

К.С. САРКИСЯН, Дж.С. СУКИАСЯН

**КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ,
УСИЛЕННОЙ ЧЕТЫРЬМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ И
ОДНИМ БЕСКОНЕЧНЫМ СТРИНГЕРАМИ**

Рассматривается контактная задача о передаче нагрузки от одного упругого бесконечного и четырех упругих полубесконечных стрингеров к изотропной однородной сплошной упругой бесконечной пластине. Контактующая пара (пластина-стрингер) деформируется под воздействием сонаправленных осевых сосредоточенных сил, приложенных к упругим полубесконечным стрингерам. Задача определения неизвестных контактных напряжений на полубесконечных симметричных интервалах сводится к решению одного сингулярного интегрального уравнения первого рода для деформации конечного промежуточного интервала между полубесконечными стрингерами. Контактные напряжения выражаются через найденные деформации в замкнутом виде.

Ключевые слова: пластина, контакт, стрингер, сингулярное интегральное уравнение, функциональное уравнение, преобразование Фурье.

Исследование проблем взаимодействия между телами, содержащими концентраторы напряжения, такие как стрингеры, тонкостенные включения и трещины с однородной или кусочно-однородной бесконечными пластинами, является одним из актуальных направлений контактных задач теории упругости [1,2]. Такие проблемы часто возникают в авиастроении, судостроении, механике соединений и в других областях прикладной механики, поэтому их исследование имеет как теоретическую, так и прикладную значимость.

Пусть упругий сплошной изотропный лист в виде тонкой однородной бесконечной пластины малой постоянной толщины H на линиях $y=-b$ и $y=b$ ($b>0$) своей верхней поверхности усилен четырьмя параллельными полубесконечными стрингерами с одинаковыми достаточно малыми прямоугольными поперечными сечениями F и модулями упругости E_1 , а на линии $y=0$ – одним бесконечным упругим стрингером с модулем упругости E_0 . Задача заключается в определении закона распределения контактных напряжений вдоль линии соединения стрингеров с бесконечной упругой пластиной и осевых (нормальных) напряжений, возникающих в стрингерах, когда на концах полубесконечных стрингеров действуют сосредоточенные силы P (рис.1).

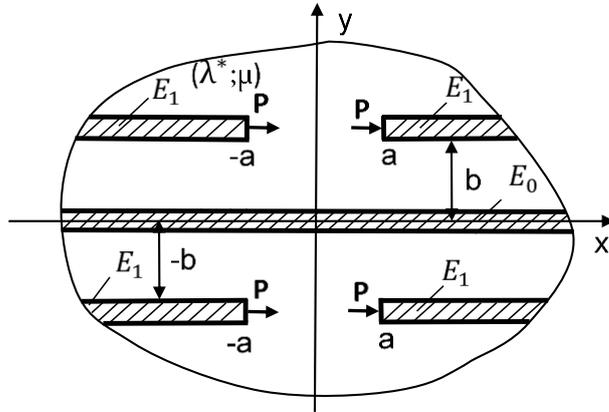


Рис. 1. Упругая однородная бесконечная пластина, усиленная четырьмя полубесконечными и одним бесконечным стрингерами

В исследуемой задаче относительно стрингеров принимается модель контакта по линии, т.е. предполагается, что тангенциальные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка, а для упругой однородной пластины справедлива модель обобщённого плоского напряженного состояния [3].

Тогда трансформанты Фурье касательных напряжений на линии $y=0$ и горизонтальных перемещений на линии $y=b$ выразятся трансформантом Фурье тангенциальных касательных напряжений на линии $y=b$ [4,5]:

$$\bar{\tau}(\sigma;0) = \bar{\tau}(\sigma;b) \frac{2(kb\sigma^2 - |\sigma|)e^{-|\sigma|b}}{T + |\sigma|} \quad (-\infty < \sigma < \infty), \quad (1)$$

$$\bar{u}(\sigma;b) = \frac{\bar{\tau}(\sigma;b)}{TE_0F} \left[\frac{T - 2bkT|\sigma| - k^2b^2|\sigma|^3}{|\sigma|(T + |\sigma|)} e^{-2|\sigma|b} + \frac{1}{|\sigma|} \right] \quad (-\infty < \sigma < \infty), \quad (2)$$

