ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и НПУА. Сер. ТН. 2017. Т. LXX, N4.

УДК 621.3 АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

К.Р. ЕНОКЯН, М.Е. АЛАЕИ, Г.С. СУКИАСЯН

ОБ АВТОМАТИЧЕСКОЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ С НЕРЕГУЛЯРНОЙ РЕШЕТКОЙ

Предложен алгоритм автоматического построения кусочно-линейной аппроксимации непрерывной функции с нерегулярной решеткой на оси абсцисс. Алгоритм минимизирует погрешность аппроксимации при заданном числе точек решетки. Развитый подход реализован на моделях функций, заданных аналитически и таблично. Численные эксперименты показали преимущество предложенного алгоритма по сравнению со стандартной аппроксимацией, порожденной равномерной решеткой.

Ключевые слова: кусочно-линейная аппроксимация, нерегулярная решетка.

При численном решении нелинейных задач на сходимость процесса последовательных приближений сильное влияние оказывает количество узлов дискретизации. Это вызывает потребность в построении экономных аппроксимаций, требующих малого количества узлов при сохранении достаточной точности приближений. Стремление уменьшить число сеточных узлов приводит к необходимости перехода от общепринятых равномерных решеток к нерегулярным решеткам (см. [1 – 4]). Отметим, что в прошлом веке использовались исключительно регулярные решетки (см. [5]).

Пусть на отрезке [a,b] задана непрерывная функция F(x). В [1] изучались приближения $F_\varepsilon(x)$ функции F(x), “экономные” в следующем смысле:

1) $|F(x)-F_\varepsilon(x)|< \varepsilon$ при заданном уровне точности ε и всех x из отрезка [a,b];

2) $F_\varepsilon(x)$ является кусочно-линейной функцией, ее график – ломаная линия, состоящая из отрезков;

3) количество отрезков (т.е. число точек излома) минимально в следующем смысле: если удалить любую из точек излома x_k, т.е. заменить два отрезка $x_{k-1}x_k$ и x_kx_{k+1} на один отрезок $x_{k-1}x_{k+1}$, то нарушится условие 1.

Таким образом, в [1] решалась задача минимизации числа точек излома при заданном уровне точности.

В настоящей работе исследуется дуальная задача: минимизировать погрешность аппроксимации при заданном числе точек излома.

Рассмотрим на отрезке [a,b] упорядоченное множество точек $M = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, причем полагаем $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Обозначим через

F_M следующее приближение к функции F(x). Приближение $F_M(x)$ является кусочно-линейной функцией, ее график – ломаная линия, состоящая из отрезков, соединяющих точку с декартовыми координатами $(x_{k-1};y_{k-1})$ с точкой с координатами $(x_k;y_k)$, где $y_k = F(x_k)$, k=1,2,…,n.

Заметим, что число отрезков равно фиксированному числу n. Обозначим через E_M погрешность аппроксимации F_M:

$$E_M = \max_{\{a<x<b\}} |F(x)-F_M(x)|.$$

Разумеется, погрешность E_M зависит не только от вида функции F(x), но и от выбора точечного множества M. Наша цель – для данной функции F(x) и заданного числа точек излома n так построить точечное множество M, чтобы погрешность E_M была как можно меньше.

Вначале рассмотрим случай, когда функция y=F(x) является монотонной и известна обратная функция x=F*(y). Предлагается следующий алгоритм построения точечного множества M и соответствующей аппроксимации $F_M(x)$.

На оси OY рассмотрим отрезок [cd], где c=F(a), d=F(b). Пусть для определенности c < d. Разобьем отрезок [cd] точками $y_0,y_1,\ldots,y_n$ на n интервалов равной длины ε, где

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = d, \quad \varepsilon= (d-c)/n, \quad y_{k+1} - y_k=\varepsilon.$$

Разбиение $y_0,y_1,\ldots,y_n$ при помощи обратной функции x=F*(y) порождает на оси OX разбиение $M = \{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, где $x_k=F^*(y_k)$. График искомой оптимальной аппроксимации $F_M(x)$ получается соединением двумерных точек $(x_k;y_k)$, k=0,1,2,…,n.

