

В.С. САФАРЯН, Г.В. АРУТЮНЯН

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВ РЕЖИМОВ
ОДНОРОДНОЙ ЦЕПНОЙ СХЕМЫ**

Исследуются экстремальные свойства режимов цепных схем с одинаковыми не-симметричными четырехполюсниками. Для решения поставленной задачи применяются аналитические выражения функции передачи по току и напряжению, полученные методом структурных чисел. Используя функцию передачи по току, аналитическим путем доказано, что при определенных соотношениях параметров четырехполюсника действующие значения тока и напряжения на выходах звеньев цепной схемы имеют экстремальные значения. Значения экстремальных режимных параметров определяются графическим решением трансцендентного уравнения. Приведены графики изменения действующих значений тока и напряжения на выходе звеньев цепной схемы при различных обобщенных параметрах четырехполюсника.

Ключевые слова: цепная схема, структурные числа, передаточные функции, экстремальные свойства, трансцендентное уравнение, графический метод.

Введение. Цепные схемы используются для моделирования сетей дорожного освещения, электрических фильтров, линий электропередачи с распределенными параметрами и т.д. [1, 2]. Режимы цепных схем можно определить методами контурных токов, узловых потенциалов или же методом подобия (единичного тока) [1, 2]. Выбор одного из перечисленных методов позволит решить задачу численными методами.

Методом структурных чисел [3] получены аналитические выражения (передаточные функции по току и напряжению), связывающие режимные параметры (токи, напряжения, мощности) звеньев цепной схемы с обобщенными параметрами одного звена [4]. В работе [5] исследуются режимы цепных схем численными методами с использованием аналитических выражений передаточных функций по току и напряжению, полученных методом структурных чисел [3]. В отличие от [5], в настоящей работе аналитическим путем обосновано свойство экстремальности цепных схем.

Постановка задачи. Рассматривается схема из n Г-образных, одинаковых, пассивных четырехполюсников при питании со стороны входных зажимов и холостом ходе со стороны выходных. Исследуются экстремальные свойства передаточной функции по току цепной схемы, полученной методом структурных чисел [3].

На рис. 1 представлена исследуемая схема с раскрытой структурой четырехполюсников.

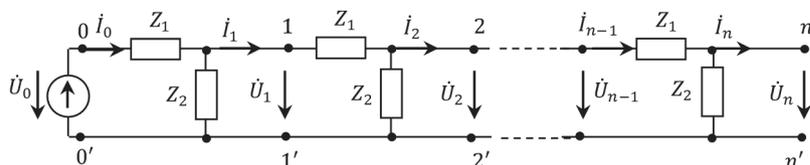


Рис. 1. Каскадное соединение Г-образных четырехполюсников

Решение задачи. Известно, что любой пассивный четырехполюсник характеризуется через входные сопротивления Z_a (Z_b) со стороны входных (выходных) зажимов a, a' (b, b') при холостом ходе и Z_{ab} (Z_{ba}) при коротком замыкании на зажимах b, b' (a, a') соответственно. При этом между этими параметрами существует связь [1,2]

$$Z_a Z_{ba} = Z_b Z_{ab}.$$

Очевидно, что в данном случае имеем

$$Z_a = Z_1 + Z_2, \quad Z_b = Z_2, \quad Z_{ab} = Z_1, \quad Z_{ba} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Алгеброй структурных чисел разработаны соотношения, когда ток (напряжение) любого звена цепной схемы выражается через параметры одного четырехполюсника и их количества n в цепи [4]:

$$i_i = i_0 \dot{K}_{iU} = i_0 \frac{1 - \dot{C}^{n-i}}{1 - \dot{C}^n} \cdot \dot{C}^{i/2}, \quad (1)$$

$$\dot{U}_i = \dot{U}_0 \dot{K}_{iU} = \dot{U}_0 \frac{Z_{\infty a} + Z_{\infty b} \dot{C}^{n-i}}{Z_{\infty a} + Z_{\infty b} \dot{C}^n} \cdot \dot{C}^{i/2}, \quad (2)$$

где $\dot{C} = \frac{Z_b - Z_{\infty b}}{Z_b + Z_{\infty a}} = C e^{j\varphi}$,

$$Z_{\infty a} = \frac{1}{2} \left((Z_a - Z_b) + \sqrt{(Z_a - Z_b)^2 + 4Z_a Z_{ba}} \right),$$

$$Z_{\infty b} = \frac{1}{2} \left((Z_b - Z_a) + \sqrt{(Z_b - Z_a)^2 + 4Z_b Z_{ab}} \right).$$

