

Г.А. ГЕВОРКЯН

**ПРИНЦИП ФОРМАЛЬНОЙ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКОЙ  
ОПТИМИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА  
МНОГОЗВЕННЫХ СИСТЕМ**

Развивается концепция построения формализмов и методов для описания и исследования многозвенных динамических систем на основе оптимальной дифференциации кинематической цепи. Показано, что оптимальному разбиению кинематической цепи на суперэлементы соответствует метод Ньютона-Эйлера, или метод без обращения матрицы масс рассматриваемых систем.

**Ключевые слова:** суперэлемент, динамические системы, метод Ньютона-Эйлера.

**Введение.** Понятие *суперэлемента* давно вошло в терминологический аппарат пособий по методу конечных элементов [1, 2]. Как известно, под *элементом* модели заданной сплошной среды понимается некоторый собирательный набор свойств – геометрических, физико-механических, электромагнитных, биохимических и т.д., единообразно присущих каждой отдельно взятой структурной единице, обладающей также фундаментальным математическим признаком стягиваемости к точке как бесконечно малой величины. Суперэлемент же отличается от элемента модели сплошной среды только тем, что априори предполагается обделенным вышеназванным признаком конечного элемента стягиваемости к точке, представляя собой, таким образом, строго конечную величину [1].

В динамике многозвенных систем понятие суперэлемента возникло вследствие формирования на основе метода Ньютона-Эйлера *кинетостатического элемента* [3]; кинетостатический элемент представляет собой схематическую модель кинематической цепи, выполняющую первоначально роль двойного преобразователя: положений, скоростей и ускорений – в прямом направлении, а усилий – в обратном. Таким образом, первичное понятие кинетостатического элемента послужило методологической основой, фундаментом для саморазвития и последующих построений конкретных моделей преобразователей движения и усилий кинематических цепей многозвенных динамических систем, которые стали также называться *суперэлементами* [4].

При описании движения динамических систем выбор методов и формализмов, казалось бы, всегда является произвольным. Однако при строгом раз-

мышлении выясняется, что существуют глубокие связи между условно принятыми за структурные единицы частями кинематических цепей и математической терминологией, призванной для их адекватного выражения. В самом деле, вполне естественно, что существующие различия между разными модификациями суперэлементов исследуемых многозвенных динамических систем должны непосредственно отражаться на математическом языке описания их движения.

### 1. Метод Ньютона-Эйлера к решению первой задачи динамики.

Несколько десятилетий назад в научной литературе появился метод эффективного численного решения первой основной задачи динамики для простых разомкнутых кинематических цепей, предложенный Лу, Уокером и Полем [5]. Этот метод был впоследствии назван *методом Ньютона-Эйлера* и послужил отправным пунктом для создания так называемых *сверхпрогрессивных формализмов* (*very efficient formulations*), или *формализмов степени сложности  $O(n)$*  [3].

Рассмотрим рекурсивную схему численного расчета первой основной задачи динамики манипулятора с абсолютно жесткими звеньями, руководствуясь принципиальной схемой кинетостатического элемента первого типа. Предполагая звенья кинематической цепи манипулятора связанными вращательными парами, обозначим их через  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , а стойку – через  $C_0$ . Вычислительный процесс формализма для некоторого фиксированного момента времени  $t^*$  предполагает осуществление *прямой и обратной рекурсий* (рис. 1) [5].

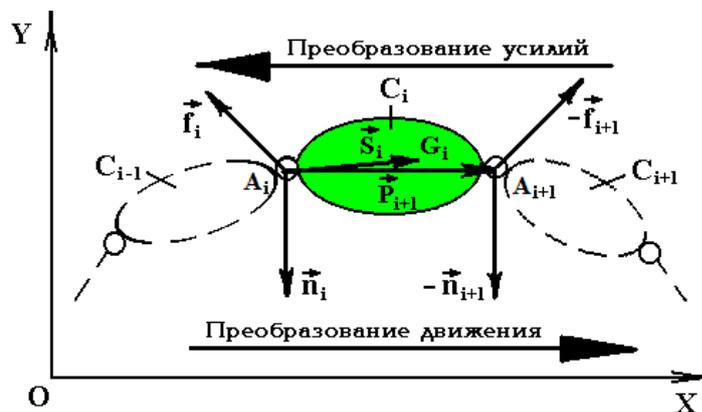


Рис. 1. Решение первой основной задачи динамики методом Ньютона-Эйлера

Прямая рекурсия включает в себя кинематический расчет звеньев цепи в направлении от стойки манипулятора  $C_0$  к его исполнительному органу  $C_n$  (рис. 1) и осуществляется с помощью следующих инициализаций [5]:

$$\begin{cases} \vec{v}_0 = \vec{0}_3, \\ \vec{\omega}_0 = \vec{0}_3; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \vec{v}_0 = \vec{g} = -[0, g, 0]^T, \\ \vec{\omega}_0 = \vec{0}_3. \end{cases} \quad (2)$$

