

УДК 621.317

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ
УПРАВЛЕНИЯ

С.О. СИМОНЯН, Г.В. АДАМЯН, А.В. МЕЛИКЯН

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КУБИЧЕСКИХ
МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ (I)
(Прямой подход)**

Рассмотрены однопараметрические кубические матричные уравнения, для решения которых предложены аналитический, а также последовательный и параллельный численно-аналитические методы решения. Аналитический метод служит основой для разработки численно-аналитических методов, базирующихся на дифференциальных преобразованиях. Для всех методов получены соответствующие условия разрешимости задачи.

Ключевые слова: однопараметрические кубические матричные уравнения, аналитические и численно-аналитические методы решения, условия разрешимости задачи, современные средства информационных технологий.

Введение. В работе [1] предложен спектральный метод решения однопараметрических квадратных матричных уравнений и получены условия разрешимости задачи; в работе [2] - декомпозиционные гиперматрично-блочные аналитический, а также последовательный и параллельный численно-аналитические методы решения таких же уравнений, где также получены соответствующие условия разрешимости задачи; в работе [3] - спектральный метод решения однопараметрических обобщённых квадратных матричных уравнений, охватывающие как частные случаи однопараметрические квадратные матричные уравнения, однопараметрические видоизменённые квадратные матричные уравнения, однопараметрические непрерывные матричные уравнения Сильвестра, однопараметрические матричные уравнения Ляпунова, однопараметрические приведенные обобщённые квадратные матричные уравнения, однопараметрические матричные уравнения Риккати и др. Получены условия разрешимости задач. И, наконец, в работе [4] разработаны декомпозиционные гиперматрично-блочные численно-аналитические методы решения. Получены соответствующие условия разрешимости задачи.

При численно-аналитических методах основным математическим аппаратом служили дифференциальные преобразования Г.Е. Пухова [5]. Кроме того, во всех работах [1-4] приведены модельные примеры, иллюстрирующие вычислительную эффективность предложенных методов.

В настоящей работе рассматриваются однопараметрические кубические матричные уравнения

$$A_0(t) \cdot X^3(t) + A_1(t) \cdot X^2(t) + A_2(t) \cdot X(t) + A_3(t) = [0], \quad (1)$$

где $A_0(t)$, $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$ - однопараметрические квадратные матрицы порядка m , а $X(t)$ - однопараметрическая квадратная матрица также порядка m , подлежащая определению. Здесь заметим, что если степенное матричное уравнение имеет конечное число решений, то это число в общем случае $i \leq C_{mn}^n$, где n - степень уравнения, а m - порядок матричных коэффициентов [6-9].

Матричное уравнение (1) порождает частные задачи, такие как:

а) если $A_3(t) = 0$, то:

либо

$$X(t) = 0,$$

либо

$$A_0(t) \cdot X^2(t) + A_1(t) \cdot X(t) + A_2(t) = 0,$$

методы решения которых рассмотрены в [1-4];

б) если $A_2(t) = A_3(t) = 0$, то:

либо

$$X(t) = 0,$$

либо

$$A_0(t) \cdot X(t) + A_1(t) = 0,$$

откуда

$$X(t) = -A_0^{-1}(t) \cdot A_1(t),$$

при котором условиями разрешимости задачи служат соотношения

$$\text{rang } A_0(t) = m, \quad \forall t;$$

в) если $A_0(t) = 0$, то

$$A_1(t) \cdot X^2(t) + A_2(t) \cdot X(t) + A_3(t) = 0,$$

что, очевидно, совпадает со случаем "а".

Естественно, можно рассмотреть и другие частные случаи, на которых, однако, здесь останавливаться не будем.

Математический аппарат

1. Аналитический метод решения. Однопараметрическое кубическое матричное уравнение (1) представим в виде следующей эквивалентной матричной системы второго порядка:

$$\begin{cases} A_0(t) \cdot X(t) \cdot Y(t) + A_1(t) \cdot Y(t) + A_2(t) \cdot X(t) + A_3(t) = [0], \\ X^2(t) - Y(t) = [0], \end{cases} \quad (2)$$

или в виде эквивалентной гиперматрично-гипервекторно-блочной системы

$$\begin{bmatrix} A_0(t) & A_0(t) \cdot X(t) + A_1(t) \\ X(t) & -E \end{bmatrix}_{2m \times 2m} \cdot \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}_{2m \times m} + \begin{bmatrix} A_3(t) \\ 0 \end{bmatrix}_{2m \times m} = \\ = D(t) \cdot \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_3(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

с дополнительной неизвестной матрицей $Y(t)$ также порядка m .

