

С.О. СИМОНЯН

**ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЕ ГИПЕРМАТРИЧНО-БЛОЧНЫЕ
ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КВАДРАТНЫХ
МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Рассмотрены однопараметрические квадратные матричные уравнения, для решения которых предложены декомпозиционные гиперматрично-блочные аналитический, а также последовательный и параллельный численно-аналитические методы. Несмотря на то, что аналитический метод ограничен в практических приложениях, однако он служит основой для разработки последовательного и параллельного численно-аналитических методов, базирующихся на дифференциальных преобразованиях Г.Е. Пухова. Для всех методов получены соответствующие условия разрешимости задачи. Приведен модельный пример, демонстрирующий эффективность предложенных методов.

Ключевые слова: однопараметрические квадратные матричные уравнения, прямые и декомпозиционные аналитические методы решения, декомпозиционные последовательные и параллельные численно-аналитические методы решения, модельный пример, современные средства информационных технологий.

Введение. Решению квадратных матричных уравнений посвящено множество различных работ, в частности [1-6]. Среди этих уравнений особый интерес представляют однопараметрические квадратные матричные уравнения и, следовательно, методы их решения. В числе последних можно отметить, в частности, работы [7-9]. Так, в [7] был предложен спектральный метод для решения однопараметрических квадратных матричных уравнений, а в [8] – аналогичный метод для решения однопараметрических обобщенных квадратных матричных уравнений. В обоих случаях методы были основаны на дифференциальных преобразованиях [10], при которых был широко использован достаточно трудоемкий аппарат кронекеровых произведений матриц [11]. Ввиду ослабления этого обстоятельства в [9] был предложен гиперматрично-блочный численно-аналитический метод решения однопараметрических квадратных матричных уравнений на основе некоторой редукции исходной задачи и с дальнейшим применением также дифференциальных преобразований в качестве основного математического аппарата. В настоящей работе рассмат-

риваются декомпозиционные гиперматрично-блочные численно-аналитические методы решения однопараметрических квадратных матричных уравнений.

Заметим, что если m - порядок квадратных матричных коэффициентов, а $n=2$ – степень уравнения, то конечное число решений квадратных матричных уравнений в общем случае $\leq C_{2m}^2$, где C – комбинации [2, 4].

1. Прямой аналитический метод решения. В [7] рассмотрено однопараметрическое квадратное матричное уравнение

$$A_0(t) \cdot X^2(t) + A_1(t) \cdot X(t) + A_2(t) = [0] \quad (1)$$

с функциональными матрицами $A_0(t)$, $A_1(t)$, $A_2(t)$ порядка m и неизвестной функциональной матрицей $X(t)$ также порядка m , подлежащей определению. Это уравнение представлено также в виде эквивалентной матричной системы уравнений второго порядка

$$\begin{cases} A_0(t) \cdot Y(t) + A_1(t) \cdot X(t) + A_2(t) = [0], \\ X^2(t) - Y(t) = [0] \end{cases} \quad (2)$$

или в виде эквивалентной гиперматричной системы

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_1(t) & A_0(t) \\ X(t) & -E \end{bmatrix}_{2m \times 2m} \cdot \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}_{2m \times m} + \begin{bmatrix} A_2(t) \\ 0 \end{bmatrix}_{2m \times m} = \\ & = D(t)_{2m \times 2m} \cdot \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}_{2m \times m} + \begin{bmatrix} A_2(t) \\ 0 \end{bmatrix}_{2m \times m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{2m \times m}, \end{aligned} \quad (3)$$

где E – единичная матрица порядка m , а $Y(t)$ – дополнительная неизвестная матрица того же порядка, также подлежащая определению.