Обратная рекурсия, подразумевающая силовой расчет кинематической цепи в направлении от звена  $C_n$  к стойке манипулятора  $C_0$  (рис. 1), производится в силу наперед известных усилий на конце исполнительного органа  $C_n$  [5]:

$$\begin{cases} \vec{f}_n = \vec{f}_n^t, \\ \vec{n}_n = \vec{n}_n^t. \end{cases} \quad (3)$$

Первая, восходящая, рекурсия обеспечивает нахождение линейных скоростей и ускорений точек  $A_i$  и  $G_i$  вместе с угловыми скоростями и ускорениями звеньев  $C_i$  (рис. 1) для  $i = 1, \dots, n$  в соответствии с зависимостями [5]

$$\begin{cases} {}^i\vec{v}_i = {}^iR_{i-1} \cdot {}^{i-1}\vec{v}_{i-1}, \\ {}^i\vec{\omega}_i = {}^iR_{i-1} \cdot {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} + \dot{q}_i^t \vec{a}_i; \end{cases} \quad (4)$$

$${}^i\vec{v}_{G_i} = {}^i\vec{v}_i + {}^i\vec{\omega}_i \times {}^i\vec{S}_i; \quad (5)$$

$$\begin{cases} {}^i\vec{v}_i = {}^iR_{i-1} \cdot [{}^{i-1}\vec{v}_{i-1} + {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\vec{P}_i + {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \times ({}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\vec{P}_i)], \\ {}^i\vec{\omega}_i = {}^iR_{i-1} \cdot [{}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} + {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \times (\dot{q}_i^t \vec{a}_i)] + \dot{q}_i^t \vec{a}_i; \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} {}^i\vec{v}_i = {}^iR_{i-1} \cdot [{}^{i-1}\vec{v}_{i-1} + {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\vec{P}_i + {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \times ({}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\vec{P}_i)], \\ {}^i\vec{\omega}_i = {}^iR_{i-1} \cdot [{}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} + {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \times (\dot{q}_i^t \vec{a}_i)] + \dot{q}_i^t \vec{a}_i; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} {}^i\vec{v}_i = {}^iR_{i-1} \cdot [{}^{i-1}\vec{v}_{i-1} + {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\vec{P}_i + {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \times ({}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\vec{P}_i)], \\ {}^i\vec{\omega}_i = {}^iR_{i-1} \cdot [{}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} + {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \times (\dot{q}_i^t \vec{a}_i)] + \dot{q}_i^t \vec{a}_i; \end{cases} \quad (8)$$

$${}^i\vec{v}_{G_i} = {}^i\vec{v}_i + {}^i\vec{\omega}_i \times {}^i\vec{S}_i + {}^i\vec{\omega}_i \times ({}^i\vec{\omega}_i \times {}^i\vec{S}_i), \quad (9)$$

где  ${}^{i-1}R_i$  символизирует матрицу поворота звена  $C_i$  относительно звена  $C_{i-1}$  и  ${}^i\vec{a}_i$  обозначает единичный вектор, направленный вдоль положительной полуоси вращения  $i$ -й кинематической пары.

Вторая, нисходящая, рекурсия предусматривает определение сил и моментов в точках  $A_i$  сопряжений звеньев  $C_i$  (рис. 1) для  $i = n, \dots, 1$  на основании соотношений [5]