При условии полноранговости матрицы $D(t)$, т.е. условия разрешимости задачи (или условия регулярности)

$$\text{rang } D(t) = 2m, \quad \forall t, \quad (4)$$

из представления (3) будем иметь итерационную вычислительную схему

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}_{(q+1)} = -D^{-1}(t)_{(q)} \cdot \begin{bmatrix} A_3(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

или, аналогично [4], вычислительную схему

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}_{(q+1)} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}_{(q)} - D^{-1}(t)_{(q)} \cdot \begin{bmatrix} A_3(t) \\ 0 \end{bmatrix} \right], \quad (6)$$

где q - номер итераций.

2. Численно-аналитические методы решения. Рассмотрим применение дифференциальных преобразований для решения гиперматрично-гипервекторно-блочной системы (3), допустив, что для всех матричных элементов этой системы имеют место следующие дифференциальные преобразования [5]:

$$A_0(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K A_0(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v} \quad \overline{\cdot} \quad A_0(t) = \aleph_0(t, t_v, H, A_0(K)), \quad (7)$$

$$A_1(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K A_1(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v} \quad \overline{\cdot} \quad A_1(t) = \aleph_1(t, t_v, H, A_1(K)), \quad (8)$$

$$A_2(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K A_2(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v} \quad \overline{\cdot} \quad A_2(t) = \aleph_2(t, t_v, H, A_2(K)), \quad (9)$$

$$A_3(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K A_3(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v} \quad \overline{\cdot} \quad A_3(t) = \aleph_3(t, t_v, H, A_3(K)), \quad (10)$$

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K X(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v} \quad \overline{\cdot} \quad X(t) = \aleph_4(t, t_v, H, X(K)), \quad (11)$$

$$Y(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K Y(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v} \quad \overline{\cdot} \quad Y(t) = \aleph_5(t, t_v, H, Y(K)), \quad (12)$$

где $A_0(K)$, $A_1(K)$, $A_2(K)$, $A_3(K)$, $X(K)$, $Y(K)$ - матричные дискреты однопараметрических матриц $A_0(t)$, $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$, $X(t)$, $Y(t)$ соответственно; H - масштабный коэффициент; $K = \overline{0, \infty}$ - целочисленный аргумент; t_v - центр аппроксимации; $\aleph_0(\bullet)$ - $\aleph_5(\bullet)$ - аппроксимирующие функции, восстанавливающие матрицы-оригиналы $A_0(t)$, $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$, $X(t)$, $Y(t)$ соответственно.

Последовательный численно-аналитический метод решения. Итак, учитывая дифференциальные преобразования (7)-(12), переведем нелинейную гиперматрично-гипервекторно-блочную систему (3) из области оригиналов в область дифференциальных изображений. При этом будем иметь:

при $K=0$:

$$\begin{bmatrix} A_2(0) & A_0(0) \cdot X(0) + A_1(0) \\ X(0) & -E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A_3(0) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

откуда

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{bmatrix}_{(q+1)} = - \begin{bmatrix} A_2(0) & A_0(0) \cdot X(0) + A_1(0) \\ X(0) & -E \end{bmatrix}_{(q)}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A_3(0) \\ 0 \end{bmatrix} = D^{-1}(0, 0)_{(q)} \cdot \begin{bmatrix} A_3(0) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

если, конечно, имеют место условия гиперрегулярности

$$\text{rang } D(0, 0)_{(q)} = 2m, \quad \forall q; \quad (15)$$

при $K=1$:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c|c} A_2(0) & A_0(0) \cdot X(0) + A_1(0) \\ \hline X(0) & -E \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} X(1) \\ Y(1) \end{array} \right] + \\ & + \left[\begin{array}{c|c} A_2(1) & A_0(0) \cdot X(1) + A_0(1) \cdot X(0) + A_1(1) \\ \hline X(1) & 0 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} X(0) \\ Y(0) \end{array} \right] = - \left[\begin{array}{c} A_3(1) \\ 0 \end{array} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

