ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и НПУА. Сер. ТН. 2017. Т. LXX, N1.

УДК 621.3

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Г.С. СУКИАСЯН, К.Р. ЕНОКЯН, Т.Р. МЕЛКОНЯН, А.А. ОГАННИСЯН

# ОБ АВТОМАТИЧЕСКОМ ПОСТРОЕНИИ ЭКОНОМНОЙ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Предложен алгоритм автоматического построения кусочно-линейной аппроксимации решений краевых задач и соответствующей треугольной сетки, применяемой при решении двумерных краевых задач методом конечных элементов. Алгоритм экономен в смысле минимизации числа узлов сетки. Развитый подход реализован на модельной задаче вычисления электромагнитного поля.

***Ключевые слова:*** электромагнитное поле, сеточные задачи, экономный алгоритм аппроксимации.

При численном решении нелинейных задач электромагнитного поля методом конечных элементов на сходимость процесса последовательных приближений сильное влияние оказывает количество узлов треугольной сетки. Это вызывает потребность в построении экономных аппроксимаций, требующих минимального количества узлов при фиксированной точности приближений.

В [1] было предложено применять в качестве двумерной треугольной сетки триангуляцию Делоне. В [2] отмечено, что для фиксированного набора узлов оптимальной сеткой (в смысле сходимости процесса последовательных приближений) является триангуляция Делоне. В [3] показано, что на процесс последовательных приближений к численному решению двумерной задачи нахождения векторного магнитного потенциала отрицательно влияет наличие тупых углов у треугольников сетки.

Пусть на отрезке [a,b] задана непрерывная функция F(x). Экономной аппроксимацией функции F(x) называется приближение $F_\varepsilon(x)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $|F(x)-F_\varepsilon(x)|<\varepsilon$ при заданном уровне точности $\varepsilon$ и всех x из отрезка [a,b].
2. $F_\varepsilon(x)$ является кусочно-линейной функцией, ее график – ломаная линия, состоящая из отрезков.
3. Количество отрезков (т.е. число точек излома) минимально в следующем смысле: если удалить любую из точек излома $x_k$, т.е. заменить два отрезка $x_{k-1}x_k$ и $x_kx_{k+1}$ на один отрезок $x_{k-1}x_{k+1}$, то нарушится условие 1.

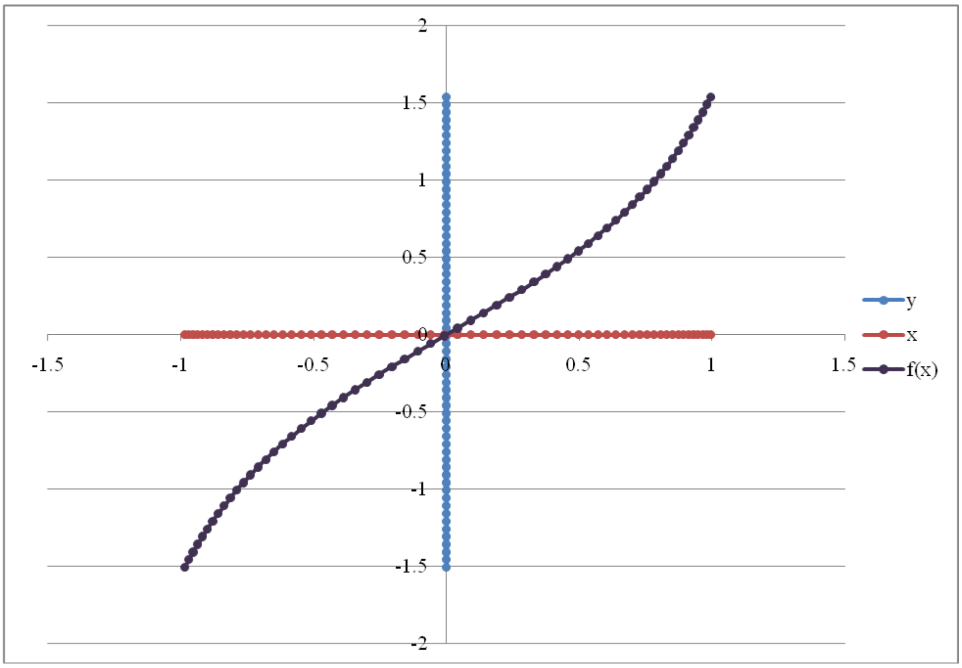


*Рис. 1. Пример экономной аппроксимации*

На рис. 1 представлен пример экономной аппроксимации $F_\varepsilon(x)$ для функции $F(x)=tg(x)$ на отрезке $a=-1$, $b=1$. Хорошо видно, что в середине отрезка [a,b], где функция медленно меняется, густота сеточных узлов относительно невелика, а по краям отрезка [a,b], где наблюдается быстрое изменение функции, отрезки становятся мелкими.