Заметим, что на оси OY точки $y_0,y_1,\ldots,y_n$ составляют равномерную решетку, в то время как на оси OX точки $x_0,x_1,\ldots,x_n$ распределены неравномерно: там, где функция сильно меняется, густота узлов на оси OX больше, если же функция медленно меняется, там узлы расположены реже.

Отметим также, что в случае существования обратной функции x=F*(y) разбиение M единственно, аппроксимация $F_M(x)$ – наилучшая, а погрешность E_M – наименьшая возможная при заданном числе точек излома n.

На рис. 1 представлен пример такой аппроксимации $F_M(x)$ для функции F(x)=tg(x) на отрезке a = - 1, b = 1. Число узлов неравномерной одномерной сетки равно 62. Хорошо видно, что в середине отрезка [a,b], где функция медленно меняется, густота сеточных узлов относительно невелика. А по краям отрезка [a,b], где наблюдается быстрое изменение функции, отрезки становятся мелкими. Видно также, что на оси OY точки $y_0, y_1, \ldots, y_n$ составляют равномерную решетку.

Наглядно видно, что интенсивность сеточных узлов на оси OX в разных участках одномерной сетки существенно разная. Четко соблюдается условие: густота сеточных узлов тем больше, чем сильнее меняется функция.

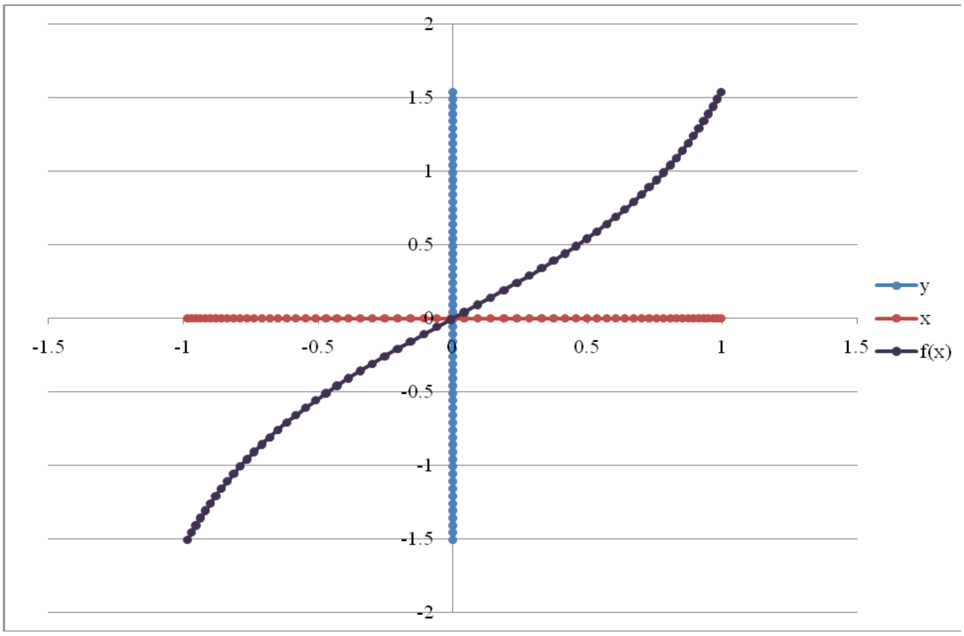

Рис. 1. Пример аппроксимации при помощи обратной функции

Теперь рассмотрим общий случай, когда у функции $y=F(x)$ обратной функции нет, или она неизвестна. В этом случае говорить о наилучшей аппроксимации не приходится, и возникает задача нахождения алгоритма автоматического построения кусочно-линейной аппроксимации, которая была бы лучше, чем некая стандартная аппроксимация.

В качестве стандартной рассмотрим аппроксимацию, порожденную равномерной решеткой $M_0 = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ на оси OX с шагом δ:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b, \;\; x_k = x_0 + k\delta, \;\; \delta = (b-a)/n.$$

Соответствующее стандартное приближение $F_{M_0}(x)$ является кусочно-линейной функцией, ее график – ломаная линия, состоящая из отрезков, соединяющих точку с координатами $(x_{k-1};y_{k-1})$ с точкой $(x_k;y_k)$, где $y_k = F(x_k)$, $k=1,2,\ldots,n$.