откуда при выполнении условия (15) получим

$$\left[\begin{array}{c} X(1) \\ Y(1) \end{array} \right]_{(q+1)} = -D^{-1}(0, 0) \cdot \left[\begin{array}{c} A_3(1) \\ 0 \end{array} \right] + D(1, 0; 0, 1)_{(q)} \cdot \left[\begin{array}{c} X(0) \\ Y(0) \end{array} \right]; \quad (17)$$

при $K=2$:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c|c} A_2(0) & A_0(0) \cdot X(0) + A_1(0) \\ \hline X(0) & -E \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} X(2) \\ Y(2) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} A_2(1) & A_0(0) \cdot X(1) + A_0(1) \cdot X(0) + A_1(1) \\ \hline X(1) & 0 \end{array} \right] \times \\ & \times \left[\begin{array}{c} X(1) \\ Y(1) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} A_2(2) & A_0(0) \cdot X(2) + A_0(1) \cdot X(1) + A_0(2) \cdot X(0) + A_1(2) \\ \hline X(2) & 0 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} X(0) \\ Y(0) \end{array} \right] = \\ & = - \left[\begin{array}{c} A_3(2) \\ 0 \end{array} \right], \end{aligned} \quad (18)$$

откуда при выполнении условия (15) имеем

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} X(2) \\ Y(2) \end{array} \right]_{(q+1)} = -D^{-1}(0, 0) \cdot \left[\begin{array}{c} A_3(2) \\ 0 \end{array} \right] + D(1, 0; 0, 1) \cdot \left[\begin{array}{c} X(1) \\ Y(1) \end{array} \right] + \\ & + D(2, 0; 1, 1; 0, 2)_{(q)} \cdot \left[\begin{array}{c} X(0) \\ Y(0) \end{array} \right]; \end{aligned} \quad (19)$$

⋮

при $K=K$:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c|c} A_2(0) & A_0(0) \cdot X(0) + A_1(0) \\ \hline X(0) & -E \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} X(K) \\ Y(K) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} A_2(1) & A_0(0) \cdot X(1) + A_0(1) \cdot X(0) + A_1(1) \\ \hline X(1) & 0 \end{array} \right] \times \\ & \times \left[\begin{array}{c} X(K-1) \\ Y(K-1) \end{array} \right] + \dots + \left[\begin{array}{c|c} A_2(K-1) & A_0(0) \cdot X(K-1) + \dots + A_0(K-1) \cdot X(0) + A_1(K-1) \\ \hline X(K-1) & 0 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} X(1) \\ Y(1) \end{array} \right] + \\ & + \left[\begin{array}{c|c} A_2(K) & A_0(0) \cdot X(K) + \dots + A_0(K) \cdot X(0) + A_1(K) \\ \hline X(K) & 0 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} X(0) \\ Y(0) \end{array} \right] = - \left[\begin{array}{c} A_3(K) \\ 0 \end{array} \right], \end{aligned} \quad (20)$$

откуда при выполнении условия (15) получим

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} X(K) \\ Y(K) \end{bmatrix}_{(q+1)} &= -D^{-1}(0,0) \cdot \begin{bmatrix} A_3(K) \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{r=0}^{K-1} \begin{bmatrix} A_2(K-r) & \sum_{r=0}^K A_0(r) \cdot X(K-r) + A_1(K-r) \\ X(K-r) & -E \cdot \delta(K-r) \end{bmatrix}_{(q)} \times \\
&\times \begin{bmatrix} X(r) \\ Y(r) \end{bmatrix} = -D^{-1}(0,0) \cdot \begin{bmatrix} A_3(K) \\ 0 \end{bmatrix} + D(1,0;0,1) \cdot \begin{bmatrix} X(K-1) \\ Y(K-1) \end{bmatrix} + D(2,0;1,1;0,2)_{(q)} \cdot \begin{bmatrix} X(K-2) \\ Y(K-2) \end{bmatrix} + \\
&+ \dots + D(K-1,0;K-2,1;\dots;1,K-2;0,K-1) \cdot \begin{bmatrix} X(1) \\ Y(1) \end{bmatrix} + \\
&+ D(K,0;K-1,1;\dots;1,K-1;0,K)_{(q)} \cdot \begin{bmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{bmatrix} = \\
&= -D^{-1}(0,0) \cdot \begin{bmatrix} A_3(K) \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{r=1}^K D(r,0;r-1,1;\dots;1,r-1;0,r) \cdot \begin{bmatrix} X(K-r) \\ Y(K-r) \end{bmatrix}. \quad (21)
\end{aligned}$$