Физический смысл величины \dot{C} заключается в том, что если к выходным (входным) зажимам четырехполюсника подключить $Z_H = Z_{\infty a}$ ($Z_H = Z_{\infty b}$), то квадрат коэффициента передачи по напряжению и току будет равен [4]

$$\dot{C} = \dot{K}_U^2 = \dot{K}_I^2.$$

Для несимметричного четырехполюсника $Z_{\infty a}$ ($Z_{\infty b}$) это такая нагрузка, что если к выходным (входным) зажимам четырехполюсника подключить

$Z_n = Z_{\infty a}$ ($Z_n = Z_{\infty b}$), то входное сопротивление будет равно $Z_{\infty a}$ ($Z_{\infty b}$). Если нагрузка $Z_{\infty a}$ ($Z_{\infty b}$) подключена к выходным (входным) зажимам цепной схемы из n одинаковых несимметричных четырехполюсников, то входное сопротивление относительно любых зажимов цепочки будет равно $Z_{\infty a}$ ($Z_{\infty b}$).

Величины \dot{C} , $Z_{\infty a}$, $Z_{\infty b}$ являются постоянными для данной цепной схемы и зависят от параметров одного четырехполюсника.

Через параметры одного четырехполюсника и их количества n в цепи выражаются также входные сопротивления цепной схемы при коротком замыкании и холостом ходе на выходе [4].

Исследуем распределение действующих значений тока (напряжения) вдоль цепи. Представим выражение (1) с учетом того, что $\frac{i_0}{1-\dot{C}^n}$ не зависит от i :

$$I(i) = \frac{i_0}{1-\dot{C}^n} \left(\dot{C}^{\frac{i}{2}} - \dot{C}^{n-\frac{i}{2}} \right) = \frac{i_0}{1-\dot{C}^n} \dot{A}(i). \quad (3)$$

Из (3) видно, что поведение функции $I(i)$ сводится к исследованию функции

$$\dot{A}(i) = \dot{C}^{\frac{i}{2}} - \dot{C}^{n-\frac{i}{2}}.$$

Представим комплексную функцию $\dot{A}(i)$ в алгебраической форме:

$$\dot{A}(i) = a(i) + jb(i),$$

где

$$a(i) = \dot{C}^{\frac{i}{2}} \cos \frac{i}{2} \varphi - \dot{C}^{(n-\frac{i}{2})} \cos \left(n - \frac{i}{2} \right) \varphi, \quad b(i) = \dot{C}^{\frac{i}{2}} \sin \frac{i}{2} \varphi - \dot{C}^{(n-\frac{i}{2})} \sin \left(n - \frac{i}{2} \right) \varphi.$$

Модуль комплексной величины $\dot{A}(i)$ равен

$$A(i) = \sqrt{[a(i)]^2 + [b(i)]^2} = \sqrt{\dot{C}^i + \dot{C}^{2n-i} - 2\dot{C}^n \cos(i-n)\varphi}. \quad (4)$$

Исследуем (4) на экстремум. Для этого найдем производную по i и приравняем ее к нулю:

$$A'(i) = \frac{\dot{C}^i \ln \dot{C} - \dot{C}^{2n-i} \ln \dot{C} + 2\varphi \dot{C}^n \sin(i-n)\varphi}{2 \cdot \sqrt{\dot{C}^i + \dot{C}^{2n-i} - 2\dot{C}^n \cos(i-n)\varphi}} = 0. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) сводится к следующему:

$$\begin{cases} \dot{C}^i \ln \dot{C} - \dot{C}^{2n-i} \ln \dot{C} = 2\varphi \dot{C}^n \sin(n-i)\varphi, \\ \dot{C}^i + \dot{C}^{2n-i} - 2\dot{C}^n \cos(n-i)\varphi > 0. \end{cases}$$

Сначала проверим условие существования выражения (5) на интервале $i = \overline{0; n}$. Обозначим $g_1(i) = \dot{C}^i + \dot{C}^{2n-i}$, $g_2(i) = 2\dot{C}^n \cos(n-i)\varphi$.

