

С.О. СИМОНЯН, Г.В. АДАМЯН, А.В. МЕЛИКЯН

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КУБИЧЕСКИХ
МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ (II)**
(Декомпозиционный подход)

Рассмотрены однопараметрические кубические матричные уравнения, для решения которых предложены декомпозиционные аналитический, а также последовательный и параллельный численно-аналитические методы. Аналитический метод служит основой для разработки численно-аналитических методов, базирующихся на дифференциальных преобразованиях. Для всех методов получены соответствующие условия разрешимости задачи.

Ключевые слова: однопараметрические кубические матричные уравнения, декомпозиционные аналитический и численно-аналитические методы решения, условия разрешимости задачи, современные средства информационных технологий.

Введение. В работе [1] были предложены прямые аналитический, а также последовательный и параллельный численно-аналитические методы решения однопараметрических кубических матричных уравнений

$$A_0(t) \cdot X^3(t) + A_1(t) \cdot X^2(t) + A_2(t) \cdot X(t) + A_3(t) = [0], \quad (1)$$

где $A_0(t)$, $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$ - однопараметрические квадратные матрицы порядка m , а $X(t)$ - неизвестная однопараметрическая квадратная матрица также порядка m , подлежащая определению. Проблемы, связанные как с вычислительными схемами решения степенных матричных уравнений вообще, так и с определением количеств этих решений в каждом конкретном случае в частности, достаточно хорошо известны (см., напр. [2-8]).

В настоящей работе рассматриваются декомпозиционные методы решения однопараметрических кубических матричных уравнений (1).

Математический аппарат

1. Аналитический метод решения. Однопараметрическое кубическое матричное уравнение (1) представим в виде эквивалентной матричной системы второго порядка

$$\begin{cases} A_0(t) \cdot X(t) \cdot Y(t) + A_1(t) \cdot Y(t) + A_2(t) \cdot X(t) + A_3(t) = [0] \\ X^2(t) - Y(t) = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

и допустим, что функциональные матрицы, входящие в (2), комплексные, т.е.

$$A_0(t) = B_0(t) + j \cdot C_0(t) , \quad (3)$$

$$A_1(t) = B_1(t) + j \cdot C_1(t) , \quad (4)$$

$$A_2(t) = B_2(t) + j \cdot C_2(t) , \quad (5)$$

$$A_3(t) = B_3(t) + j \cdot C_3(t) , \quad (6)$$

$$X(t) = M(t) + j \cdot N(t) , \quad (7)$$

$$Y(t) = P(t) + j \cdot Q(t) . \quad (8)$$

Тогда из первого уравнения системы (2) получим следующую подсистему:

$$\begin{cases} B_0(t) \cdot M(t) \cdot P(t) - C_0(t) \cdot N(t) \cdot P(t) - B_0(t) \cdot N(t) \cdot Q(t) - C_0(t) \cdot M(t) \cdot Q(t) + \\ + B_1(t) \cdot P(t) - C_1(t) \cdot Q(t) + B_2(t) \cdot M(t) - C_2(t) \cdot N(t) + B_3(t) = 0, \\ B_0(t) \cdot M(t) \cdot Q(t) - C_0(t) \cdot N(t) \cdot Q(t) + B_0(t) \cdot N(t) \cdot P(t) - C_0(t) \cdot M(t) \cdot P(t) + \\ + C_1(t) \cdot P(t) + B_1(t) \cdot Q(t) + C_2(t) \cdot M(t) + B_2(t) \cdot N(t) + C_3(t) = 0, \end{cases} \quad (9)$$

а из второго уравнения - подсистему

$$\begin{cases} M^2(t) - N^2(t) - P(t) = 0, \\ M(t) \cdot N(t) + N(t) \cdot M(t) - Q(t) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Объединив подсистемы (9) и (10) в одно целое, получим гиперматрично-гипервекторно-блочную систему

$$\begin{bmatrix} B_2(t) - C_2(t) & U(t) - V(t) \\ C_2(t) & B_2(t) & V(t) & U(t) \\ M(t) & -N(t) & & \\ N(t) & M(t) & & -E \end{bmatrix}_{4m \times 4m} \cdot \begin{bmatrix} M(t) \\ N(t) \\ P(t) \\ Q(t) \end{bmatrix}_{4m \times m} = - \begin{bmatrix} B_3(t) \\ C_3(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{4m \times m} , \quad (11)$$