где приняты следующие обозначения:

$$T = \frac{4\mu(\lambda^* + 2\mu)}{\lambda^* + 3\mu} \frac{H}{E_0F}; \quad k = \frac{\lambda^* + \mu}{\lambda^* + 3\mu}. \quad (3)$$

Для определения неизвестной функции $\tau(\sigma;b)$ будем использовать условия равновесия стрингеров:

$$\frac{d^2u_s(x;0)}{dx^2} = \frac{\tau(\sigma;0)}{E_0F} \quad (-\infty < x < \infty), \quad (4)$$

$$\frac{d^2 u_s(x; b)}{dx^2} = \frac{\tau(\sigma; b)}{E_1 F} (|x| > a) \quad (5)$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{du_s(x; b)}{dx} \right|_{x=a} = -\frac{P}{E_1 F}, \quad (6)$$

$$\left. \frac{du_s(x; b)}{dx} \right|_{x=-a} = \frac{P}{E_1 F}. \quad (7)$$

К вышеприведенным условиям следует добавить также условие контакта:

$$\frac{du(x; b)}{dx} = \frac{du_s(x; b)}{dx} \quad (|x| \geq a). \quad (8)$$

Применив обратное преобразование Фурье к (2) и учитывая условие контакта, будем иметь

$$U_1(x) + U_2(x) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma \bar{u}(\sigma; b) e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad (9)$$

где

$$U_1(x) + U_2(x) = -\frac{du(x; b)}{dx}, \quad (10)$$

причем

$$U_1(x) = \begin{cases} \frac{du(x; b)}{dx}, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a; \end{cases} \quad (11)$$

$$U_2(x) = \begin{cases} \frac{du(x; b)}{dx}, & |x| > a, \\ 0, & |x| \leq a; \end{cases} \quad (12)$$

$$\frac{1}{E_1 F} \bar{\tau}(\sigma; b) = \frac{2P}{E_1 F} \cos \sigma a - i\sigma \bar{U}_2(\sigma). \quad (13)$$

С другой стороны,

$$u(x;b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(\sigma;b) e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad (14)$$

откуда

$$\frac{du(x;b)}{dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\sigma) \bar{u}(\sigma;b) e^{-i\sigma x} d\sigma. \quad (15)$$

Применив далее к (15) преобразование Фурье, получим

$$\bar{U}_1(\sigma) + \bar{U}_2(\sigma) = -i\sigma \bar{K}_1(\sigma) \bar{\tau}(\sigma;b), \quad (16)$$

где введено обозначение

$$\bar{K}_1(\sigma) = \frac{1}{TE_1F} \left[\frac{T - 2bkT|\sigma| - k^2b^2|\sigma|^3}{|\sigma|(T + |\sigma|)} e^{-2|\sigma|b} + \frac{1}{|\sigma|} \right] \quad (-\infty < \sigma < \infty). \quad (17)$$

Подставляя выражение функции $\bar{U}_2(\sigma)$ из (13) в (16), окончательно для $\bar{\tau}(\sigma;b)$ получим

$$\bar{\tau}(\sigma;b) = \frac{2P}{\sigma E_1F} \cos(\sigma a) \bar{K}(\sigma) + 2\bar{K}(\sigma) \bar{U}_1(\sigma), \quad (18)$$

где

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{\sigma}{\frac{1}{E_0F} + \sigma^2 \bar{K}_1(\sigma)}. \quad (19)$$

Применив к (18) обратное преобразование Фурье, получим

$$\tau(x;b) = \frac{P}{\pi E_1F} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{K}(\sigma) \cos(\sigma a)}{\sigma} e^{-i\sigma x} d\sigma + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a K(x-s) U_1(s) ds \quad (20)$$