Предлагается следующий алгоритм автоматического построения (методом последовательных приближений) неравномерной решетки, которой соответствует кусочно-линейная аппроксимация с погрешностью меньшей, чем у стандартного приближения $F_{M0}(x)$.

Вначале на оси OX разобьем отрезок [ab] пополам точкой x_1, которая порождает на оси OY точку $y_1=F(x_1)$. Найдем, какой из отрезков на оси OY является наибольшим ($[cy_1]$ или $[y_1d]$) и какой из отрезков на оси OX ($[ax_1]$ или $[x_1b]$) ему соответствует. Разобьем последний отрезок пополам точкой x_2. Будем продолжать добавлять узлы делением пополам отрезка на оси OX, соответствующего наибольшему из отрезков на оси OY, до тех пор, пока количество узлов (включая концы $a = x_0$ и $x_n = b$) достигнет заданного числа n.

При этом для достаточно больших n в силу того, что уменьшается наибольший из отрезков на оси OY, точки $y_0,y_1,\ldots,y_n$ будут приближаться к равномерной решетке. Соответствующее множество точек $M = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ будет приближаться к идеальной неравномерной решетке, а соответствующая аппроксимация $F_M(x)$ будет приближаться к идеальной аппроксимации, которую можно было бы построить, если знать обратную функцию $x=F^*(y)$.

Предложенный алгоритм реализован для построения соответствующей аппроксимации $F_M(x)$ для функции $F(x)=tg(x)$ без использования обратной функции $x=F^*(y)=arctg(y)$(см. рис. 2). Для числа узлов n=40 погрешность E_M получилась равной 0,0015.

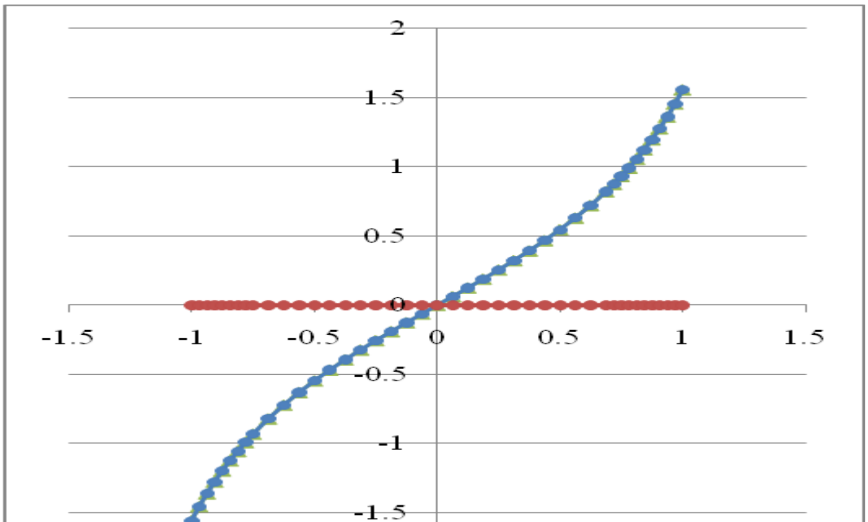

Рис. 2. Пример аппроксимации при помощи предложенного алгоритма

На рис. 3 представлена стандартная аппроксимация для функции F(x)=tg(x), порожденная равномерной решеткой на отрезке a = - 1, b = 1. Для числа узлов n=40 погрешность E_M получилась равной 0,0029, что подтверждает преимущество аппроксимации с неравномерной решеткой.

