

Մ.Կ. ԲԱՂԻՆՅԱՆ

**ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՏԵՍՔԻ ԽԱՂԱՅԻՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐԻ
ԼՈՒԾՈՒՄԸ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՄԱՄԲ**

Առաջարկվել է պարամետրական տեսքի խաղային մոդելների՝ դիֆերենցիալ ձևափոխությունների կիրառմամբ մաթեմատիկական ծրագրավորման պարամետրական խնդրին հանգեցման և լուծման եղանակ: Դիտարկվել է օրինակ:

Առանցքային բառեր. պարամետրական խաղային մոդել, պարամետրական գծային ծրագրավորման խնդիր, պարամետրական սիմպլեքս մեթոդ, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ:

Ներածություն: Վերջին տարիներին հրապարակվել են պարամետրական տեսքի խաղային մոդելներին նվիրված բազմաթիվ հոդվածներ և հետազոտական աշխատանքներ [1-6]: Առաջարկվել և մշակվել են տարատեսակ մեթոդներ և ալգորիթմներ՝ հիմնված մոտարկումների, թվային, ֆազային պարամետրական, ստոխաստիկ մեթոդների վրա: Այս մեթոդների ընդհանուր թերություններից է խիստ սահմանափակ տեսակների պարամետրական տեսքի ֆունկցիաների դեպքում աշխատելու հնարավորությունը: Պարամետրական տարբեր դասերի խնդիրների լուծման դիֆերենցիալ մեթոդների [7,8] վերլուծության ու դրանց մշակման սկզբունքների հիման վրա աշխատանքում առաջարկվում է միապարամետրական տարրերով զրոյական գումարով խաղային մոդելների լուծման համար կիրառել դիֆերենցիալ ձևափոխություններն ու պարամետրական գծային ծրագրավորման խնդիրների լուծման համար մշակված եղանակները [9,10]:

Խնդրի դրվածքն ու մաթեմատիկական մոդելը: Դիտարկենք միապարամետրական զրոյական գումարով երկկողմ խաղ, որի վճարումների մատրիցի տարրերը պարամետրական են: Կամպոսը և Վերդեգեյն առաջարկել են ոչ հստակ գործակիցներով (fuzzy numbers) խաղային մատրիցով խաղի մոդելը [1]: Խաղային մոդելում $I = \{1, 2, \dots, m\}$ -ն և $J = \{1, 2, \dots, n\}$ -ն առաջին և երկրորդ խաղացողների հնարավոր քայլերի բազմություններն են: I խաղացողի վճարման մատրիցը ներկայացվում է $P^* = [p_{ij}^*]$ ոչ հստակ թվերի միջոցով, որտեղ՝ $i \in I$ -ն և $j \in J$ -ն համապատասխանաբար առաջին և երկրորդ խաղացողների ստրատեգիաների քանակներն են: Խաղացողների խառը ստրատեգիաների հավանականային վեկտորները տրվում են հետևյալ արտահայտություններով.

$$X = \{ x = (x_1, \dots, x_m) \in R^m \mid \sum_{i=1}^m x_i = 1; x_i \geq 0, i = 1, \dots, m \}, \quad (1)$$

$$Y = \{ y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n \mid \sum_{i=1}^n y_i = 1; y_i \geq 0, i = 1, \dots, n \}:$$

[1]-ում առաջարկում են ոչ հստակ գործակիցներով խաղային մոդելների մաթեմատիկական ծրագրավորման հետևյալ փոխերկակի խնդիրները՝

$$s_1 + s_2 + \dots + s_m \rightarrow \min_{s_1, s_2, \dots, s_m}, \quad (2)$$

$$p_1 s_1 + p_2 s_2 + \dots + p_m s_m \geq b_i - d_j(1 - \alpha)$$

և

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n \rightarrow \max_{r_1, r_2, \dots, r_n}, \quad (3)$$

$$p_1 r_1 + p_2 r_2 + \dots + p_n r_n \leq b_i + e_j(1 - \alpha),$$

որտեղ $s_i \geq 0, i \in I, r_j \geq 0, j \in J$ -ի օժանդակ փոփոխականներ են խաղային մոդելից մաթեմատիկական ծրագրավորման խնդրին անցնելու համար, $\alpha \in [0 - 1]$, d_j -ն, e_j իրական գործակիցներ [1]:

Օգտվելով մատրիցային խաղի՝ գծային ծրագրավորման խնդրին հանգեցման եղանակից [6]՝ այն կիրառենք պարամետրական տարրեր պարունակող խաղային մոդելի համար: Գծային ծրագրավորման պարամետրական խնդիրն այն դեպքում, երբ պարամետրական տարրերը սահմանափակումների աջ մասում են, հետևյալն է՝

$$f(R(\alpha)) = r_1(\alpha) + r_2(\alpha) + \dots + r_n(\alpha) \rightarrow \max_{R(\alpha) \in D}, \quad (4)$$

$$D: \begin{cases} P \cdot R(\alpha) \leq b(\alpha), \\ r_1(\alpha) \geq 0, \dots, r_n(\alpha) \geq 0, \end{cases}$$

որտեղ $P_{n \times m} = (p_{ij})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ -ը սահմանափակումների պարամետրական գործակիցների $n \times m$ -չափայնությամբ մատրիցն է, $R(\alpha) = (r_1(\alpha), \dots, r_n(\alpha))^T$ -ն

անհայտ փոփոխականների n -չափանի վեկտորը, որը պետք է բավարարի խնդրի թույլատրելի արժեքների տիրույթին, $b(\alpha) = (b_1(\alpha), \dots, b_m(\alpha))^T$ - ն՝ սահմանափակումների ազատ անդամների պարամետրական վեկտորը:

(2) երկակի խնդրի դեպքում մաթեմատիկական մոդելը կլինի՝

$$f(S(\alpha)) = s_1(\alpha) + s_2(\alpha) + \dots + s_m(\alpha) \rightarrow \min_{R(\alpha) \in D}, \quad (5)$$

$$D: \begin{cases} P \cdot S(\alpha) \geq b(\alpha), \\ s_1(\alpha) \geq 0, \dots, s_m(\alpha) \geq 0, \end{cases}$$

որտեղ $S(\alpha) = (s_1(\alpha), \dots, s_m(\alpha))^T$ -ն փնտրվող փոփոխականների m -չափանի վեկտորն է:

Ստացված խնդրի լուծման նպատակով կիրառենք [9]-ում առաջարկված մեթոդը: Այն հիմնված է գծային ծրագրավորման խնդիրների լուծման սիմպլեքս մեթոդի [6] և դիֆերենցիալ ձևափոխությունների (մասնավորապես՝ թեյլորյան, մակլորենյան) վրա [7-8]:

$$r(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \left[\frac{d^K r(\alpha)}{d\alpha^K} \right]_{\alpha=\alpha_0=0} = \sum_{K=0}^{\infty} r(K) \cdot \left(\frac{\alpha}{H} \right)^K,$$

որտեղ $r(K)$ -ն α իրական պարամետրից կախված $r(\alpha)$ բնօրինակ-ֆունկցիայի թեյլորյան պատկերն է, H -ը՝ մասշտաբային գործակիցը, α_0 -ն՝ մոտարկման կենտրոնը:

Օրինակ: Դիտարկենք գծային ծրագրավորման խնդրի տեսքով ներկայացված հետևյալ խաղային մոդելը [1].

$$F = r_1 + r_2 + r_3 \rightarrow \max_{r_1, r_2, r_3},$$

$$\begin{cases} 179.95r_1 + 156.12r_2 + 90r_3 \leq 1 + 0.1504(1-\alpha), \\ 89.95r_1 + 179.87r_2 + 155r_3 \leq 1 + 0.1504(1-\alpha), \\ 180r_1 + 156r_2 + 177r_3 \leq 1 + 0.1504(1-\alpha), \\ r_1, r_2, r_3 \geq 0, \alpha \geq 0: \end{cases} \quad (6)$$

Դիֆերենցիալ ձևափոխությունների տիրույթում ընտրենք պատկերների $K=2$ քանակը, մասշտաբային գործակից՝ $H=1$ արժեքը: Որպես մոտարկման կենտրոն ընտրենք $\alpha=0$ կետն ու կիրառենք պարամետրական սիմպլեքս մեթոդը [7].