$$\begin{cases} {}^i\vec{f}_i = {}^iR_{i-1}^T \cdot {}^{i+1}\vec{f}_{i+1} + m_i {}^i\vec{v}_{G_i}, \\ {}^i\vec{n}_i = {}^iR_{i-1}^T \cdot {}^{i+1}\vec{n}_{i+1} + {}^iI_{G_i} \cdot {}^i\vec{\omega}_i + {}^i\vec{\omega}_i \times ({}^iI_{G_i} \cdot {}^i\vec{\omega}_i) + {}^i\vec{P}_{i+1} \times ({}^{i+1}R_i^T \cdot {}^{i+1}\vec{f}_{i+1}) + {}^i\vec{S}_i \times (m_i {}^i\vec{v}_{G_i}), \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} {}^i\vec{f}_i = {}^iR_{i-1}^T \cdot {}^{i+1}\vec{f}_{i+1} + m_i {}^i\vec{v}_{G_i}, \\ {}^i\vec{n}_i = {}^iR_{i-1}^T \cdot {}^{i+1}\vec{n}_{i+1} + {}^iI_{G_i} \cdot {}^i\vec{\omega}_i + {}^i\vec{\omega}_i \times ({}^iI_{G_i} \cdot {}^i\vec{\omega}_i) + {}^i\vec{P}_{i+1} \times ({}^{i+1}R_i^T \cdot {}^{i+1}\vec{f}_{i+1}) + {}^i\vec{S}_i \times (m_i {}^i\vec{v}_{G_i}), \end{cases} \quad (11)$$

где  ${}^iI_{G_i}$  – тензор инерции звена  $C_i$  относительно центра масс  $G_i$ .

Вследствие проведенных рекурсий (7) – (12) и (13), (14) представляется возможным выделение из векторных уравнений (14) требуемых выражений для вычисления обобщенных моментов. Эти выражения записываются следующим образом [5]:

$$\Gamma_i = {}^i\vec{a}_i \cdot {}^i\vec{n}_i, \quad i=1, \dots, n. \quad (15)$$

**2. Кинестатический элемент первого типа.** Символическим परिфразом вышеизложенного метода численного решения первой основной задачи динамики оказалась схема *кинестатического элемента первого типа* (élément cinéostatique) (рис. 2) [3, 4].



Рис. 2. Функциональная схема кинестатического элемента первого типа

Принцип функционирования кинестатического элемента первого типа заключается в обоюдном преобразовании основных кинематических и динамических характеристик в зависимости от законов изменения конфигурационных параметров [3]: в трансформации движения, т.е. положений, скоростей и ускорений, при переходе от входящей (E) к выходящей системе отсчета (S) и в трансформации усилий, т.е. сил и моментов, при осуществлении обратного перехода от выходящей (S) к входящей системе отсчета (E) (рис. 2).

**3. Метод Ньютона-Эйлера к решению второй задачи динамики.** Численное решение второй основной задачи динамики методом Ньютона-Эйлера предлагается в символах формальной терминологии, развернутой в шестимерном пространстве [6], согласно которой изначально принимаются следующие положения:

$$\begin{cases} {}^i\vec{V}_i = [{}^i\vec{v}_i^T, {}^i\vec{\omega}_i^T]^T, & (16) \\ {}^i\vec{F}_i = [{}^i\vec{F}_i^T, {}^i\vec{M}_i^T]^T. & (17) \end{cases}$$

Алгоритм численного решения второй задачи динамики, в отличие от предыдущего случая, включает в себя три рекурсии для каждого момента времени  $t^*$ .

1 – я рекурсивная процедура для  $i = 1, \dots, n$  предполагает вычисление матриц  ${}^i\mathbf{R}_{i-1}$ ,  ${}^i\mathbf{T}_{i-1}$ ,  ${}^i\mathbf{J}_i$ , векторов  ${}^i\tilde{\mathbf{C}}_i$ ,  ${}^i\tilde{\mathbf{h}}_i$  и скаляра  $\tau_i$  [6], после чего осуществляется кинематический расчет кинематической цепи по следующему восходящему рекурсивному циклу [6]:

$${}^i\tilde{\mathbf{V}}_i = {}^i\mathbf{T}_{i-1} \cdot {}^{i-1}\tilde{\mathbf{V}}_{i-1} + \dot{q}_i^r {}^i\tilde{\mathbf{a}}_i, \quad (18)$$

подчинив их предварительно инициализации:  ${}^0\tilde{\mathbf{V}}_0 = \tilde{\mathbf{0}}_{N_0}$ .