Представление (3) при полноранговости функциональной матрицы $D(t)$, т.е. при выполнении условия

$$\text{rang } D(t) = 2m, \quad (4)$$

порождает итерационную вычислительную схему

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}_{(q+1)} = - \begin{bmatrix} A_1(t) & A_0(t) \\ X(t) & -E \end{bmatrix}_{(q)}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A_2(t) \\ 0 \end{bmatrix} = -D^{-1}(t)_{(q)} \cdot \begin{bmatrix} A_2(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

(где q – номер итераций) или более эффективную итерационную вычислительную схему ньютоновского типа

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}_{(q+1)} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}_{(q)} - D^{-1}(t)_{(q)} \cdot \begin{bmatrix} A_2(t) \\ 0 \end{bmatrix} \right]. \quad (6)$$

2. Декомпозиционный аналитический метод решения. Теперь допустим, что функциональные матрицы, входящие в (2), комплексные, т.е.

$$A_0(t) = B_0(t) + j \cdot C_0(t), \quad (7)$$

$$A_1(t) = B_1(t) + j \cdot C_1(t), \quad (8)$$

$$A_2(t) = B_2(t) + j \cdot C_2(t), \quad (9)$$

$$X(t) = M(t) + j \cdot N(t), \quad (10)$$

$$Y(t) = P(t) + j \cdot Q(t). \quad (11)$$

Тогда из первого уравнения системы (2) получим подсистему

$$\begin{cases} B_0(t) \cdot P(t) - C_0(t) \cdot Q(t) + B_1(t) \cdot M(t) - C_1(t) \cdot N(t) + B_2(t) = 0, \\ C_0(t) \cdot P(t) + B_0(t) \cdot Q(t) + C_1(t) \cdot M(t) + B_1(t) \cdot N(t) + C_2(t) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

а из второго уравнения – подсистему

$$\begin{cases} M^2(t) - N^2(t) - P(t) = 0, \\ M(t) \cdot N(t) + N(t) \cdot M(t) - Q(t) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Объединив подсистемы (12) и (13) в одно целое, получим

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} B_0(t) & -C_0(t) \\ C_0(t) & B_0(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P(t) \\ Q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1(t) & -C_1(t) \\ C_1(t) & B_1(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M(t) \\ N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ -\begin{bmatrix} P(t) \\ Q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M(t) & -N(t) \\ N(t) & M(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M(t) \\ N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (14)$$

или гиперматрично-блочное представление

$$\begin{bmatrix} B_1(t) & -C_1(t) & B_0(t) & -C_0(t) \\ C_1(t) & B_1(t) & C_0(t) & B_0(t) \\ M(t) & -N(t) & & \\ N(t) & M(t) & & \end{bmatrix}_{4m \times 4m} \cdot \begin{bmatrix} M(t) \\ N(t) \\ P(t) \\ Q(t) \end{bmatrix}_{4m \times m} = - \begin{bmatrix} B_2(t) \\ C_2(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{4m \times m} \quad (15)$$

(где E – единичная матрица порядка $2m$), или в компактной записи

$$\underset{4m \times 4m}{D(t)} \cdot \underset{4m \times m}{R(t)} = - \underset{4m \times m}{S(t)}. \quad (16)$$

Представление (16) при выполнении условия

$$\text{rang } D(t) = 4m \quad (17)$$

порождает итерационную вычислительную схему

$$\underset{(q+1)}{R(t)} = - \underset{(q)}{D^{-1}(t)} \cdot \underset{(q)}{S(t)} \quad (18)$$

или более эффективную итерационную вычислительную схему ньютоновского типа

$$\underset{(q+1)}{R(t)} = \frac{1}{2} \cdot \left[\underset{(q)}{R(t)} - \underset{(q)}{D^{-1}(t)} \cdot \underset{(q)}{S(t)} \right]. \quad (19)$$

Замечание 1. Гиперматричные системы (3) и (15) обладают подобными структурами, что и следовало ожидать, с той лишь разницей, что (3) является системой порядка $2m$, а (15) – системой порядка $4m$. Кроме того, если в структуре системы (3) не замечаются определенные закономерности, то в (15) все блочные подматрицы порядка $2n$, входящие в гиперматрицу $D(t)$, являются блочно-кососимметрическими относительно соответствующих первых главных диагоналей и блочно-симметрическими относительно соответствующих вторых главных диагоналей.