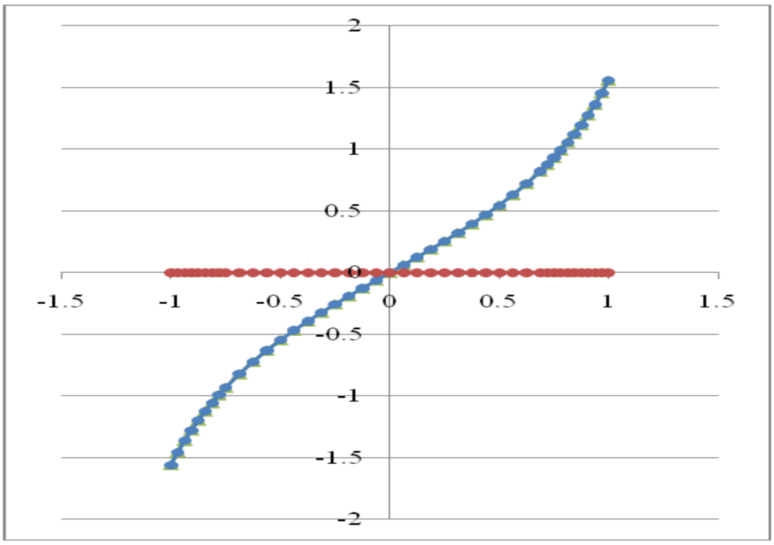

Рис. 3. Стандартная аппроксимация с равномерной решеткой

Теперь рассмотрим дискретный случай: о функции F(x) известны лишь ее значения $y_k = F(x_k)$, k=1,2,…,N на равномерной решетке, состоящей из N узлов. Цель та же – для заданного числа точек излома n так построить точечное множество M, чтобы погрешность E_M была как можно меньше. Разумеется, n<N.

На рис. 4 показаны колебания цены барреля нефти на Лондонской бирже с 20 ноября 2006 года до 16 апреля 2009 года (данные взяты из статьи [6]). Число узлов (дней) равномерной решетки равно N=604 (пропущены выходные для биржи дни).

На рис. 5 представлена стандартная аппроксимация для дискретной функции колебания цены барреля нефти, порожденная равномерной решеткой с n=40 узлами. Погрешность от замены 604 данных сорока данными составила 11,3236.

На рис. 6 представлена аппроксимация для дискретной функции колебания цены барреля нефти по предложенному алгоритму с неравномерной решеткой, содержащей n=40 узлов. Погрешность от замены 604 данных сорока данными составила 9,6481, что подтверждает преимущество аппроксимации с неравномерной решеткой.