2 – я рекурсивная процедура для  $i = n, \dots, 1$  после инициализаций [6]:

$$\begin{cases} {}^n\mathbf{J}_{mm}^+ = {}^n\mathbf{J}_{mm}; \\ {}^n\tilde{\mathbf{C}}_n^{r+} = {}^n\tilde{\mathbf{C}}_n^r + {}^{n+1}\mathbf{T}_n^T \cdot {}^{n+1}\tilde{\mathbf{F}}_{n+1} = {}^n\tilde{\mathbf{C}}_n^r + {}^n\tilde{\mathbf{F}}_n^t \end{cases}$$

предусматривает определение вспомогательных инерционных параметров, в том числе особых матриц инерции и векторов гироскопических членов  ${}^i\mathbf{J}_i^+$ ,  ${}^i\tilde{\mathbf{C}}_i^+$ ,  $i = (n-1), \dots, 1$  по следующему нисходящему расчетному циклу [6]:

1. Нахождение:

$${}^i\mathbf{G}_i = {}^i\mathbf{J}_i^+ \cdot {}^i\mathbf{T}_{i-1}, \quad {}^i\tilde{\mathbf{p}}_i = {}^i\mathbf{J}_i^+ \cdot {}^i\tilde{\mathbf{h}}_i + {}^i\tilde{\mathbf{C}}_i \quad \text{и} \quad Z_i = \frac{1}{{}^i\tilde{\mathbf{a}}_i^T \cdot {}^i\mathbf{J}_i^+ \cdot {}^i\tilde{\mathbf{a}}_i}.$$

2. Вычисление для  $i \neq 1$ :

$${}^i\tilde{\mathbf{G}}_i = {}^i\mathbf{G}_i - Z_i {}^i\mathbf{J}_i^+ \cdot {}^i\tilde{\mathbf{a}}_i \cdot {}^i\tilde{\mathbf{a}}_i^T \cdot {}^i\mathbf{J}_i^+ \cdot {}^i\mathbf{T}_{i-1} \quad \text{и} \quad {}^i\tilde{\mathbf{p}}_i = {}^i\tilde{\mathbf{p}}_i + {}^i\mathbf{J}_i^+ \cdot {}^i\tilde{\mathbf{a}}_i (\tau_i - {}^i\tilde{\mathbf{a}}_i^T \cdot {}^i\tilde{\mathbf{p}}_i) Z_i.$$

3. Если  $i \neq 1$ , то рассчитать

$$\begin{cases} {}^{i-1}\mathbf{J}_{i-1}^+ = {}^{i-1}\mathbf{J}_{i-1} + {}^i\mathbf{T}_{i-1}^T \cdot {}^i\tilde{\mathbf{G}}_i, \\ {}^{i-1}\tilde{\mathbf{C}}_{i-1}^+ = {}^{i-1}\tilde{\mathbf{C}}_{i-1} + {}^i\mathbf{T}_{i-1}^T \cdot {}^i\tilde{\mathbf{p}}_i. \end{cases}$$

3 – я рекурсивная процедура для  $i = 1, \dots, n$  использует результаты вычислений, произведенных в процессе предшествующих кинематической и символической расчетных процедур, в целях осуществления динамического расчета кинематической цепи по следующему восходящему рекурсивному циклу [6]:

$$\ddot{q}_i^r = Z_i [\tau_i - {}^i\tilde{\mathbf{a}}_i^T \cdot ({}^i\mathbf{G}_i \cdot {}^{i-1}\tilde{\mathbf{V}}_{i-1} + {}^i\tilde{\mathbf{p}}_i)]; \quad (19)$$

$${}^i\tilde{\mathbf{V}}_i = {}^i\mathbf{T}_{i-1} \cdot {}^{i-1}\tilde{\mathbf{V}}_{i-1} + \ddot{q}_i^r {}^i\tilde{\mathbf{a}}_i + {}^i\tilde{\mathbf{h}}_i; \quad (20)$$

$${}^i\vec{F}_i = {}^i\mathbf{J}_i \cdot {}^i\vec{V}_i + {}^i\vec{C}_i, \quad \text{если требуется,} \quad (21)$$

принимая во внимание инициализацию  ${}^0\vec{V}_0 = -[{}^0\vec{g}^T, \vec{0}_3^T]^T$ .

4. **Кинестатический элемент второго типа.** Перейдем к рассмотрению схемы кинестатического элемента первого типа, отражающей численное решение второй основной задачи динамики методом Ньютона-Эйлера.