где

$$\begin{cases} U(t) = B_1(t) + B_0(t) \cdot M(t) - C_0(t) \cdot N(t) , \\ V(t) = C_1(t) + C_0(t) \cdot M(t) + B_0(t) \cdot N(t) , \end{cases} \quad (12)$$

а E – единичная матрица порядка $2m$.

Гиперматрично-гипервекторно-блочная система (11) в комплексной записи имеет вид

$$\begin{matrix} \mathcal{D}(t) & \cdot & R(t) & = & - & S(t) \\ 4m \times 4m & & 4m \times m & & & 4m \times m \end{matrix} \quad (13)$$

где $R(t) = \begin{pmatrix} M^T(t) & N^T(t) \\ P^T(t) & Q^T(t) \end{pmatrix}^T$, $S(t) = \begin{pmatrix} B_3^T(t) & C_3^T(t) \\ 0^T & 0^T \end{pmatrix}^T$.

Из последнего представления при выполнении условия гиперрегулярности (условия разрешимости)

$$\text{rang} \mathcal{D}(t) = 4m \quad (14)$$

получим итерационную вычислительную схему

$$R(t)_{(q+1)} = \mathcal{D}^{-1}(t)_{(q)} \cdot S(t) \quad , \quad (15)$$

или итерационную вычислительную схему ньютоновского типа

$$R(t)_{(q+1)} = \frac{1}{2} \cdot [R(t)_{(q)} - \mathcal{D}^{-1}(t)_{(q)} \cdot S(t)] \quad (16)$$

2. Декомпозиционные численно-аналитические методы решения.

Теперь рассмотрим применение дифференциальных преобразований для решения гиперматрично-гипервекторно-блочной системы (11). При этом допустим, что для всех матричных элементов этой системы имеют место следующие дифференциальные преобразования [9]:

$$B_0(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K B_0(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v} \quad \overline{\cdot} \quad B_0(t) = \mathfrak{B}_0(t, t_v, H, B_0(K)) \quad , \quad (17)$$

$$B_1(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K B_1(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v} \quad \overline{\cdot} \quad B_1(t) = \mathfrak{B}_1(t, t_v, H, B_1(K)) \quad , \quad (18)$$

$$B_2(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K B_2(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v} \quad \overline{\cdot} \quad B_2(t) = \mathfrak{B}_2(t, t_v, H, B_2(K)) \quad , \quad (19)$$

$$B_3(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K B_3(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v} \quad \overline{\cdot} \quad B_3(t) = \mathfrak{B}_3(t, t_v, H, B_3(K)) \quad , \quad (20)$$

$$C_0(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K C_0(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v} \quad \overline{\cdot} \quad C_0(t) = \mathfrak{B}_4(t, t_v, H, C_0(K)) \quad , \quad (21)$$

$$C_1(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K C_1(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v} \quad \overline{\cdot} \quad C_1(t) = \mathfrak{B}_5(t, t_v, H, C_1(K)) \quad , \quad (22)$$

$$C_2(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K C_2(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v} \quad \overline{\cdot} \quad C_2(t) = \mathfrak{A}_6(t, t_v, H, C_2(K)) \quad , \quad (23)$$

$$C_3(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K C_3(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v} \quad \overline{\cdot} \quad C_3(t) = \mathfrak{A}_7(t, t_v, H, C_3(K)) \quad , \quad (24)$$

$$M(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K M(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v} \quad \overline{\cdot} \quad M(t) = \mathfrak{A}_8(t, t_v, H, M(K)) \quad , \quad (25)$$

$$N(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K N(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v} \quad \overline{\cdot} \quad N(t) = \mathfrak{A}_9(t, t_v, H, N(K)) \quad , \quad (26)$$

$$P(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K P(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v} \quad \overline{\cdot} \quad P(t) = \mathfrak{A}_{10}(t, t_v, H, P(K)) \quad , \quad (27)$$

$$Q(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K Q(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v} \quad \overline{\cdot} \quad Q(t) = \mathfrak{A}_{11}(t, t_v, H, Q(K)) \quad , \quad (28)$$