Исследуем функцию $g_1(i)$:

$$g_1'(i) = C^i \ln C - C^{2n-i} \ln C = \ln C (C^i - C^{2n-i}) .$$

Следовательно, при $C < 1, \ln C < 0, C^i - C^{2n-i} > 0 - g_1'(i) < 0$; при $C > 1, \ln C > 0, C^i - C^{2n-i} < 0 - g_1'(i) < 0$, т.е. $g_1(i)$ - убывающая функция, при этом $g_{1max}(i) = g_1(0) = 1 + C^{2n}, g_{1min}(i) = g_1(n) = 2C^n$.

Очевидно, что $g_{1max}(i) > g_{1min}(i)$, поскольку $(1 - C^n)^2 > 0, (C \neq 1)$. При $i = n$ функция (5) не определена.

Исследуем функцию $g_2(i)$.

Амплитуда функции $g_{2max}(i) = 2C^n$. Из сравнения амплитуды функции $g_2(i)$ и наименьшего значения функции $g_1(i)$ приходим к выводу, что $A'(i)$ существует в исследуемом интервале.

Решение полученного трансцендентного уравнения (5) относительно переменной i проводится графическим методом. Обозначим

$$f_1(i) = 2\varphi C^n \sin(n - i) \varphi, \quad f_2(i) = C^i \ln C - C^{2n-i} \ln C.$$

Исследуем функцию $f_1(i)$.

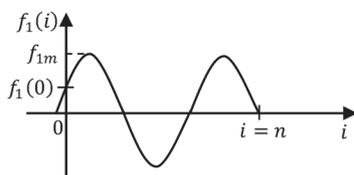
Амплитуда, период, начальная фаза функции $f_1(i)$ зависят от модуля C и аргумента φ комплексной величины \hat{C} :

- 1) $f_1(n) = 0$;
- 2) $f_{1max} = |2\varphi C^n|$;
- 3) псевдопериод функции $f_1(i)$: $T = \frac{2\pi}{\varphi}$;
- 4) начальная фаза функции $f_1(i)$: $(n - i)\varphi|_{i=0} = n\varphi$;
- 5) $f_1(0) = 2\varphi C^n \sin n$.

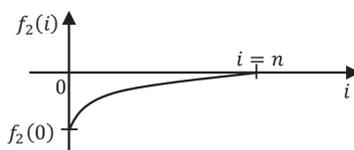
Вид функции $f_1(i)$ представлен на рис. 2а.

Исследуем функцию $f_2(i)$:

- 1) $f_2(n) = 0$;
- 2) $f_2(0) = \ln C(1 - C^{2n}) < 0$;
- 3) $f_2'(i) = \ln^2 C \left(C^i + \frac{C^{2n}}{C^i} \right) > 0$, следовательно, $f_2(i)$ - возрастающая функция.



а) функция $f_1(i)$



б) функция $f_2(i)$

Рис. 2. Вид функций $f_1(i)$ и $f_2(i)$

Функция $f_2(i)$ при любых значениях C будет иметь вид, приведенный на рис. 2б. При определенных соотношениях между сопротивлениями $Z_1 = Z_{ab}$ и $Z_2 = Z_b$ получаются значения \dot{C} , от модуля и аргумента которых зависит распределение тока (напряжения) вдоль звеньев цепи. Очевидно, что графическое решение уравнения (5) сводится к определению координат точек пересечения графиков функций $f_1(i)$ и $f_2(i)$ (табл. 1). Возможны следующие варианты:

- нет точек пересечения, следовательно, действующее значение тока вдоль цепи изменяется монотонно;
- одна точка пересечения, следовательно, действующее значение тока вдоль цепи имеет один экстремум;
- множество точек пересечения, следовательно, действующее значение тока вдоль цепи имеет множество экстремумов.

В табл. 1 приведены примеры возможных решений уравнения (5).