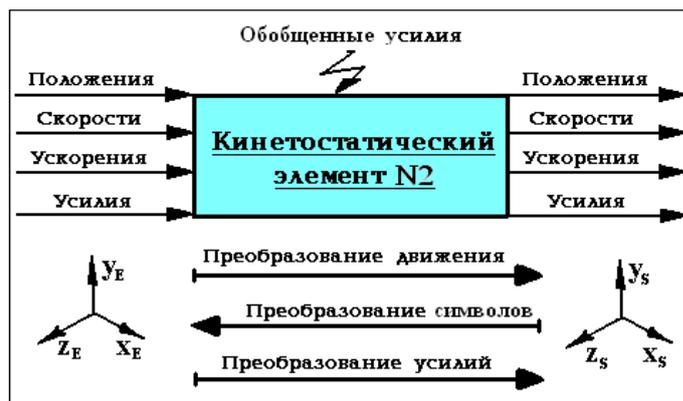


Рис. 3. Функциональная схема кинестатического элемента второго типа

Принцип функционирования кинестатического элемента второго типа заключается в тройственном преобразовании основных кинематических и динамических характеристик в зависимости от законов изменения конфигурационных параметров [6]: в трансформации движения, т.е. положений, скоростей и ускорений, при переходе от входящей (E) к выходящей системе отсчета (S), в символическом преобразовании от выходящей системы отсчета (S) к входящей (E) и, наконец, в трансформации усилий, т.е. сил и моментов, при осуществлении прямого перехода от входящей системы отсчета (E) к выходящей (S) (рис. 3).

5. **Метод Ньютона-Эйлера к решению смешанной задачи динамики.** Смешанная основная задача динамики применительно к решению дифференциальных уравнений движения упругих манипуляторов методом Ньютона-Эйлера была впервые сформулирована и решена на основе символического исчисления в работе [7].

Нетрудно заметить [4], что переход от второй основной задачи динамики к первой осуществляется путем обыкновенной замены символических параметров:

$$\begin{cases} {}^i\tilde{\mathbf{G}}_i = {}^i\mathbf{G}_i; \\ {}^i\tilde{\vec{p}}_i = {}^i\vec{p}_i + \vec{q}_i^T {}^i\mathbf{J}_i \cdot {}^i\vec{a}_i. \end{cases} \quad (22)$$

$$\quad (23)$$

В целях строгого разграничения двух типов задания законов движения в сопряжениях кинематической цепи (рис. 4) множество всех кинематических пар  $\{\mathbf{A}\} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  представляется в виде двух подмножеств  $\{\mathbf{A}'\} = \{A'_1, A'_2, \dots, A'_l\}$   $\{\mathbf{A}''\} = \{A''_1, A''_2, \dots, A''_m\}$ , обладающих очевидными свойствами:  $\{\mathbf{A}''\} \subseteq \{\mathbf{A}\}$ ,  $\{\mathbf{A}'\} \subseteq \{\mathbf{A}\}$ ,  $\{\mathbf{A}'\} \cup \{\mathbf{A}''\} = \{\mathbf{A}\}$  и  $l + m = n$ , где  $n$  – множество одно-подвижных вращательных или поступательных кинематических пар цепи. При этом для различения каждого из возможных типов законов движения в множестве  $\{\mathbf{A}\}$  вводится следующий идентификатор (рис. 4) [7]:

$$\chi_i = \begin{cases} 0, & \text{если в паре } i \text{ известно обобщенное усилие } \Gamma_i \\ 1, & \text{если в паре } i \text{ известно обобщенное ускорение } \ddot{q}_i^r \end{cases}, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (24)$$

В таком случае смешанная основная задача динамики для многозвенной кинематической цепи формулируется следующим образом [7]: в предположении, что заданы законы изменения обобщенных усилий  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, l$  и обобщенных ускорений  $\ddot{q}_k^r$ ,  $k = 1, \dots, m$ , принадлежащих соответственно подмножествам  $\{\mathbf{A}'\}$  и  $\{\mathbf{A}''\}$ , требуется определить законы изменения обобщенных усилий  $\Gamma_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  и обобщенных ускорений  $\ddot{q}_i^r$ ,  $i = 1, \dots, l$ , принадлежащих соответственно подмножествам  $\{\mathbf{A}''\}$  и  $\{\mathbf{A}'\}$ .