где $B_0(K)$, $B_1(K)$, $B_2(K)$, $B_3(K)$, $C_0(K)$, $C_1(K)$, $C_2(K)$, $C_3(K)$, $M(K)$, $N(K)$, $P(K)$, $Q(K)$ - матричные дискреты однопараметрических матриц $B_0(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$, $B_3(t)$, $C_0(t)$, $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$, $M(t)$, $N(t)$, $P(t)$, $Q(t)$ соответственно; H - масштабный коэффициент; $K = \overline{0, \infty}$ - целочисленный аргумент; t_v - центр аппроксимации; $\mathfrak{A}_0(\bullet)$ - $\mathfrak{A}_{11}(\bullet)$ - аппроксимирующие функции, восстанавливающие матрицы-оригиналы $B_0(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$, $B_3(t)$, $C_0(t)$, $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$, $M(t)$, $N(t)$, $P(t)$, $Q(t)$ соответственно.

Итак, с учетом (17)-(28) гиперматрично-гипервекторно-блочную систему (11) из области оригиналов переведем в область дифференциальных изображений, имея в виду, что гиперматрично-блочные дискреты равны

$$D(l) = \left[\begin{array}{cc|cc} B_2(l) - C_2(l) & & U(l) - V(l) & \\ C_2(l) & B_2(l) & V(l) & U(l) \\ \hline M(l) & -N(l) & & \\ N(l) & M(l) & & -E \cdot \delta(l) \end{array} \right], \quad l = \overline{0, K}, \quad (29)$$

причем $\delta(l)$ - тейлоровская единица [9], блоки-матрицы

$$\begin{cases} U(l) = B_1(l) + \sum_{l=0}^K B_0(l) \cdot M(K-l) - \sum_{l=0}^K C_0(l) \cdot N(K-l) , \\ V(l) = C_1(l) + \sum_{l=0}^K C_0(l) \cdot M(K-l) + \sum_{l=0}^K B_0(l) \cdot N(K-l) , \end{cases} \quad l = \overline{0, K}, \quad (30)$$

а гипервекторно-блочные дискретизации:

$$R(l) = \begin{bmatrix} M(l) \\ N(l) \\ P(l) \\ Q(l) \end{bmatrix}, \quad l = \overline{0, K}; \quad S(l) = \begin{bmatrix} B_3(l) \\ C_3(l) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad l = \overline{0, K}. \quad (31)$$

а) Последовательные рекуррентные итерационные вычислительные схемы

Итак, с учетом (17) имеем:

при $K=0$:

$$\underset{4m \times 4m}{D(0)} \cdot \underset{4m \times m}{R(0)} = - \underset{4m \times m}{S(0)}, \quad (32)$$

откуда

$$R(0)_{(q+1)} = -D^{-1}(0)_{(q)} \cdot S(0) \quad (33)$$

или

$$R(0)_{(q+1)} = \frac{1}{2} \cdot [R(0)_{(q)} - D^{-1}(0)_{(q)} \cdot S(0)], \quad (34)$$

если, конечно, имеют место условия полноранговости матриц $D(0)_{(q)}$ или условия гиперрегулярности (условия разрешимости)

$$\text{rang} D(0)_{(q)} = 4m, \quad \forall q; \quad (35)$$

при $K \geq 1$:

$$D(0) \cdot R(K) + D(1) \cdot R(K-1) + \dots + D(K-1) \cdot R(1) + D(K) \cdot R(0) = -S(K), \quad (36)$$