Наглядно видно, что интенсивность сеточных узлов в разных участках одномерной сетки существенно разная. Четко соблюдается условие: густота сеточных узлов тем больше, чем сильнее меняется функция.

Теперь рассмотрим случай, когда у функции $y=F(x)$ обратной функции нет или она неизвестна. Предлагается следующий алгоритм построения экономной аппроксимации $F_\varepsilon(x)$ методом последовательных приближений.

Вначале на оси OX разобьем отрезок [a,b] пополам точкой $x_1$, которая порождает на оси OY точку $y_1=F(x_1)$. Найдем, какой из отрезков на оси OY является наибольшим ($[cy_1]$ или $[y_1d]$), и какой из отрезков на оси OX ($[ax_1]$ или $[x_1b]$) ему соответствует. Разобьем последний отрезок пополам точкой $x_2$. Будем продолжать добавлять узлы делением пополам отрезка на оси OX, соответствующего наибольшему из отрезков на оси OY, до тех пор, пока длина наибольшего отрезка на оси OY не станет меньше заданного уровня точности $\varepsilon$.

Предложенный алгоритм реализован для построения экономной аппроксимации $F_\varepsilon(x)$ для функции $F(x)=tg(x)$ без использования обратной функции $x=F^*(y)=arctg(y)$. Для погрешности $\varepsilon=0{,}01$ число получившихся узлов оказалось 3109 для алгоритма с использованием обратной функции $x=F^*(y)=arctg(y)$ и 3115 для предложенного алгоритма последовательного добавления узлов.

Теперь рассмотрим двумерный случай. Пусть в двумерной области D задана непрерывная функция $z=F(x,y)$. Экономной аппроксимацией функции $F(x,y)$ называется приближение $F_\varepsilon(x,y)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $F(x,y)-F_\varepsilon(x,y)|< \varepsilon$ при заданном уровне точности $\varepsilon$ и всех x,y из области D.
2. $F_\varepsilon(x,y)$ является кусочно-линейной функцией, ее график состоит из плоских треугольников, проекции которых на плоскость OXY составляют треугольную сетку.
3. Количество узлов сетки (т.е. число вершин треугольников) минимально в следующем смысле: если удалить любой узел сетки, то нарушится условие 1.

Предлагается алгоритм построения экономной аппроксимации $F_\varepsilon(x,y)$ методом последовательных приближений, аналогичный предыдущему одномерному алгоритму. Для каждого ребра первичной сетки с вершинами $P_i$, $P_j$ вычисляются значения разностей $|z_i - z_j|$, где $z_i = F(x_i,y_i)$, а $(x_i,y_i)$ – декартовы координаты вершины $P_i$.

Затем находим ребро, которое дает максимальную разность значений $|z_i - z_j|$. В середине этого ребра добавим новый узел. Будем продолжать добавлять узлы делением пополам ребра $P_i$, $P_j$, соответствующего наибольшему из значений разностей $|z_i - z_j|$, до тех пор, пока наибольшее из значений $|z_i - z_j|$ не станет меньше заданного уровня точности $\varepsilon$.

Отметим, что при конечно-элементном моделировании имеется строгое требование к сетке: внутренности элементов не должны пересекаться, а объединение всех элементов должно совпадать с выпуклой оболочкой сетки, т.е. внутри сетки не должно быть пустот, не покрытых элементами.

**Численные результаты.** Предложенный алгоритм реализован для сетки, полученной при моделировании реле [4]. На рис. 2 представлены силовые линии электромагнитного поля для модели реле.