Таблица 1

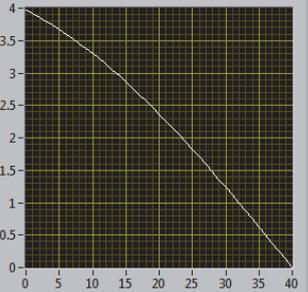
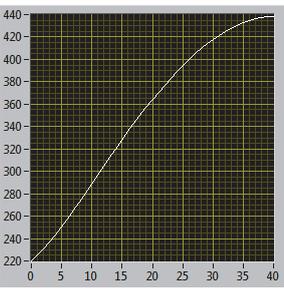
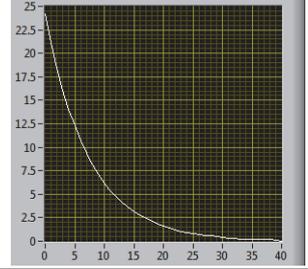
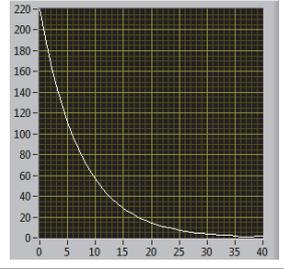
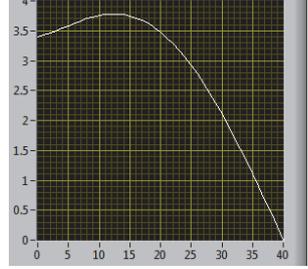
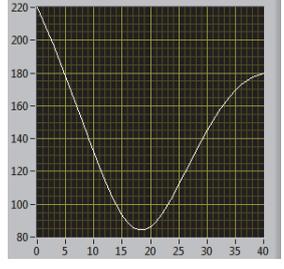
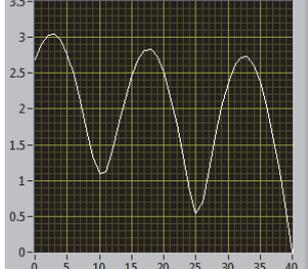
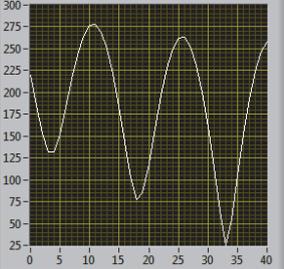
Демонстрация возможных вариантов решения уравнения (5)

Графическое решение	Описание
	<p>$I(i)$ монотонна вдоль всей цепи</p> <p>$\dot{C} = 0,9798 - j0,06$, $\varphi = -3,43^\circ$, $T = 104,9$, $n = 40$.</p>
	<p>$I(i)$ монотонна вдоль всей цепи</p> <p>$\dot{C} = 0,5258 - j0,552$, $\varphi = -46,4^\circ$, $T = 7,75$, $n = 40$.</p>
	<p>$I(i)$ имеет один экстремум</p> <p>$\dot{C} = 0,954 - j0,123$, $\varphi = -7,4^\circ$, $T = 48,64$, $n = 40$.</p>
	<p>$I(i)$ имеет пять экстремумов</p> <p>$\dot{C} = 0,888 - j0,39$, $\varphi = -26,5^\circ$, $T = 13,7$, $n = 40$.</p>

Для исследования распределения действующих значений тока $I(i)$ (напряжения $U(i)$) вдоль цепи разработана программа в графической среде LabVIEW. В табл. 2 приведены зависимости, соответствующие всем вариантам графического решения уравнения (5).

Таблица 2

Графики возможных зависимостей $I(i), U(i)$

$I(i)$	$U(i)$	Исходные данные
		$Z_b = 11 - j3500 \text{ Ом},$ $Z_{ab} = 2 + j3 \text{ Ом},$ $n = 40,$ $\dot{U}_0 = 220 \text{ В},$ $\dot{C} = 0,98 - j0,06,$ $C = 0,98,$ $\varphi_C = -3,5^\circ,$ $T = 102,85 \text{ ум}.$
		$Z_b = 1 - j20 \text{ Ом},$ $Z_{ab} = 2 + j3 \text{ Ом},$ $n = 40,$ $\dot{U}_0 = 220 \text{ В},$ $\dot{C} = 0,526 - j0,552,$ $C = 0,762,$ $\varphi_C = -46,4^\circ,$ $T = 7,25 \text{ ум}.$
		$Z_b = 1 - j800 \text{ Ом},$ $Z_{ab} = 2 + j3 \text{ Ом},$ $n = 40,$ $\dot{U}_0 = 220 \text{ В},$ $\dot{C} = 0,954 - j0,123,$ $C = 0,96,$ $\varphi_C = -7,4^\circ,$ $T = 48,64 \text{ ум}.$
		$Z_b = 11 - j450 \text{ Ом},$ $Z_{ab} = 2 + j20 \text{ Ом},$ $n = 40,$ $\dot{U}_0 = 220 \text{ В},$ $\dot{C} = 0,888 - j0,39,$ $C = 0,97,$ $\varphi_C = -26,5^\circ,$ $T = 13,7 \text{ ум}.$