3. Декомпозиционные численно-аналитические методы решения.

Теперь рассмотрим применение дифференциальных преобразований для решения гиперматрично-блочной системы (15), допустив, что для всех матричных элементов этой системы имеют место следующие дифференциальные преобразования [10]:

$$B_0(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{dB_0^K(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad \overline{\quad} \quad B_0(t) = \chi_0(t, t_v, H, B_0(K)), \quad (20)$$

$$B_1(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{dB_1^K(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad \overline{\quad} \quad B_1(t) = \chi_1(t, t_v, H, B_1(K)), \quad (21)$$

$$B_2(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{dB_2^K(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad \overline{\quad} \quad B_2(t) = \chi_2(t, t_v, H, B_1(K)), \quad (22)$$

$$C_0(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K C_0(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad \overline{\quad} \quad C_0(t) = \chi_3(t, t_v, H, C_0(K)), \quad (23)$$

$$C_1(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K C_1(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad \overline{\cdot} \quad C_1(t) = \chi_4(t, t_v, H, C_1(K)), \quad (24)$$

$$C_2(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K C_2(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad \overline{\cdot} \quad C_2(t) = \chi_5(t, t_v, H, C_2(K)), \quad (25)$$

$$M(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K M(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad \overline{\cdot} \quad M(t) = \chi_6(t, t_v, H, M(K)), \quad (26)$$

$$N(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K N(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad \overline{\cdot} \quad N(t) = \chi_7(t, t_v, H, N(K)), \quad (27)$$

$$P(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K P(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad \overline{\cdot} \quad P(t) = \chi_8(t, t_v, H, P(K)), \quad (28)$$

$$Q(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K Q(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad \overline{\cdot} \quad Q(t) = \chi_9(t, t_v, H, Q(K)), \quad (29)$$

где $B_0(K)$, $B_1(K)$, $B_2(K)$, $C_0(K)$, $C_1(K)$, $C_2(K)$, $M(K)$, $N(K)$, $P(K)$, $Q(K)$ – матричные дискреты однопараметрических матриц $B_0(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$, $C_0(t)$, $C_1(t)$, $C_2(t)$, $M(t)$, $N(t)$, $P(t)$, $Q(t)$ соответственно; H – масштабный коэффициент; $K = \overline{0, \infty}$ – целочисленный аргумент; t_v – центр аппроксимации; $\chi_0(\cdot), \dots, \chi_9(\cdot)$ – аппроксимирующие функции, восстанавливающие матрицы-оригиналы $B_0(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$, $C_0(t)$, $C_1(t)$, $C_2(t)$, $M(t)$, $N(t)$, $P(t)$, $Q(t)$ соответственно.

Итак, с учетом (20)-(29) гиперматрично-блочную систему (15) из области оригиналов переведем в область дифференциальных изображений, имея в виду, что

$$D(0) = \left[\begin{array}{cc|cc} B_1(0) & -C_1(0) & B_0(0) & -C_0(0) \\ C_1(0) & B_1(0) & C_0(0) & B_0(0) \\ \hline M(0) & -N(0) & & \\ N(0) & M(0) & & -E \end{array} \right],$$

$$D(l) = \left[\begin{array}{cc|cc} B_1(l) & -C_1(l) & B_0(l) & -C_0(l) \\ C_1(l) & B_1(l) & C_0(l) & B_0(l) \\ \hline M(l) & -N(l) & & \\ N(l) & M(l) & & 0 \end{array} \right], \ell = \overline{1, K},$$

$$R(l) = \begin{bmatrix} M(l) \\ N(l) \\ P(l) \\ Q(l) \end{bmatrix}, \ell = \overline{0, K}; \quad S(l) = \begin{bmatrix} B_2(l) \\ C_2(l) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ell = \overline{0, K},$$

где E – единичная матрица порядка $2m$.