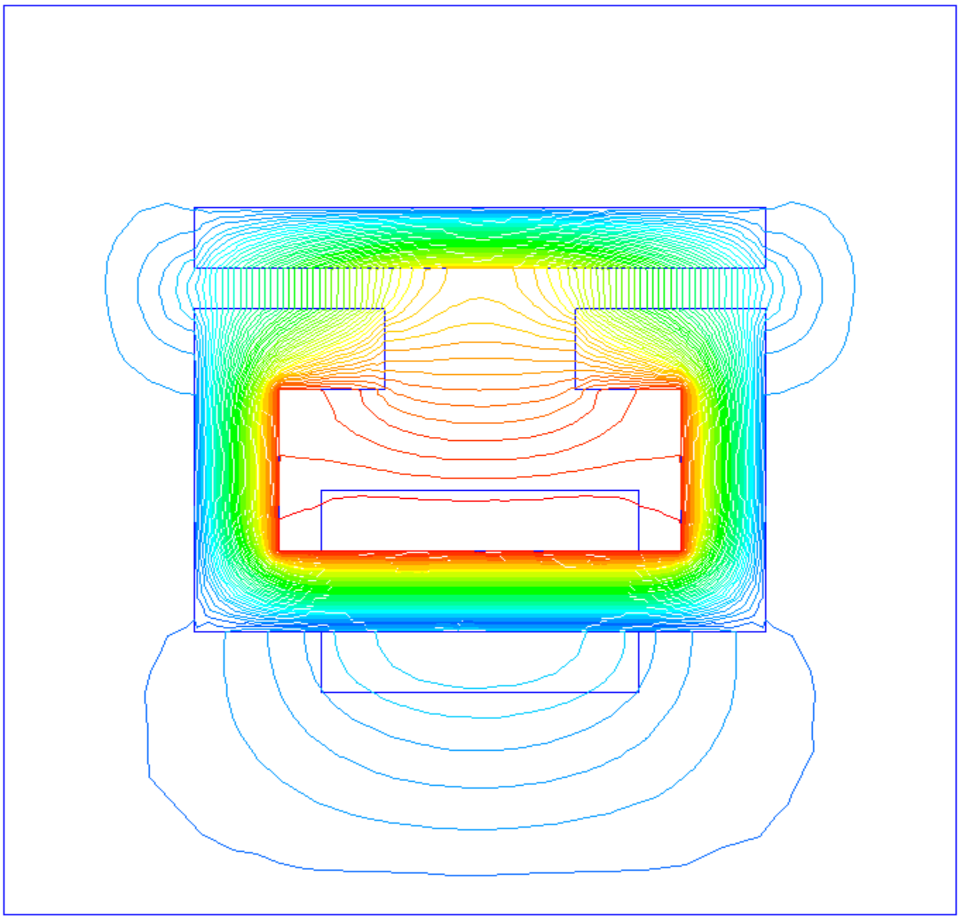

*Рис. 2. Силовые линии электромагнитного поля*

На рис. 3 представлена треугольная сетка, полученная при экономной аппроксимации поля, изображенного на рис. 2.