Замечание 1. Очевидно, основная вычислительная трудность при организации последовательных численных процедур (14), (17), (19), ..., (21) связана с решением нелинейной системы (13), имеющей в общем случае множество решений $\begin{bmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{bmatrix}_i$, $i \leq C_{mn}^n$. Остальные матричные дискреты $\begin{bmatrix} X(r) \\ Y(r) \end{bmatrix}_i$, $r = \overline{1, K}$ определяются рекуррентно в соответствии с линейными системами (16), (18), ..., (20), а восстановление решений $\begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}_i$ осуществляется в соответствии с (11), (12), при котором легко решается и так называемая проблема ветвления [10, стр. 130-138].

Замечание 2. Учитывая (6), в соответствии с (13), (16), (18), ..., (20), в отличие от (14), (17), (19), ..., (21), можно организовать и более гибкие вычислительные схемы ньютоновского типа по определению неизвестных матричных дискретов, например,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} X(K) \\ Y(K) \end{bmatrix}_{(q+1)} &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} X(K) \\ Y(K) \end{bmatrix}_{(q)} - D^{-1}(0,0) \cdot \begin{bmatrix} A_3(K) \\ 0 \end{bmatrix} + \right. \\
&+ \left. \sum_{r=1}^K D(r,0;r-1,1;\dots;1,r-1;0,r) \cdot \begin{bmatrix} X(K-r) \\ Y(K-r) \end{bmatrix} \right\} \quad (22)
\end{aligned}$$

или др.

Параллельный численно-аналитический метод решения. Объединив гиперматрично-гипервекторно-блочные уравнения (13), (16), (18), ..., (20) в одно целое, получим следующую суперматрично-супервекторно-блочную систему:

$$\begin{bmatrix} D(0,0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D(1,0;0,1) & D(0,0) & 0 & \dots & 0 \\ D(2,0;1,1;0,2) & D(1,0;0,1) & D(0,0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D(K,0;\dots;0,K) & D(K-1,0;\dots;0,K-1) & D(K-2,0;\dots;0,K-2) & \dots & D(0,0) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{X(0)}{Y(0)} \\ \frac{X(1)}{Y(1)} \\ \frac{X(2)}{Y(2)} \\ \vdots \\ \frac{X(K)}{Y(K)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{A_3(0)}{0} \\ \frac{A_3(1)}{0} \\ \frac{A_3(2)}{0} \\ \vdots \\ \frac{A_3(K)}{0} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

или в компактной записи:

$$D(\bullet)_{2(K+1)m \times 2(K+1)m} \cdot \begin{bmatrix} \frac{X}{Y} \\ \bullet \end{bmatrix}_{2(K+1)m \times m} = - \begin{bmatrix} \frac{A_3}{0} \\ \bullet \end{bmatrix}_{2(K+1)m \times m}, \quad (24)$$

откуда при выполнении условия суперрегулярности

$$rang D(\bullet) = 2(K+1)m \quad (25)$$

получим

$$\begin{bmatrix} \frac{X}{Y} \\ \bullet \end{bmatrix}_{(q+1)} = -D^{-1}(\bullet)_q \cdot \begin{bmatrix} \frac{A_3}{0} \\ \bullet \end{bmatrix} \quad (26)$$

и, следовательно, в соответствии с (11), (12), решение исходной задачи.

Естественно, для решения задачи (23) или (24) можно организовать и другие вычислительные схемы [11].

Замечание 3. Очевидно, что матричное уравнение (1) можно представить и в виде других, аналогичных (2) систем с дальнейшими аналитическими, а также последовательными и параллельными численно-аналитическими методами их решения.

Заключение. Таким образом, основные вычислительные операции по решению рассматриваемой задачи сводятся к рекуррентным численным процедурам на первом этапе вычислений и к простой операции суммирования по восстановлению матричных оригиналов-решений на втором этапе вычислений. Для реализации первого этапа вычислений, естественно, эффективно могут быть использованы средства современных информационных технологий [12]. Что касается реализации второго этапа вычислений, то, очевидно, это не представляет какой-либо трудности.

