метод решения, при котором условиями неоднозначной разрешимости служат:
 - соотношения регулярности (17) и (18),
 - соотношение несуперрегулярности (32).

Численно-аналитические методы позволяют свести решения исходной непрерывной задачи к некоторым рекуррентным численным процедурам на первом этапе вычислений, которые эффективно могут быть реализованы средствами современных информационных технологий [6], а также сравнительно легко осуществить восстановление непрерывных решений $X(t)$ на основе некоторого обратного дифференциального преобразования на втором этапе вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Симонян С.О.** К решению однопараметрических транспонированных аналогов матричных уравнений типа Сильвестра $A(t) \cdot X(t) + X^T(t) \cdot B(t) = C(t)$ // Известия НАН РА и НПУА. Серия техн. наук. – 2016. – Т. LXIX, № 1. – С. 49-60.
2. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. – М.: Наука, 2010. – 560 с.
3. **Симонян С.О.** Методы определения однопараметрических обобщенных обратных матриц. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017. – 222 с.
4. **Тертычный-Даури В.Ю.** Адаптивная механика. – М.: Наука, Физматлит, 1998. – 480 с.
5. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Киев: Наукова думка, 1984. – 420 с.
6. **Strastrup B.** The C++ Programming Language. - 4th Edition. - Boston: Addison – Wesley professional, 2013. – 1368 p.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 20.02.2018.

Ս.Հ. ՄԻՄՈՆՅԱՆ

**ՄԻԼՎԵՍՏՐԻ ՏԻՊԻ $A(t) \cdot X(t) + X^T(t) \cdot B(t) = C(t)$ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ
ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՏՐԱՆՍՊՈՆԱՑՎԱԾ ՆՄԱՆԱԿՆԵՐԻ ՈՉ
ՄԻԱՐԺԵՔ ԼՈՒԾԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՑԱԼ
(Ուղղակի մոտեցում)**

Ուսումնասիրվել են Միլվեստրի տիպի միապարամետրական մատրիցային հավասարումների տրանսպոնացված նմանակների ոչ միարժեք լուծելիության վերաբերյալ հարցերը: Առաջարկվում են լուծման անալիտիկ, ինչպես նաև հաջորդական և զուգահեռ թվաանալիտիկ եղանակներ: Թվա-անալիտիկ եղանակների համար որպես հիմնական մաթեմատիկական ապարատ են ծառայել դիֆերենցիալ ձևափոխությունները: Բոլոր եղանակների համար էլ ստացվել են խնդրի ոչ միարժեք լուծելիության համապատասխան պայմանները: Դիտարկվել է մոդելային օրինակ, որի լուծման համար օգտագործվել են թվաանալիտիկ եղանակները, և ստացվել են մի շարք ճշգրիտ դիֆերենցիալ-թեյլորյան լուծումներ: Առաջարկված թվա-անալիտիկ եղանակները կարող են արդյունավետորեն իրականացվել ժամանակակից տեղեկատվական տեխնոլոգիաների միջոցներով:

Առանցքային բառեր. Միլվեստրի տիպի միապարամետրական մատրիցային հավասարումների տրանսպոնացված նմանակներ, ռեդուկցիա, անալիտիկ լուծում, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, հաջորդական և զուգահեռ թվային ընթացակարգեր, ոչ միարժեք լուծելիության պայմաններ, անընդհատ խնդրի անընդհատ լուծում, մոդելային օրինակ, ժամանակակից տեղեկատվական տեխնոլոգիաների միջոցներ

S.H. SIMONYAN

**THE AMBIGUOUS SOLVABILITY OF ONE-PARAMETRIC
TRANSPOSED ANALOGUES OF SYLVESTER TYPE MATRIX
EQUATIONS $A(t) \cdot X(t) + X^T(t) \cdot B(t) = C(t)$
(Direct approach)**

The issues on the ambiguous solvability of one-parameter transposed analogues of matrix equations of Sylvester type are studied. Analytical, as well as sequential and parallel numerical-analytical methods of solution are offered. For numerical-analytical methods, the basic mathematical apparatus is differential transformations. For all methods, the corresponding conditions for the ambiguous solvability of the problem are obtained. A model example is considered, for which numerical-analytical methods are used, and a number of exact differential-Taylor solutions are obtained. The proposed numerical-analytical methods can be effectively implemented using modern information technologies.

Keywords: one-parameter transposed analog of the Sylvester type matrix equation, reduction, analytical solution, differential transformations, sequential and parallel numerical procedures, conditions of ambiguous solvability, continuous solutions of the continuous problem, model example, modern information technologies.