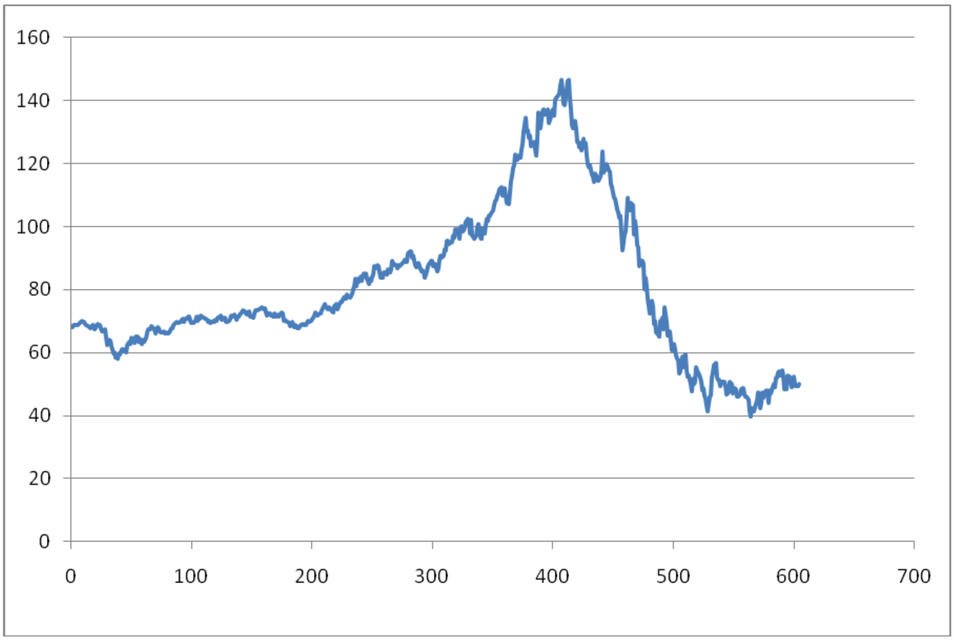

Рис. 4. Пример дискретной функции

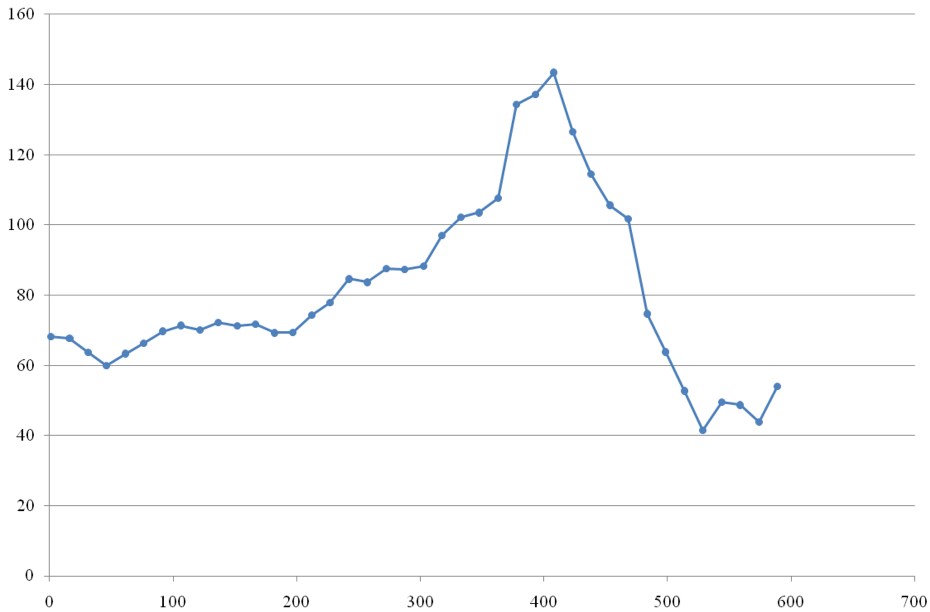

Рис. 5. Стандартная аппроксимация с равномерной решеткой

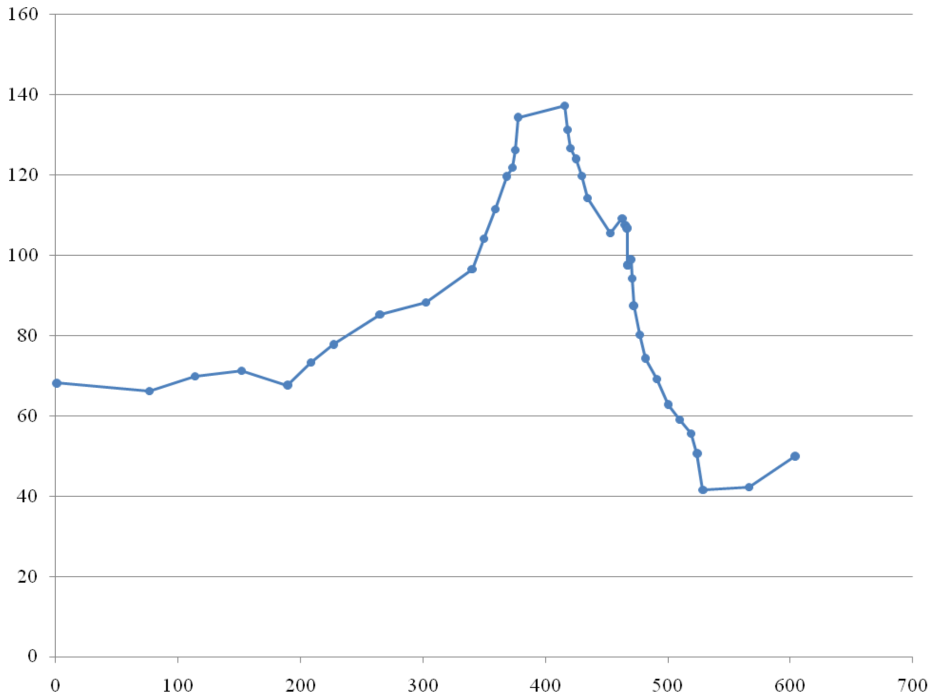

Рис. 6. Аппроксимация по предложенному алгоритму с неравномерной решеткой

Заключение. Развит и реализован алгоритм автоматического построения кусочно-линейной аппроксимации заданной функции с неравномерной решеткой. Алгоритм минимизирует погрешность аппроксимации при заданном числе точек решетки.

Развитый подход реализован на модельных задачах построения кусочно-линейной аппроксимации для непрерывных функций, заданных аналитически, и дискретных функций, заданных таблично.

Численные эксперименты показали преимущество предложенного алгоритма по сравнению со стандартной аппроксимацией, порожденной равномерной решеткой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сукиасян Г.С., Енокян К.Р., Мелконян Т.Р., Оганнисян А.А.** Об автоматическом построении экономной аппроксимации решений краевых задач // Известия НАН РА и НПУА. Сер. ТН.- 2017.- Т. 70, № 1.- С. 109-114.
2. **Терзян А.А., Сукиасян Г.С.** К оценке погрешности численного решения трехмерного уравнения Лапласа с **нерегулярной** сеткой // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2000. - Т. 53, №3. – С. 359-363.

3. **Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Пароникян А.Е.** Об оптимизации сетки для расчета магнитных полей методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2005. - Т. 58, № 3. - С. 570-578.
4. **Боровиков С.Н.** Метод построения нерегулярных тетраэдральных расчетных сеток в произвольных трехмерных областях с криволинейными границами: Дис. … к.т.н.- М., 2005.- 192 с.