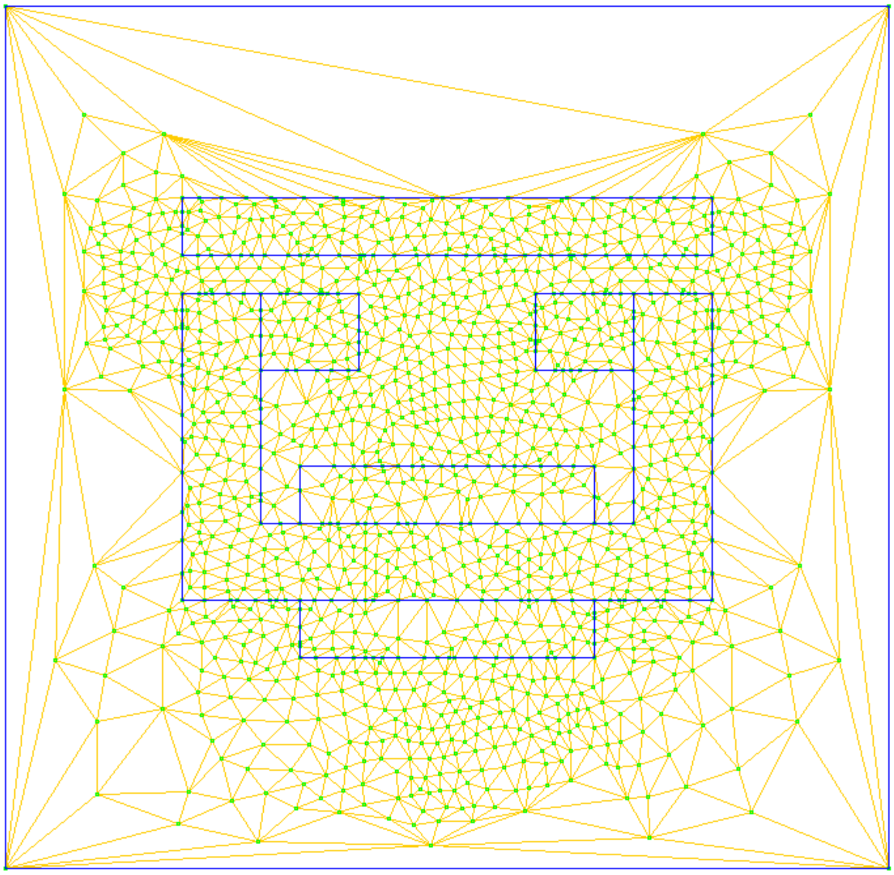

*Рис. 3. Треугольная сетка, полученная при экономной аппроксимации*

Нетрудно убедиться, что сетка имеет свойство Делоне: внутрь круга, описанного вокруг любого элемента сетки, не попадает ни одна вершина других треугольников. Хорошо видно, что по краям области, где поле затухает, площадь треугольников относительно велика. А в местах, где ожидается сильное изменение индукции, треугольники становятся мелкими.

Наглядно видно, что интенсивность сеточных узлов в разных участках сетки существенно разная и соответствует густоте эквипотенциальных линий на тех же участках исследуемой области. Четко соблюдается условие: густота сеточных узлов тем больше, чем сильнее меняется поле.

**Заключение.** Развит и реализован алгоритм автоматического построения кусочно-линейной аппроксимации при конечно-элементном моделировании двумерных краевых задач. Алгоритм экономен в смысле минимизации числа узлов сетки. Развитый подход реализован на модельной задаче вычисления электромагнитного поля реле.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Ruppert J**. A Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation // NASA Ames Research Center, Journal of Algorithms. - 1994.
2. **Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Пароникян А.Е.** Об оптимизации сетки для расчета магнитных полей методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2005. - Т. 58, № 3. - С. 570-578.
3. **Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Пароникян А.Е.** Об углах треугольной сетки для расчета магнитных полей методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2007. - Т. 60, № 3. - С. 523-532.
4. **Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Пароникян А.Е.** О расчете магнитных полей методом конечных элементов с динамической композицией элементов дискретизации // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2005. - Т. 58, № 2. - С. 332-339.



Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 04.10. 2016.



**Հ.Ս. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ, Կ.Ռ. ԵՆՈՔՅԱՆ, Տ.Ռ. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ, Ա.Ա. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ**


## ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ԽՆԱՅՈՂԱԿԱՆ ՄՈՏԱՐԿՄԱՆ ԱՎՏՈՄԱՏԱՑՎԱԾ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ


Առաջարկված է եզրային խնդիրների լուծումների կտոր առ կտոր գծային մոտարկումների ավտոմատացված կառուցման մի ալգորիթմ: Ալգորիթմը կիրառելի է վերջավոր տարրերի մեթոդով երկչափ եզրային խնդիրների լուծման ընթացքում եռանկյունային ցանցի ավտոմատացված կառուցման դեպքում: Ալգորիթմը խնայողական է ցանցի հանգույցների նվազեցման տեսանկյունից: Մշակված մոտեցումն իրականացվել է էլեկտրամագնիսական դաշտի մոդելային խնդրի հաշվարկի համար:



***Առանցքային բառեր.*** էլեկտրամագնիսական դաշտ, ցանցային խնդիրներ, մոտարկման խնայողական ալգորիթմ:



**H.S. SUKIASYAN, K.R. ENOKYAN, T.R. MELKONYAN, A.A. HOVHANNISYAN**


## AUTOMATIC DESIGN OF ECONOMICAL APPROXIMATION OF BOUNDARY PROBLEM SOLUTIONS


An algorithm for automatic design of piecewise-linear approximation of boundary problem solutions and the corresponding triangular mesh is proposed applied at solving two dimensional boundary problems by the finite element method. The algorithm is economical from the standpoint of minimizing the number of the mesh nodes. The developed approach is implemented on the model problem of calculating the electromagnetic field.



***Keywords:*** electromagnetic field, economical algorithm of approximation, mesh problems.