а) Последовательные рекуррентные итерационные вычислительные схемы

Итак, с учетом (16) имеем:

при $K=0$:

$$\underset{4m \times 4m}{D(0)} \cdot \underset{4m \times m}{R(0)} = - \underset{4m \times m}{S(0)}, \quad (30)$$

откуда

$$R(0)_{(q+1)} = -\mathcal{D}^{-1}(0)_{(q)} \cdot S(0), \quad (31)$$

или, в соответствии с (19), более эффективную, из-за бóльшей степени манипулирования вычислительным процессом по сравнению с (31), вычислительную схему ньютоновского типа

$$R(0)_{(q+1)} = \frac{1}{2} \cdot [R(0)_{(q)} - \mathcal{D}^{-1}(0)_{(q)} \cdot S(0)]. \quad (32)$$

Естественно, вычислительные схемы (31) и (32) реализуемы при выполнении условий полноранговости матриц $\mathcal{D}(0)_{(q)}$, т.е. если

$$\text{rang } \mathcal{D}(0)_{(q)} = 4m, \quad \forall q; \quad (33)$$

при K=1:

$$\mathcal{D}(0) \cdot R(1) + \mathcal{D}(1) \cdot R(0) = -S(1), \quad (34)$$

откуда

$$R(1)_{(q+1)} = -\mathcal{D}^{-1}(0) \cdot [\mathcal{D}(1)_{(q)} \cdot R(0) + S(1)], \quad (35)$$

или, в соответствии с (19), вычислительную схему

$$R(1)_{(q+1)} = \frac{1}{2} \cdot \{R(2)_{(q)} - \mathcal{D}^{-1}(0) \cdot [\mathcal{D}(1)_{(q)} \cdot R(0) + S(1)]\} \quad (36)$$

при K=2:

$$\mathcal{D}(0) \cdot R(2) + \mathcal{D}(1) \cdot R(1) + \mathcal{D}(2) \cdot R(0) = -S(2), \quad (37)$$

откуда

$$R(2)_{(q+1)} = -\mathcal{D}^{-1}(0) \cdot [\mathcal{D}(2)_{(q)} \cdot R(0) + \mathcal{D}(1) \cdot R(1) + S(2)] \quad (38)$$

или

$$R(2)_{(q+1)} = \frac{1}{2} \cdot \{R(2)_{(q)} - \mathcal{D}^{-1}(0) \cdot [\mathcal{D}(2)_{(q)} \cdot R(0) + \mathcal{D}(1) \cdot R(1) + S(2)]\} \quad (39)$$

⋮

при K=K:

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(0) \cdot R(K) + \mathcal{D}(1) \cdot R(K-1) + \mathcal{D}(2) \cdot R(K-2) + \dots + \\ &+ \mathcal{D}(K) \cdot R(0) = -S(K) \end{aligned} \quad (40)$$

или

$$\mathcal{D}(0) \cdot R(K) + \sum_{l=1}^{K-1} \mathcal{D}(l) \cdot R(K-l) + \mathcal{D}(K) \cdot R(0) = -S(K), \quad (41)$$

откуда

$$R(K)_{(q+1)} = -\mathcal{D}^{-1}(0) \cdot [\mathcal{D}(K)_{(q)} \cdot R(0) + \sum_{l=1}^{K-1} \mathcal{D}(l) \cdot R(K-l) + S(K)] \quad (42)$$

или

$$\begin{aligned} &R(K)_{(q+1)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{R(K)_{(q)} - \mathcal{D}^{-1}(0) \cdot [\mathcal{D}(K)_{(q)} \cdot R(0) + \sum_{l=1}^{K-1} \mathcal{D}(l) \cdot R(K-l) + S(K)]\}. \end{aligned} \quad (43)$$

б) Параллельные итерационные вычислительные схемы

Объединив соотношения (30), (34), (37) и (40), получим следующее гиперматрично-блочное представление:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ \mathcal{D}(1) & \mathcal{D}(0) & \cdots & 0 \\ \mathcal{D}(2) & \mathcal{D}(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{D}(K) & \mathcal{D}(K-1) & \cdots & \mathcal{D}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R(0) \\ R(1) \\ R(2) \\ \vdots \\ R(K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(0) \\ S(1) \\ S(2) \\ \vdots \\ S(K) \end{bmatrix}, \quad (44)$$