откуда

$$R(K)_{(q+1)} = -D^{-1}(0) \cdot \left[D_1(K)_{(q)} \cdot R(0) + \sum_{l=1}^{K-1} D(l) \cdot R(K-l) + S(K) \right] \quad (37)$$

или

$$R(K)_{(q+1)} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ R(K)_q - D^{-1}(0) \cdot \left[D_1(K)_{(q)} \cdot R(0) + \sum_{l=1}^{K-1} D(l) \cdot R(K-l) + S(K) \right] \right\}. \quad (38)$$

б) Параллельные итерационные вычислительные схемы

Объединив (32) и соотношения, порождаемые из (36) при изменении целочисленного аргумента $K = \overline{1, \infty}$, получим следующее суперматрично-супервекторно-блочное представление:

$$\begin{bmatrix} D(0) & 0 & \cdots & 0 \\ D(1) & D(0) & \cdots & 0 \\ D(2) & D(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D(K) & D(K-1) & \cdots & D(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R(0) \\ R(1) \\ R(2) \\ \vdots \\ R(K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(0) \\ S(1) \\ S(2) \\ \vdots \\ S(K) \end{bmatrix}, \quad (39)$$

$4(K+1) \cdot m \times 4 \cdot (K+1) \cdot m \quad 4(K+1) \cdot m \times m \quad 4(K+1) \cdot m \times m$

откуда с учетом условий суперрегулярности (условий разрешимости) будем иметь

$$\begin{bmatrix} R(0) \\ R(1) \\ R(2) \\ \vdots \\ R(K) \end{bmatrix}_{(q+1)} = - \begin{bmatrix} D(0) & 0 & \cdots & 0 \\ D(1) & D(0) & \cdots & 0 \\ D(2) & D(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D(K) & D(K-1) & \cdots & D(0) \end{bmatrix}_{(q)}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} S(0) \\ S(1) \\ S(2) \\ \vdots \\ S(K) \end{bmatrix} \quad (40)$$

или в компактной записи:

$$D(\bullet) \cdot R(\bullet) = -S(\bullet), \quad (41)$$

откуда

$$R(\bullet)_{(q+1)} = -D^{-1}(\bullet)_{(q)} \cdot S(\bullet), \quad (42)$$

либо

$$R(\bullet)_{(q+1)} = \frac{1}{2} \cdot [R(\bullet)_{(q)} - D^{-1}(\bullet)_{(q)} \cdot S(\bullet)]. \quad (43)$$

Естественно, из условий гиперрегулярности (35) из-за нижнетреугольной структуры суперматрицы $D(\bullet)$ немедленно следуют и условия суперрегулярности (условия разрешимости):

$$\text{rang} D(\bullet)_{(q)} = 4 \cdot (K + 1) \cdot m, \quad \forall q. \quad (44)$$

Замечание 1. Несмотря на то, что гиперматрично-гипервекторно-блочная система (3) из работы [1] и гиперматрично-блочная система (11) настоящей работы структурно полностью идентичны, однако содержательно они достаточно различны, ибо:

- гиперматрица $D(t)$ из работы [1] в общем случае комплексная, а гиперматрица $D(t)$ настоящей работы действительная;

- блоки гиперматрицы $D(t)$ (кроме единичной матрицы E), очевидно, являются блочно-кососимметрическими относительно соответствующих первых главных диагоналей и блочно-симметрическими относительно соответствующих вторых главных диагоналей, между тем гиперматрица $D(t)$ такими свойствами не обладает.

Замечание 2. Свойства блочной кососимметричности и блочной симметричности, естественно, сохраняются и для всех гиперматрично-блочных дискретов $D(l)$, $\forall l = \overline{0, K}$.

Заключение. Итак, организовав вычислительные процедуры (33), (37) или (34), (38) при последовательной рекуррентной итерационной вычислительной схеме, а также процедуры (42) или (43) при параллельной итерационной вычислительной схеме и определив гипервекторно-блочные дискреты $R(l)$, $\forall l = \overline{0, K}$, далее в соответствии с (25)-(28) можно определить матрицы $M(t)$, $N(t)$, $P(t)$ и $Q(t)$, а затем в соответствии с (7) и (8) - и неизвестные матрицы $X(t)$ и $Y(t)$.