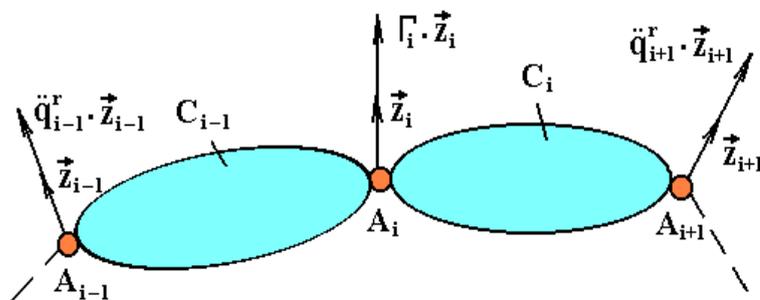


Рис. 4. Смешанные условия основной задачи динамики

При изложении смешанной основной задачи динамики многозвенных систем следует обратить внимание на то обстоятельство, что из двух типов рассмотренных выше кинетостатических элементов смешанной задачи динамики соответствует модификация второго типа, поскольку последняя включает в себя и функциональную схему первой.

**6. Оптимизация методов и формализмов путем разбиения кинематических цепей на суперэлементы.** Понятие кинетостатического элемента является абстрактным трафаретом организации трехкратно-рекурсивного про-

цесса динамического анализа кинематических цепей многозвенных систем, а следовательно, представляет собой всего лишь условную схему вычислительного процесса, характеризующую только его качественную сторону.

Выясняется, что количественным критерием эффективности вычислительного процесса выступает конкретное слияние структурных элементов кинематической цепи, условно принятое за структурную единицу [4].

Многочисленные исследования в области оптимизации вычислительного процесса динамического анализа многозвенных систем [4–8] показывают и подтверждают эффективность метода Ньютона-Эйлера в контексте сформулированной выше смешанной задачи динамики по отношению к методам, предполагающим обращение матрицы масс рассматриваемых систем. Поэтому методы, исключаящие процедуру обращения матрицы масс, принято называть *методами без обращения матрицы масс, или сверхпрогрессивными формализмами* [3, 4]. Эти методы обеспечивают пропорциональную зависимость между количеством производимых в процессе динамического расчета арифметических операций и размерностью кинематической цепи, в силу чего они получили и другое название – *методы степени сложности  $O(n)$*  [3, 4]. Нетрудно заметить, что метод Ньютона-Эйлера предусматривает в качестве суперэлемента кинематической цепи условную структурную единицу, образуемую так, как это схематически показано на рис. 5.



Рис. 5. Схема образования оптимального суперэлемента

С другой стороны, обращаясь к математическому языку описания метода Ньютона-Эйлера [6], или к *формализму  $R^6$* , объединяющему в себе компоненты *кинематического и динамического винтов* (16), (17), удостоверяемся в его оптимальности с точки зрения минимально возможного числа арифметических операций, производимых по ходу вычислительного процесса динамического анализа [6]. Очевидно, что принятой здесь терминологии, выражаемой обозначениями (16), (17), также соответствует суперэлемент на рис. 5.

Рассмотрим теперь для сравнения метод динамического анализа звеньев кинематической цепи с использованием процедуры обращения матрицы масс, основанный на идее ассимиляции суперэлемента со всей совокупностью звеньев многозвенной системы [8]:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{V}} = [{}^1\vec{\mathbf{V}}_1, {}^2\vec{\mathbf{V}}_2, \dots, {}^n\vec{\mathbf{V}}_n]^T, & (25) \\ \vec{\mathbf{F}} = [{}^1\vec{\mathbf{F}}_1, {}^2\vec{\mathbf{F}}_2, \dots, {}^n\vec{\mathbf{F}}_n]^T. & (26) \end{cases}$$

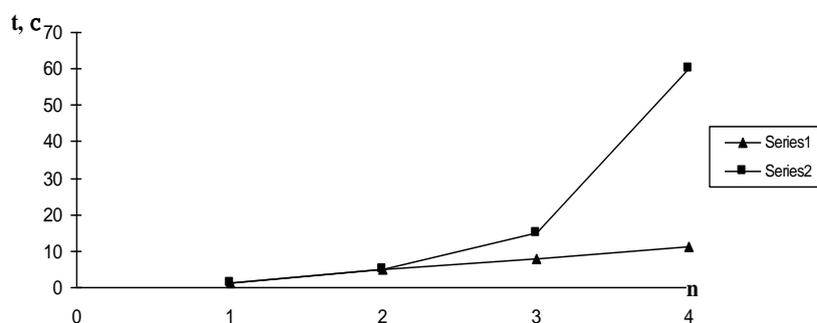


Рис. 6. Сравнительная оценка характеристик методов 1 –  $O(n)$  и 2 –  $O(n^2)$

На рис. 6 приводятся совмещенные графики расчетного времени ( $t$ ) в зависимости от размерности ( $n$ ), выработанные с использованием методов без обращения (прямая 1 на рис. 3) и с обращением (кривая 2 на рис. 3) матрицы масс исследуемых динамических систем вследствие решения смешанной задачи динамики применительно к одно-, двух-, трех- и четырехзвенному манипуляторам.