при условии

$$\frac{P}{E_1F} \int_{-a}^a \frac{\bar{K}(\sigma) \cos(\sigma a)}{\sigma} e^{-i\sigma x} d\sigma + \int_{-a}^a K(x-s) U_1(s) ds = 0. \quad (21)$$

Учитывая, что $\bar{K}(\sigma)$ является нечетной функцией, (20) примет вид

$$\tau(x;b) = \frac{2P}{\pi E_1 F} \int_0^{\infty} \frac{\bar{K}(\sigma) \cos \sigma x}{\sigma \cos \sigma a} d\sigma + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a K(x-s) U_1(s) ds, \quad (22)$$

$$\frac{P}{E_1 F} \int_0^a \frac{\bar{K}(\sigma) \cos(\sigma a)}{\sigma} \cos(\sigma x) d\sigma + \int_{-a}^a K(x-s) U_1(s) ds = 0. \quad (23)$$

Программная реализация численного алгоритма решения исследуемой контактной задачи проведена в среде Wolfram Mathematica 11.0.

Полученные графики, изображенные на рис. 2, 3, показывают поведение касательных напряжений в контактной зоне между полубесконечным стрингером и бесконечной пластиной для различных соотношений геометрических и физических параметров. Вычислены также нормальные напряжения, возникающие в полубесконечных стрингерах, которые графически изображены на рис. 4. В качестве геометрического параметра рассматривается величина b/a , описывающая отношение расстояния между бесконечным и полубесконечным стрингерами и половины расстояния между полубесконечными стрингерами. В качестве физических параметров рассматриваются величины E_0/E и E_1/E , характеризующие отношение модулей упругости полубесконечных стрингеров и бесконечных стрингеров к модулю упругости пластины.

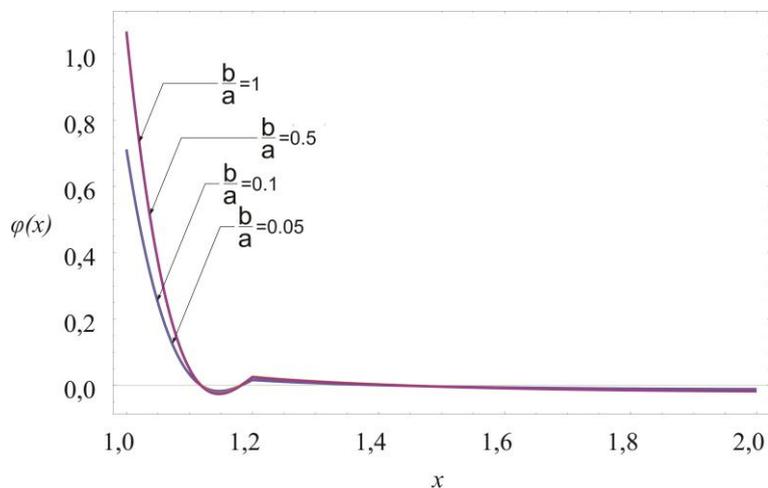


Рис. 2. Поведение тангенциальных контактных напряжений на линии $y = b$ контакта между полубесконечным упругим стрингером и бесконечной однородной упругой пластиной при $b/a = 0,05; 0,1; 0,5$ и $E_0/E = 3/2, E_1/E = 2$

Из рис. 2 видно, что безразмерная функция $\varphi(x)$, описывающая тангенциальные контактные напряжения на линии $y = b$ контакта между полубесконечным упругим стрингером и бесконечной упругой пластиной, довольно быстро стремится к нулю при $b/a = 0,05$; $b/a = 0,1$; $b/a = 0,5$ и $b/a = 1$. В частности, уже $x = 1,5 - \varphi(x) = 7 \cdot 10^{-5}$. Следует отметить также, что при $b/a = 0,05$ и $b/a = 0,1$, а также $b/a = 0,5$ и $b/a = 1$ функция $\varphi(x)$ проявляет идентичное поведение. При переходе от значения геометрической характеристики $b/a = 0,1$ к $b/a = 0,5$ поведение тангенциальных контактных напряжений существенно меняется вблизи точки приложения сосредоточенной силы P .