откуда с учетом условий (33) имеем

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} R(0) \\ R(1) \\ R(2) \\ \vdots \\ R(K) \end{bmatrix}_{(q+1)} = - \begin{bmatrix} \mathcal{D}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ \mathcal{D}(1) & \mathcal{D}(0) & \cdots & 0 \\ \mathcal{D}(2) & \mathcal{D}(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{D}(K) & \mathcal{D}(K-1) & \cdots & \mathcal{D}(0) \end{bmatrix}_{(q)}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} S(0) \\ S(1) \\ S(2) \\ \vdots \\ S(K) \end{bmatrix} = \\
 & = - \begin{bmatrix} \mathcal{D}_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_0 & \cdots & 0 \\ \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{D}_K & \mathcal{D}_{K-1} & \cdots & \mathcal{D}_0 \end{bmatrix}_{(q)} \cdot \begin{bmatrix} S(0) \\ S(1) \\ S(2) \\ \vdots \\ S(K) \end{bmatrix}, \tag{45}
 \end{aligned}$$

где

[illegible]

Представим (45) в следующем компактном виде:

$$R(\bullet)_{(q+1)} = -\mathcal{D}^{-1}(\bullet)_{(q)} \cdot S(\bullet) \quad (47)$$

или в виде более эффективной, с практической точки зрения, итерационной вычислительной схемы ньютоновского типа

$$R(\bullet)_{(q+1)} = \frac{1}{2} \cdot [R(\bullet)_{(q)} - \mathcal{D}^{-1}(\bullet)_{(q)} \cdot S(\bullet)]. \quad (48)$$

Замечание 2. Очевидно, что из условий (33) немедленно следует полноранговость гиперматриц $D(\bullet)_{(q)}$ на всех шагах итерационных процедур из-за их нежнетреугольной структуры, т.е. условия

$$\text{rang } D(\bullet)_{(q)} = 4 \cdot (K+1) \cdot m, \forall q. \quad (49)$$

Итак, организовав вычислительные процедуры (31), (35), (38),..., (42) или (32), (36), (39),..., (43) при последовательной рекуррентной итерационной вычислительной схеме, а также процедуры (47) или (48) при параллельной итерационной вычислительной схеме и определив гиперматричные дискреты $R(\ell)$, $\ell = \overline{0, K}$, далее, в соответствии с (26)-(29), можно определить матрицы $M(t)$, $N(t)$, $P(t)$ и $Q(t)$, а затем, в соответствии с (10) и (11), неизвестные матрицы $X(t)$ и $Y(t)$.

Модельный пример. Пусть задано однопараметрическое квадратное матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} j & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} \cdot X^2(t) + \begin{bmatrix} 1 & jt \\ 0 & t \end{bmatrix} \cdot X(t) + \begin{bmatrix} -j \cdot t^2 - j + t^2 - t - 1 & (-j \cdot t^2 - j \cdot t + t) \\ -2t^2 & -jt^3 \end{bmatrix} = [0],$$

и необходимо найти хотя бы одно его решение $X(t)$.

Очевидно, что при $t_v = 1$, $H=1$ имеем

$$B_0(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_0(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_0(K) = [0], \quad \forall K \geq 2;$$

$$C_0(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C_0(K) = [0]; \quad \forall K \geq 1;$$

$$B_1(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_1(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_1(K) = [0], \quad \forall K \geq 2;$$

$$C_1(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C_1(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C_1(K) = [0], \quad \forall K \geq 2;$$

$$B_2(0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_2(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_2(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_2(K) = [0]; \quad \forall K \geq 3.$$

При этих матричных дискретах согласно вычислительной схеме (32) для определения одного начального матричного дискрета $X(0)$ соответствующего решения $X(t)$ имеем следующую картину итерационных процедур при начальном приближении

$$X(0)_0 = \begin{bmatrix} 0 & j \\ (1+j) & (-1-j) \end{bmatrix},$$

представленную в табл. 1 (заметим, что здесь и далее вычисления произведены с точностью до $\varepsilon \cong 10^{-4}$).