**Заключение.** Таким образом, подведены итоги многолетних исследований в области оптимизации динамического моделирования многозвенных систем с абсолютно жесткими и упругими звеньями. Вследствие распространения метода Ньютона-Эйлера на случаи первой и второй основных задач динамики многозвенных систем, а также в результате постановки и решения смешанной основной задачи динамики оказывается возможным формулирование *принципа формальной и методологической оптимизации динамического анализа многозвенных систем* посредством оптимального построения суперэлемента. В настоящей статье прослеживается процесс оптимального формирования суперэлемента на примере исследования кинематической цепи, состоящей из абсолютно жестких звеньев.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Страховская Л.Г., Федоренко Р.П.** Об одном варианте метода конечных элементов // ЖВМ и МФ. – 1979. – Т. 19, № 4. – С. 950 – 960.
2. **Страховская Л.Г., Федоренко Р.П.** Расчет диффузии в многосвязной области методом конечных суперэлементов: Препринт ИПМ АН СССР № 171. – М., 1987. – 26 с.
3. **Verlinden O.** Simulation du comportement dynamique de systèmes multicorps flexibles comportant des membrures de forme complexe: Thèse de doctorat de la Faculté Polytechnique de Mons. – 1994. – 222 p.
4. **Геворкян Г.А.** Развитие теоретических основ и расчетных алгоритмов динамического моделирования манипуляторов с упругими звеньями: Дис. ... канд. техн. наук / ГИУА. – Ереван, 2011. – 133 с.

5. **Luh J.Y.S., Walker M.W. and Paul R.** On-line computational scheme for mechanical manipulators // Trans. ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. – 1980. – Vol. 74. – P. 251 – 269.
6. **Dombre E. and Khalil W.** Modélisation, identification et commande des robots. – Edition Hermès, 1999. – 480 p.
7. **Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Азуз Н., Геворкян Г.А.** Динамический анализ упругих манипуляторов обобщенным методом Ньютона-Эйлера // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. – 2004. – Т. LVII, № 1. – С. 3 – 10.
8. **Геворкян Г.А.** Динамический анализ упругих древовидных механических систем в присутствии внешних голономных связей // Information technologies and Management. Encyclopedia-Armenica. – 2004. – № 4. – С. 36 – 43.

Институт механики НАН РА. Материал поступил в редакцию 20.05.2017.

#### **Հ.Ա. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ**

#### **ԲԱԶՄՕՂԱԿ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅԱՆ ՖՈՐՄԱԼ ԵՎ ՄԵԹՈԴՈԼՈԳԻԱԿԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼԱՅՄԱՆ ՄԿՋԲՈՒՆՔԸ**

Զարգացվել է ֆորմալիզմների և մեթոդների կառուցման հայեցակարգը՝ ուղղված բազմօղակ դինամիկական համակարգերի նկարագրմանն ու հետազոտմանը՝ կինեմատիկական շղթաների օպտիմալ տարանջատման հիման վրա: Ցույց է տրվել, որ կինեմատիկական շղթայի՝ գերտարրերի օպտիմալ տարանջատմանը համապատասխանում է Նյուտոն-Էյլերի մեթոդը կամ այդ համակարգերի՝ առանց զանգվածների մատրիցի հակադարձման մեթոդը:

*Առանցքային բառեր.* գերտարր, դինամիկական համակարգեր, Նյուտոն-Էյլերի մեթոդը:

#### **H.A. GEVORGYAN**

#### **FORMAL AND METHODOLOGICAL AT OPTIMIZATION PRINCIPLE OF THE MULTIBODY SYSTEM DYNAMIC ANALYSIS**

A concept of constructing formalisms and methods for the description and investigation of multibody dynamic systems on the basis of optimal differentiation of a kinematic chain into superelements by decomposing is developed. It is shown that the optimal decomposition of the kinematic chain into superelements corresponds to the Newton-Euler method, or the method without inversion of the mass matrix of those systems.

*Keywords:* superelement, dynamic systems, Newton-Euler method.