Выводы

1. Аналитическим путем доказано свойство экстремальности режимов цепных схем. Определение экстремальных величин действующих значений напряжений и токов проведено графическим путем.
2. Приведены графики действующих значений напряжений и токов цепной схемы при различных значениях параметров четырехполюсника, иллюстрирующие экстремальные свойства режимов цепной схемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В.** Основы теории цепей. - М.: Энергоатомиздат, 2007.- 528 с.
2. **Атабеков Г.И.** Теоретические основы электротехники. – СПб.: Лань, 2009.- 592 с.
3. **Беллерт С., Возняцки Г.** Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел.- М.: Мир, 1972.-332 с.
4. **Акопджанян Г.Д., Сафарян В.С.** К определению передаточных функций цепных схем // Изв. ВУЗ-ов. Электромеханика.-2007.-N3.-С. 7-10.
5. **Сафарян В.С., Арутюнян Г.В.** К анализу режимов однородных цепных схем методом структурных чисел // Вестник НПУА.-2016.-N2.-С. 9-18.

ЗАО “Научно-исследовательский институт энергетики РА”, Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 09.03.2017.

Վ.Ս. ՍԱՏԱՐՅԱՆ, Գ.Վ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

ՀԱՄԱՍԵՆ ՇՂԹԱՅԱԿԱՆ ՍԽԵՄԱՅԻ ՌԵԺԻՄՆԵՐԻ ԷՔՍՏՐԵՄԱԼ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Հետազոտվել են միատեսակ ոչ սիմետրիկ քառաբևեռներից բաղկացած շղթայական սխեմաների ռեժիմների էքստրեմալ հատկությունները: Խնդրի լուծման համար օգտագործվել են կառուցվածքային թվերի մեթոդով ստացված լարման և հոսանքի փոխանցման ֆունկցիաների անալիտիկ արտահայտությունները: Կառուցվածքային թվերի մեթոդը թույլ է տալիս անալիտիկ տեսքով ստանալ շղթայական սխեմայի օղակների ռեժիմային պարամետրերի (հոսանք, լարում, հզորություն) կախվածությունը տրված պարամետրերից: Նման մոտեցումը հնարավորություն է տալիս ոչ միայն հաշվարկել շղթայական սխեմայի ռեժիմը, այլև հետազոտել ստացված արտահայտությունների հատկությունները: Օգտագործելով հոսանքի փոխանցման ֆունկցիան՝ անալիտիկորեն ապացուցվել է, որ հոսանքի և լարման գործող արժեքները շղթայական սխեմայի օղակների էլքերում կարող են ունենալ էքստրեմալ արժեքներ: Էքստրեմալ ռեժիմների պարամետրերի արժեքները որոշվում են տրանսցենդենտ հավասարման գրաֆիկական լուծմամբ: Ներկայացվել են շղթայական սխեմայի օղակների էլքերում հոսանքի և լարման գործող արժեքների գրաֆիկները քառաբևեռի ընդհանրացված պարամետրերի տարբեր արժեքների դեպքում:

Առանցքային բառեր. շղթայական սխեմա, կառուցվածքային թվեր, փոխանցման ֆունկցիաներ, էքստրեմալ հատկություններ, տրանսցենդենտ հավասարում, գրաֆիկական մեթոդ:

V.S. SAFARYAN, G.V. HARUTYUNYAN

**INVESTIGATING THE EXTREME PROPERTIES OF THE HOMOGENEOUS
LADDER CIRCUIT MODES**

Extreme mode properties of ladder circuits with similar asymmetric four-terminals are investigated. To solve this problem, analytical expressions of the transfer function of current and voltage obtained by the method of structural numbers are used. It is analytically proven that the effective values of voltage and current at the outputs of units of ladder circuits have extreme values. Extreme values of parameters are defined by the graphical solution of the transcendental equation. Graphs of changes in the effective current and voltage values on the output units of ladder circuits for different generalized parameters of the four - terminal are presented.

Keywords: ladder circuit, structural numbers, transfer functions, extreme properties, transcendental equation, graphical method.