Таблица 1

Динамика вычислительных процедур

q	$X(0)_q$
0	$\begin{bmatrix} 0 & j \\ (1+j) & (-1-j) \end{bmatrix}_0$
20	$\begin{bmatrix} (0,9864+0,0331 \cdot j) & (-0,0248+1,0015 \cdot j) \\ (0,9914-0,0180 \cdot j) & (-0,0086-0,0108 \cdot j) \end{bmatrix}$
40	$\begin{bmatrix} (0,9982-0,0059 \cdot j) & (0,0031+0,9971 \cdot j) \\ (1,0031+0,0014 \cdot j) & (0,0000+0,0024 \cdot j) \end{bmatrix}$
60	$\begin{bmatrix} (1,0009+0,0006 \cdot j) & (-0,0001+1,0007 \cdot j) \\ (0,9994+0,0001 \cdot j) & (-0,0003-0,0003 \cdot j) \end{bmatrix}$
80	$\begin{bmatrix} (0,9998+0,0000 \cdot j) & (-0,0001+0,9999 \cdot j) \\ (1,0001-0,0001 \cdot j) & (0,0001+0,0000 \cdot j) \end{bmatrix}$
100	$\begin{bmatrix} (1,0000-0,0000 \cdot j) & (-0,0000+1,0000 \cdot j) \\ (1,0000-0,0000 \cdot j) & (-0,0000+0,0000 \cdot j) \end{bmatrix}$

Таким образом, для некоторого решения задачи имеем

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

С учетом этого начального матричного дискрета и при начальном приближении

$$X(1)_0 = \begin{bmatrix} (-1+2 \cdot j) & (3+3 \cdot j) \\ (4-5 \cdot j) & (5+4 \cdot j) \end{bmatrix}$$

согласно вычислительной схеме (36) имеем следующую картину итерационных процедур, представленную в табл. 2.

Таблица 2

Динамика вычислительных процедур

q	$X(1)_q$
0	$\begin{bmatrix} (-1+2 \cdot j) & (3+3 \cdot j) \\ (4-5 \cdot j) & (5+4 \cdot j) \end{bmatrix}_0$
20	$\begin{bmatrix} (-0,7871-0,7474 \cdot j) & (0,2305+0,2838 \cdot j) \\ (1,6032-0,0470 \cdot j) & (0,2104+0,3629 \cdot j) \end{bmatrix}$
40	$\begin{bmatrix} (0,1840+0,0175 \cdot j) & (0,0443+1,1202 \cdot j) \\ (0,9241+0,0697 \cdot j) & (-0,0663-0,0265 \cdot j) \end{bmatrix}$
60	$\begin{bmatrix} (-0,0265+0,0170 \cdot j) & (-0,0186+0,9885 \cdot j) \\ (1,0029-0,0173 \cdot j) & (0,0117-0,0034 \cdot j) \end{bmatrix}$
80	$\begin{bmatrix} (0,0018-0,0051 \cdot j) & (0,0037+0,9996 \cdot j) \\ (1,0014+0,0026 \cdot j) & (-0,0012+0,0017 \cdot j) \end{bmatrix}$
100	$\begin{bmatrix} (0,0003+0,0009 \cdot j) & (-0,0005+1,0004 \cdot j) \\ (0,9995-0,0002 \cdot j) & (-0,0000-0,0004 \cdot j) \end{bmatrix}$
130	$\begin{bmatrix} (0,0000-0,0001 \cdot j) & (0,0000+1,0000 \cdot j) \\ (1,0000-0,0000 \cdot j) & (-0,0000+0,0000 \cdot j) \end{bmatrix}$

Таким образом, имеем

$$X(1) = \begin{bmatrix} 0 & j \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее, с учетом полученных матричных дискретов $X(0)$ и $X(1)$ при начальном приближении

$$X(2)_0 = \begin{bmatrix} (-2+2 \cdot j) & (-4+5 \cdot j) \\ (-5-2 \cdot j) & (3-5 \cdot j) \end{bmatrix}$$

согласно вычислительной схеме (39) имеем аналогичную картину итерационных процедур, представленную в табл. 3.