Очевидно также, что предложенные вычислительные схемы могут быть эффективно реализованы средствами современных информационных технологий [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Симонян С.О., Адамян Г.В., Меликян А.В. Методы решения однопараметрических кубических матричных уравнений (I) (Прямой подход) // Известия НАН РА и НПУА. Сер. ТН.- 2017.- Т. LXX, №4. – С 482 – 490.
2. Гельфанд С.И. О числе решений квадратного уравнения // Журнал “Глобус-1”. – 2000. – С. 124-134.
3. Козлов В.В. Ограничения квадратичных форм на лагранжевы плоскости, квадратные матричные уравнения и гироскопическая стабилизация // Функциональный анализ и его приложения. – 2005. - Вып. 4, т. 39. – С. 32-47.

4. **Палин В.В.** О разрешимости квадратных матричных уравнений // Вестник Московского государственного университета. Серия 1: Математика, механика. – 2008. - №6. – С. 36-41.
5. **Симонян С.О.** К решению однопараметрических квадратных матричных уравнений // Вестник ИАА. –2016. - Т. 13, №4. – С. 463-471.
6. **Симонян С.О.** Гиперматрично-блочный численно-аналитический метод решения однопараметрических квадратных матричных уравнений // Известия НАН РА и НПУА. Сер. ТН. – 2016.- Т. LXIX, №4. – С. 422-430.
7. **Симонян С.О.** Метод решения однопараметрических обобщенных квадратных матричных уравнений // Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиотехника. - 2016, №2. – С. 12-23.
8. **Симонян С.О.** Декомпозиционные гиперматрично-блочные численно-аналитические методы решения однопараметрических квадратных матричных уравнений // Известия НАН РА и НПУА. Сер. ТН. - 2017.- Т. LXX, №1. – С. 95-108.
9. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. - Киев: Наукова думка, 1984.- 420 с
10. **Strastrup B.** The C++ Programming Language. - 4th Edition. - Boston: Addison – Wesley professional, 2013. – 1368 p.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 06.09.2017.

Մ.Հ. ՄԻՍՈՆՅԱՆ, Գ.Վ. ԱՂԱՍՅԱՆ, Ա.Վ. ՄԵԼԻՔՅԱՆ

**ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԽՈՐԱՆԱՐԴ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ
ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ (I)
(Ղեկմպոզիցիոն մոտեցում)**

Դիտարկված են միապարամետրական խորանարդ մատրիցային հավասարումները, որոնց լուծման համար առաջարկված են ղեկմպոզիցիոն անալիտիկ, ինչպես նաև հաջորդական և զուգահեռ թվա-անալիտիկ եղանակներ: Անալիտիկ եղանակը հիմք է ծառայում թվա-անալիտիկ եղանակների մշակման համար, որոնք հիմնված են դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա: Բոլոր եղանակների համար էլ ստացված են խնդրի լուծելիության համապատասխան պայմանները:

Առանցքային բառեր. միապարամետրական խորանարդ մատրիցային հավասարումներ, ղեկմպոզիցիոն անալիտիկ և թվա-անալիտիկ եղանակներ, խնդրի լուծելիության պայմաններ, տեղեկատվական տեխնոլոգիաների ժամանակակից միջոցներ:

S.H. SIMONYAN, G.V. ADAMYAN, A.V. MELIKYAN

**METHODS OF SOLVING ONE-PARAMETER CUBIC MATRIX EQUATIONS
(Decomposition approach)**

One-parameter cubic matrix equations are considered for whose solution decomposition analytical, as well as serial and parallel numerical- analytical methods are proposed. The analytical method serves as a basis for the development of numerical and analytical methods based on the differential transformations. Appropriate conditions for solvability of the problem are obtained for all the methods.

Keywords: one-parametric cubic matrix equations, decomposition analytical and numerical-analytical methods of solution, conditions for solvability of the problem, the modern means of information technology.