Исследование проведено в научно-исследовательской базовой лаборатории “Системный анализ” НПУА.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Симонян С.О.** К решению однопараметрических квадратных матричных уравнений // Вестник ИАА. –2016. - Т. 13, №4. – С. 463-471.
2. **Симонян С.О.** Гиперматрично-блочный численно-аналитический метод решения однопараметрических квадратных матричных уравнений // Известия НАН РА и НПУА. Сер. ТН.-2016.- Т. LXIX, №4. – С. 422-430.
3. **Симонян С.О.** Метод решения однопараметрических обобщённых квадратных матричных уравнений // Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиотехника.- 2016. - №2. -С. 12-23.
4. **Симонян С.О.** Декомпозиционные гиперматрично-блочные численно-аналитические методы решения однопараметрических квадратных матричных уравнений // Известия НАН РА и НПУА. Сер. ТН.-2017.- Т. LXX, №1. – С. 95-108.
5. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений.-Киев: Наукова думка, 1984. – 420 с.
6. **Гельфанд С.И.** О числе решений квадратного уравнения // Журнал “Глобус-1”. – 2000. - С. 124-134.
7. **Козлов В.В.** Спектр линейной гамильтоновой системы и симплектическая геометрия комплексного пространства Артина // Доклады РАН. Математика.- 2003.- Т. 393, №4. -С. 453-455.
8. **Козлов В.В.** Ограничения квадратичных форм на лагранжевы плоскости, квадратные матричные уравнения и гироскопическая стабилизация // Функциональный анализ и его приложения.- 2005.- Т.39, вып.4.- С. 32-47.
9. **Палин В.В.** О разрешимости квадратных матричных уравнений // Вестник Московского государственного университета. Серия 1: Математика, механика.- 2008.- №6. -С. 36-41.

10. **Симонян С.О., Аветисян А.Г.** Прикладная теория дифференциальных преобразований. – Ереван: Изд-во ГИУА “Чартарагет”, 2010. – 364 с.
11. **Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.** Параллельные вычисления.- СПб.: “БХВ-Петербург”, 2004.- 608 с.
12. **Stroustrup B.** The C++ Programming Language. 4th ed.- Boston: Addison-Wesley Professional, 2013.- 1368 p.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 05.09.2017.

Ս.Հ. ՄԻՄՈՆՅԱՆ, Գ.Վ. ԱԴԱՄՅԱՆ, Ա.Վ. ՄԵԼԻԿՅԱՆ

**ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԽՈՐԱՆԱԴՂ ՄԱՏՐԻՑԱՑԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ
ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ (I)
(Ուղղակի մոտեցում)**

Դիտարկված են միապարամետրական խորանարդ մատրիցային հավասարումները, որոնց լուծման համար առաջարկված են անալիտիկ, ինչպես նաև հաջորդական և զուգահեռ թվա-անալիտիկ եղանակներ: Անալիտիկ եղանակը հիմք է ծառայում թվա-անալիտիկ եղանակների մշակման համար, որոնք հիմնված են դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա: Բոլոր եղանակների համար էլ ներկայացված են խնդրի լուծելիության համապատասխան պայմանները:

Առանցքային բառեր. միապարամետրական խորանարդ մատրիցային հավասարումներ, լուծման անալիտիկ և թվա-անալիտիկ եղանակներ, խնդրի լուծելիության պայմաններ, տեղեկատվական տեխնոլոգիաների ժամանակակից միջոցներ:

S.H. SIMONYAN, G.V. ADAMYAN, A.V. MELIKYAN

**METHODS OF SOLVING ONE-PARAMETRIC CUBIC MATRIX EQUATIONS (I)
(Direct approach)**

One-parametric cubic matrix equations are considered for whose solution analytical and sequential and parallel numerical-analytical methods of solution are proposed. The analytical method serves as a basis for the development of numerical and analytical methods based on differential transformations. For all methods, corresponding solvability conditions for the problem are obtained.

Keywords: one-parametric cubic matrix equations, analytical and numerical-analytical methods of solution, solvability conditions for the problem, modern means of information technologies.