Поведение безразмерной функции $\varphi(x)$ при различных значениях физических параметров E_0/E и E_1/E , характеризующих отношение модулей упругости полубесконечных стрингеров и бесконечного упругого стрингера к модулю упругости пластины, соответственно изображено на рис. 3. В результате вычислений было обнаружено, что поведение функции $\varphi(x)$ при изменении физических параметров E_0/E и E_1/E не зависит от геометрической характеристики b/a , в связи с чем во всех вычислениях принято $b/a = 0,5$.

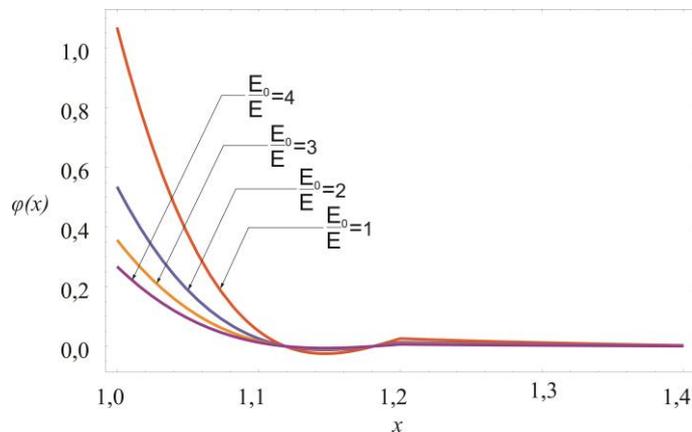


Рис. 3. Поведение тангенциальных контактных напряжений на линии $y = b$ контакта между полубесконечным упругим стрингером и бесконечной однородной упругой пластиной при $E_0/E = 1; 2; 3; 4$

Поведение функции $\Psi(x)$, описывающей интенсивность нормальных напряжений, возникающих в упругих полубесконечных стрингерах при разных геометрических параметрах, изображено на рис. 4. В качестве геометрического параметра рассматривается величина b/a , описывающая отношение расстояния между полубесконечным и бесконечным упругими стрингерами и половины длины расстояния между полубесконечными упругими стрингерами.

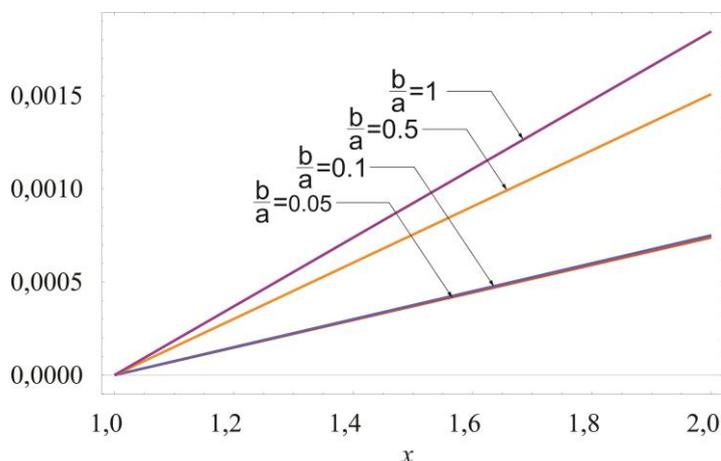


Рис. 4. Поведение нормальных напряжений, возникающих в упругих полубесконечных стрингерах при $b/a = 0,05$; $b/a = 0,1$; $b/a = 0,5$; $b/a = 1$ и $E_0/E = 3/2$, $E_1/E = 1$

Как следует из рис. 4, при малых значениях геометрической характеристики b/a поведение безразмерной функции $\Psi(x)$ почти одинаково. Зависимость поведения безразмерной функции $\Psi(x)$ от геометрического параметра b/a была исследована также при $E_0/E = 3/2$, $E_1/E = 2$ и $E_0/E = 3$, $E_1/E = 2$. Установлено, что $\Psi(x)$ убывает при возрастании как отношения E_0/E , так и отношения E_1/E (независимо друг от друга).