5. **Березин И.С., Жидков Н.П.** Методы вычислений. - М.: ФИЗМАТГИЗ, 1962.- 464 с.
6. **Alaei M.E.** On numerical comparison between European and Asian options // Caspian Journal of Computational & Mathematical Engineering. – 2017. - № 1. - P.44 - 57.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 17.10.2017.

Կ.Ռ. ԵՆՈՔՅԱՆ, Մ.Է. ԱԼԱՅԵԻ, Հ.Ս. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ

ԱՆԿԱՆՈՆ ՑԱՆՑԻ ՄԻՋՈՑՈՎ ԿՏՈՐ-ԳԾԱՅԻՆ ԱՎՏՈՄԱՏԱՑՎԱԾ ՄՈՏԱՐԿՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Առաջարկված է աբսցիսների առանցքի վրա անկանոն ցանցի միջոցով անընդհատ ֆունկցիայի կտոր-գծային մոտարկմամբ ավտոմատացված կառուցման ալգորիթմ: Ալգորիթմը նվազեցնում է մոտարկման սխալանքը ցանցի կետերի ֆիքսված քանակի դեպքում: Մշակված մոտեցումն իրագործված է տարբեր ֆունկցիաների մոդելների վրա, որոնք տրված են անալիտիկորեն կամ աղյուսակով: Թվային փորձարկումները ցույց են տվել առաջարկվող ալգորիթմի առավելությունը՝ ի համեմատ հավասարաչափ ցանցով ստանդարտ մոտարկման:

Առանցքային բառեր. կտոր-գծային մոտարկում, անկանոն ցանց:

K.R. YENOKYAN, M.E. ALAEI, H.S. SUKIASYAN

AUTOMATIC CONSTRUCTION OF PIECEWISE-LINEAR APPROXIMATION WITH AN IRREGULAR LATTICE

An algorithm for the automatic construction of piecewise-linear approximation of continuous function with an irregular lattice on the abscissa axis is proposed. The algorithm minimizes the approximation error for the given number of lattice points. The developed approach is implemented on the models of functions determined in the analytical and tabular forms. Numerical experiments have shown the advantage of the proposed algorithm in comparison with the standard approximation generated by a regular lattice.

Keywords**:** piecewise-linear approximation, irregular lattice.