$$\begin{aligned}
P(\alpha) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0.0075 & 0.0098 & -0.012396 \\ 0 & 0 & 1 & -0.114866 & 0.000018 & 0.011474 \\ 1 & 0 & 0 & 0.00479455 & -0.0085116 & 0.0050157 \end{vmatrix}, \\
R(\alpha) &= (r_2, r_3, r_1) = \begin{pmatrix} 0.00564262 - 0.00073\alpha, \\ 0.00000692 - 0.0000009\alpha, \\ 0.001494 - 0.00019\alpha \end{pmatrix}, \\
\Delta(\alpha) &= (0, 0, 0, 0.0008086, 0.001307005, 0.00409398), \\
F(\alpha) &= 0.00714 - 0.00093\alpha: \tag{7}
\end{aligned}$$

Օգտվելով լուծման թույլատրելիության և օպտիմալության պայմաններից [9,10], α պարամետրի վերին սահմանը կորոշենք հետևյալ արտահայտությունից՝

$$\begin{aligned}
\alpha &\rightarrow \max_{\alpha}, \\
R(\alpha) &= (r_2, r_3, r_1) = \begin{pmatrix} 0.00564262 - 0.00073\alpha, \\ 0.00000692 - 0.0000009\alpha, \\ 0.001494 - 0.00019\alpha \end{pmatrix} \tag{8}
\end{aligned}$$

(6)-ի լուծման արդյունքում ստանում ենք α պարամետրի վերին սահմանային 7.64893 արժեքը: Այսպիսով, $0 \leq \alpha \leq 7.64893$ միջակայքի համար կարող ենք ստանալ լուծումների վերականգնված բնօրինակները: $7.64893 < \alpha \leq \infty$ միջակայքում (6)-ը լուծում չունի:

Օգտվելով խաղի գնի և գծային ծրագրավորման խնդրի նպատակային ֆունկցիայի միջև եղած կապից [2], ստանանք խաղի գնի արժեքի պարամետրական արտահայտությունը՝

$$V(\alpha) = \frac{1}{F(\alpha)} = \frac{1}{0.00714 - 0.00093\alpha} : \tag{9}$$

Խաղի գինը որոշելուց հետո կարող ենք ստանալ խառը ստրատեգիաների հանդես գալու հավանականությունները (1)՝ պարամետրական ֆունկցիաների տեսքով.

$$\begin{aligned}
X_1(\alpha) &= r_1(\alpha)V(\alpha) = \frac{0.001494 - 0.00019\alpha}{0.00714 - 0.00093\alpha}, \\
X_2(\alpha) &= r_2(\alpha)V(\alpha) = \frac{0.00564262 - 0.00073\alpha}{0.00714 - 0.00093\alpha},
\end{aligned}$$

$$X_3(\alpha) = r_3(\alpha)V(\alpha) = \frac{0.00000692 - 0.0000009\alpha}{0.00714 - 0.00093\alpha} :$$

Այսպիսով, լուծման արդյունքում ստանում ենք խաղացողի յուրաքանչյուր i -րդ ստրատեգիան ընտրելու $X_i(\alpha)$ հավանականությունները պարամետրական տեսքերով, ինչպես նաև խաղի գինը՝ $V(\alpha)$ -ն՝ նույնպես α պարամետրից ֆունկցիոնալ կախվածությամբ: Խնդրի լուծման արդյունքները ներկայացված են աղյուսակում:

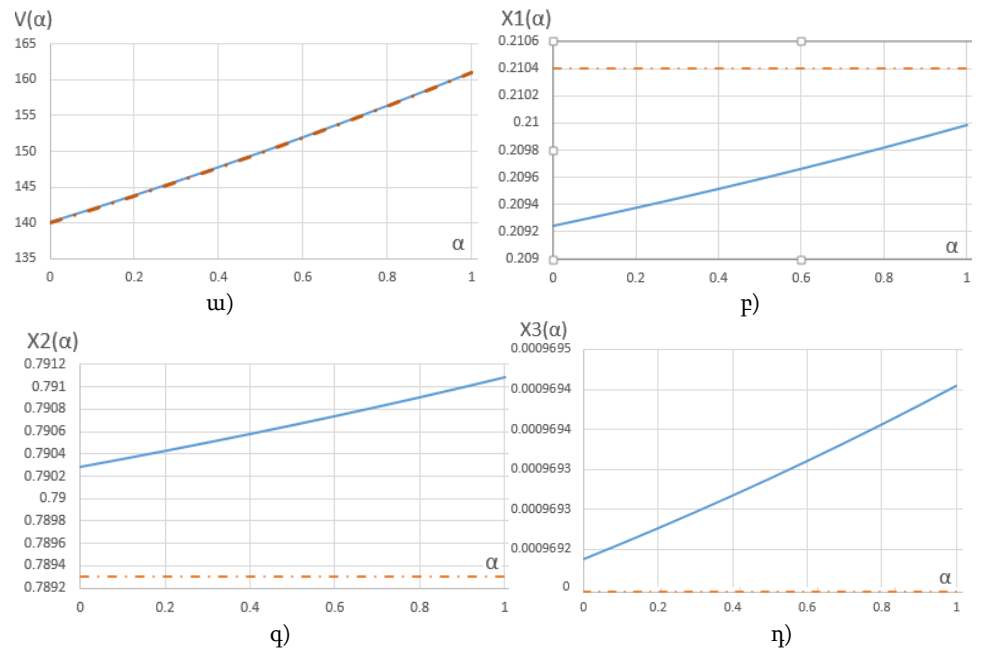
Աղյուսակ

Խնդրի լուծման արդյունքները

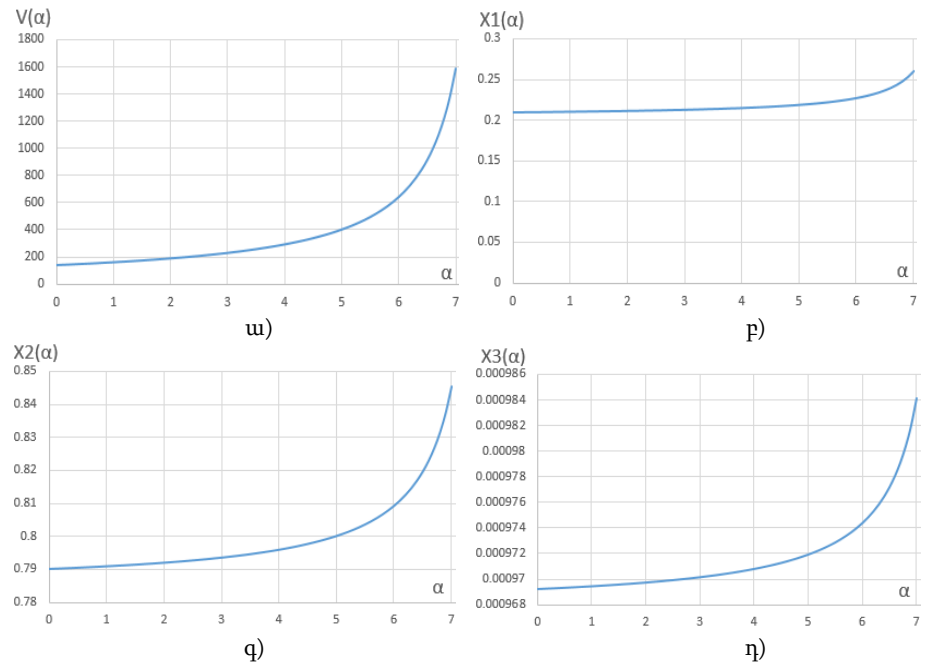
Խաղի գնի և ստրատեգիաների ֆունկցիոնալ կախվածությունները	$0 \leq \alpha \leq 7.64893$	$7.64893 < \alpha \leq \infty$
$X_1(\alpha)$	$\frac{0.001494 - 0.00019\alpha}{0.00714 - 0.00093\alpha}$	(6) խնդիրը լուծում չունի
$X_2(\alpha)$	$\frac{0.00564262 - 0.00073\alpha}{0.00714 - 0.00093\alpha}$	
$X_3(\alpha)$	$\frac{0.00000692 - 0.0000009\alpha}{0.00714 - 0.00093\alpha}$	
$V(\alpha)$	$\frac{1}{0.00714 - 0.00093\alpha}$	

[1] աշխատանքում $\alpha \in [0, 1]$ միջակայքի համար խաղի գնի համար ստացվել է $\frac{161,0026}{1+0,15(1-\alpha)}$ ֆունկցիոնալ կախվածությունը, իսկ խառը ստրատեգիաների համար՝ $X=(0,2104; 0,7893; 0)^T$ դետերմինացված նշանակությունները: Առաջարկված եղանակը հնարավորություն է տալիս որոշել ինչպես խաղի գինը, այնպես էլ ստրատեգիաներն ընտրելու հավանականությունների ֆունկցիոնալ կախվածությունները: Խնդիրը լուծվել է $\alpha \geq 0$ արժեքների դեպքում՝ չսահմանափակելով դրանք $\alpha \in [0, 1]$ միջակայքով:

$V(\alpha)$ խաղի գնի, $X_1(\alpha)$, $X_2(\alpha)$, $X_3(\alpha)$ ստրատեգիաների ֆունկցիոնալ կախվածություններն α պարամետրից $\alpha \in [0, 1]$ արժեքների դեպքում ներկայացված են նկ. 1-ում, իսկ $\alpha \in [0, 7.64893]$ միջակայքի համար՝ նկ. 2-ում: Նկ. 1-ում ներկայացված են նաև [1] աշխատանքում որոշված լուծումները՝ կետագծերով:



Նկ. 1. $\alpha \in [0, 1]$ միջակայքում խաղի գնի և ստրատեգիաների ֆունկցիոնալ կախվածությունները



Նկ. 2. $\alpha \in [0, 7.64893]$ միջակայքում խաղի գնի և ստրատեգիաների ֆունկցիոնալ կախվածությունները

Եզրակացություն: Առաջարկվել է պարամետրական տեսքի խաղային մոդելների լուծման եղանակ՝ հիմնված Գ.Ե. Պոլիսովի դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա: Եղանակը նախատեսված է սահմանափակումների աջ մասում պարամետրական տարրեր պարունակող խաղային մոդելների լուծման համար: Առաջարկված եղանակով լուծվել են տարրեր չափայնությամբ և պարամետրական տարրերի ֆունկցիոնալ տարրեր կախվածություններով խաղային մատրիցներով մոդելներ:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. **Stephanie L.B.** Interval Fuzzy Linear Programming Models to Solve Interval-valued Fuzzy Zero-Sum Games // World congress of the international fuzzy systems Association. – Rio Grande, 2015. –P. 305-312.
2. **Yarmand H., Eshghi K.** Sensitivity analysis of Matching Pennies game // Computer modelling.- 2010.- Vol. 51.-P. 722-731.
3. **Rocio E.R.** Nonlinear parametric excitation of an evolutionary dynamical system // Mechanical Engineering Science.- 2011.- Vol. 226 (8).-P. 1912-1920.
4. **Campos L.** Fuzzy linear programming models to solve fuzzy matrix games // Fuzzy Sets and Systems. -1989.- Vol. 32.-P. 275-289.
5. **Campos L., Verdegay J.L.** Linear programming problems and ranking of fuzzy numbers // Fuzzy Sets and Systems. -1989.- Vol. 32(1).-P. 1 – 11.
6. **Таха Х.** Введение в исследование операций. - М.: Мир, 2005. - 912 с.
7. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – Киев: Наукова думка, 1986. - 158 с.
8. **Симонян С.О., Аветисян А.Г.** Прикладная теория дифференциальных преобразований: Монография. - Ереван: Издательство ГИУА "Чартарагет", 2010. - 361с.
9. **Аветисян А.Г., Гюльзаян Л.С.** Метод решения задач параметрического линейного программирования, основанный на дифференциальных преобразованиях// Известия Томского политехнического университета. Серия “Математика и механика. Физика”. – Томск, 2014. – Т. 324, № 2. – С. 25-30.
10. **Аветисян А.Г., Гюльзаян Л.С.** Метод решения многопараметрических задач линейного программирования, основанный на дифференциальных преобразованиях // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. – 2014. - Т. LXVII, №2. – С. 235-243.

Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարան: Նյութն ներկայացվել է խմբագրություն 02.02.2017:

М.К. БАГИНЯН

**РЕШЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ИГРОВЫХ МОДЕЛЕЙ С
ПРИМЕНЕНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

Предложен алгоритм для решения параметрических игровых моделей на основе задачи параметрического математического программирования с применением дифференциальных преобразований. Рассмотрена параметрическая игровая модель.

Ключевые слова: параметрическая игровая модель, задача параметрического линейного программирования, параметрический симплекс-метод, дифференциальные преобразования.

M.K. BAGHINYAN

**SOLVING PARAMETRIC GAME MODELS BY APPLYING DIFFERENTIAL
TRANSFORM METHOD**

An algorithm is proposed for solving game models with parametric coefficients based on the method of parametric mathematical programming problems by applying the differential transform method. A parametric game model is considered.

Keywords: parametric game model, parametric linear programming problem, parametric simplex method, differential transforms.