Заключение. Задача определения неизвестных контактных напряжений на полубесконечных симметричных интервалах сведена к решению одного сингулярного интегрального уравнения первого рода (23) для деформации $U_1(x)$ конечного промежуточного интервала между полубесконечными стрингерами [6]. Контактные же напряжения $\tau(x; 0)$ выражаются через найденные деформации в замкнутом виде (21). Получены графики, описывающие интенсивность нормальных напряжений, возникающих в упругих полубесконечных стрингерах при разных геометрических параметрах, а также графики, показывающие поведение касательных напряжений в контактной зоне между полубесконечным стрингером и бесконечной пластиной для различных соотношений между геометрическими и физическими параметрами рассматриваемой контактной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – М.: Наука, 1983.- 487с.
2. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980.- 411с.

3. **Melan E.** Ein Beitrag zur Theorie geschwiffter Verbindungen // Ingenieur-Archiv.- 1932. - Bd3, heft 2. - S. 123-129.
4. **Арутюнян Н.Х.** Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением // ПММ. – 1968. - Т.32, №4. - С. 632-646.
5. **Саркисян К.С., Сукиасян Дж. С.** Контактная задача упругой бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными бесконечными и полубесконечными стрингерами // Вестник НПУА: Механика, машиноведение, машиностроение. – 2016. - № 2. - С.38-44.
6. **Григорян Э.Х.** Об одном эффективном методе решения одного класса смешанных задач теории упругости // Уч. записки ЕГУ. Естеств. науки. - 1979. - № 2. - С. 62-71.

Институт механики НАН РА, Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 31.02.2017.

Կ.Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Զ.Ս. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ

ԵՐԿՈՒ ԱՆՎԵՐՁ ԵՎ ՉՈՐՍ ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՁ ԶՈՒԳԱՀԵՆ ՎԵՐԱԴԻՐՆԵՐՈՎ ՈՒՃԵՂԱՑՎԱԾ ՀԱՄԱՍԵՆ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԱՆՎԵՐՁ ՍԱԼԻ ԿՈՆՍԱԿՏՍՅՈՒՆ ԽՆԴԻՐԸ

Դիտարկված է երկու անվերջ և չորս կիսաանվերջ զուգահեռ առաձգական վերադիրներից իզոտրոպ համասեռ առաձգական անվերջ սալին բեռի փոխանցման կոնտակտային խնդիրը: Սալ-վերադիր կոնտակտային զույգը դեֆորմացվում է առաձգական կիսաանվերջ վերադիրներին կիրառված համուղղված, կենտրոնացված ուժերի ազդեցության տակ: Կիսաանվերջ սիմետրիկ միջակայքերում անհայտ կոնտակտային լարումների որոշման խնդիրը հանգում է դրանց միջև ընկած միջակայքում դեֆորմացումների նկատմամբ առաջին սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման: Որոնվող կոնտակտային լարումներն արտահայտվում են այդ դեֆորմացումներով:

Առանցքային բառեր. սալ, կոնտակտ, ստրինգեր, սինգուլյար ինտեգրալ հավասարում, ֆունկցիոնալ հավասարում, Ֆուրյեի ձևափոխություն:

K.S. SARGSYAN, J.S. SUKIASYAN

THE CONTACT PROBLEM OF ELASTIC INFINITE PLATE STRENGTHENED BY TWO PARALLEL INFINITE AND SEMI-INFINITE STRINGERS

A contact problem on the load transfer from two parallel elastic infinite and two semi-infinite elastic stringers to isotropic homogeneous continuous elastic infinite plate is considered. The plate-stringer contact pair is deformed under the impact of codirectional concentrated forces applied to the semi-infinite stringers. The problem of determining the unknown tangential contact stresses on semi-infinite symmetric intervals is reduced to the solution of one singular integral equation of the first kind with respect to strains, arising in the interval between the semi-infinite stringers. Tangential contact stresses are expressed in terms of those strains.

Keywords: plate, contact, stringer, singular integral equation, functional equation, Fourier transform.