Таблица 3

Динамика вычислительных процедур

q	$X(2)_q$
0	$\begin{bmatrix} (-2+2 \cdot j) & (-4+5 \cdot j) \\ (-5-2 \cdot j) & (3-5 \cdot j) \end{bmatrix}_0$
20	$\begin{bmatrix} (-0,3094-0,3803 \cdot j) & (0,1446-0,3074 \cdot j) \\ 0,2729+0,0137 \cdot j & (0,0733+0,1748 \cdot j) \end{bmatrix}$
40	$\begin{bmatrix} (0,0814+0,0185 \cdot j) & (0,0129+0,0564 \cdot j) \\ (-0,0380+0,0268 \cdot j) & (-0,0282-0,0157 \cdot j) \end{bmatrix}$
60	$\begin{bmatrix} (-0,0129+0,0061 \cdot j) & (-0,0077-0,0062 \cdot j) \\ (0,0023-0,0076 \cdot j) & (0,0054-0,0009 \cdot j) \end{bmatrix}$
80	$\begin{bmatrix} (0,0011-0,0022 \cdot j) & (0,0017+0,0000 \cdot j) \\ (0,0005+0,0013 \cdot j) & (-0,0006+0,0007 \cdot j) \end{bmatrix}$
100	$\begin{bmatrix} (0,0000+0,0004 \cdot j) & (-0,0002+0,0001 \cdot j) \\ (-0,0002-0,0001 \cdot j) & (0,0000-0,0001 \cdot j) \end{bmatrix}$
120	$\begin{bmatrix} (0,0000-0,0000 \cdot j) & (0,0000-0,0000 \cdot j) \\ (0,000-0,0000 \cdot j) & (0,0000+0,0000 \cdot j) \end{bmatrix}$

Таким образом, имеем

$$X(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что такая же картина имеет место и для последующих матричных дискретов, т.е.

$$X(K) = [0], \quad \forall K \geq 3.$$

Следовательно, окончательно имеем следующее дифференциально-тейлоровское решение:

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & j \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot (t-1) + [0] = \begin{bmatrix} 1 & j \cdot (1+t-1) \\ (1+t-1) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & jt \\ t & 0 \end{bmatrix},$$

в абсолютной точности которого нетрудно убедиться подстановкой его в исходное матричное уравнение.

Замечание 3. Остальные решения задачи могут быть получены аналогичным образом при выборе других, управляющих вычислительными процеду-

рами параметров – начальных матричных приближений $R(0)_0$ или других центров аппроксимации t_v .

Заключение. Таким образом, решение однопараметрических квадратных матричных уравнений на основе применения дифференциальных преобразований в основном сводится к выполнению рекуррентных численных процедур при последовательных вычислительных схемах, а также поточных численных процедур при параллельных вычислительных схемах. При этом условиями разрешимости задачи являются условия (33) полноранговости матриц $D(0)_{(q)}$, $\forall q$. Что же касается восстановления непрерывных решений исходной задачи, то оно не представляет собой трудности.

И, наконец, отметим, что предложенные вычислительные схемы, очевидно, легко могут быть реализованы средствами современных информационных технологий [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Davis G.J.** Numerical solution of a quadratic matrix equation // SIAM J. Sci. Stat.comp. – 1981. – 2(N2). – P.164-175.
2. **Икрамов Х.Д.** Численное решение матричных уравнений. - М.: Наука, 1984. – 192 с.
3. **Hingman N.J., Kim H.M.** Numerical analysis of a quadratic matrix equation // IMA. Journal of Numerical Analysis. – 2000. – 20. – P. 499-519.
4. **Гельфанд С.И.** О числе решений квадратного уравнения // Журнал “Глобус-1”. – 2000. – С. 124-134.
5. **Козлов В.В.** Ограничения квадратичных форм на лагранжевы плоскости, квадратные матричные уравнения и гироскопическая стабилизация // Функциональный анализ и его приложения. – 2005. - Вып. 4, т.39. – С. 32-47.
6. **Палин В.В.** О разрешимости квадратных матричных уравнений // Вестник Моск. гос. ун-та. Серия 1: Математика, механика. – 2008. - №6. – С. 36-41.
7. **Симонян С.О.** К решению однопараметрических квадратных матричных уравнений // Вестник ИАА. –2016. - Т. 13, №4 – С. 462-470.
8. **Симонян С.О.** Метод решения однопараметрических обобщенных квадратных матричных уравнений // Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиотехника.- 2016.- №2. – С. 12-23.
9. **Симонян С.О.** Гиперматрично-блочный численно-аналитический метод решения однопараметрических квадратных матричных уравнений // Известия НАН РА и НПУА. Сер. ТН.- 2016.- Т. LXIX, №4.– С. 422-430.
10. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. - Киев: Наукова думка, 1984.- 420 с.
11. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. - М.: Физматлит, 2010. – 560 с.

12. **Strastrup B.** The C++ Programming Language. - 4th Edition. - Boston: Addison – Wesley professional, 2013. – 1368 p.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 09.12.2016.

Ս.Հ. ՄԻՄՈՆՅԱՆ

ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՔԱՌԱԿՈՒՄԻ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՂԵԿՈՄՊՈԶԻՑԻՈՆ ՀԻՊԵՐՄԱՏՐԻՑԱ-ԲԼՈԿԱՅԻՆ ԹՎԱ- ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

Դիտարկվել են միապարամետրական քառակուսի մատրիցային հավասարումները, որոնց լուծման համար առաջարկվել են դեկոմպոզիցիոն հիպերմատրիցա-բլոկային անալիտիկ, հաջորդական և զուգահեռ թվա-անալիտիկ մեթոդներ: Չնայած այն բանին, որ անալիտիկ մեթոդը սահմանափակված է գործնական կիրառություններում, սակայն այն հիմք է ծառայում հաջորդական և զուգահեռ թվա-անալիտիկ մեթոդների մշակման համար, որոնք հիմնված են Գ.Ե. Պուխովի դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա: Բոլոր մեթոդների համար ստացվել են խնդրի լուծելիության համապատասխան պայմանները: Ներկայացված է մոդելային օրինակ, որը ցույց է տալիս առաջարկված մեթոդների արդյունավետությունը:

Առանցքային բառեր. միապարամետրական քառակուսի մատրիցային հավասարումներ, լուծման ուղիղ և դեկոմպոզիցիոն անալիտիկ մեթոդներ, լուծման դեկոմպոզիցիոն հաջորդական և զուգահեռ թվա-անալիտիկ մեթոդներ, մոդելային օրինակ, տեղեկատվական տեխնոլոգիաների ժամանակակից միջոցներ:

S.H. SIMONYAN

DECOMPOSITION SUPER MATRIX-BLOCK NUMERICAL - ANALYTICAL METHODS FOR SOLVING ONE-PARAMETRIC QUADRATIC MATRIX EQUATIONS

One-parametric quadratic square matrix equations for whose solution, decomposition hyper matrix block-analytical, as well as serial and parallel numerical and analytical methods are proposed. Despite the fact that the analytical method is limited in practical applications, it serves as a basis for the development of serial and parallel numerical and analytical methods based on the differential transformations of G.E Pukhov. Appropriate conditions for the solvability of the problem are obtained for all the methods. An example of a model that demonstrates the effectiveness of the proposed methods is introduced.

Keywords: square-parameter matrix equations, direct and analytical methods and decomposition solutions, decomposition serial and parallel methods of numerical analysis solutions, a model example, modern means of information technology.