ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и НПУА. Сер. ТН. 2016. Т. LXIX, N3.

УДК 621.52+511.52

С.О. СИМОНЯН, Г.В. АДАМЯН, А.А. АЙВАЗЯН

К РЕШЕНИЮ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА A(t)·X(t)+B(t)·X^T(t)=C(t)

Рассмотрены однопараметрические транспонированные аналоги матричных уравнений типа Сильвестра. Предложены аналитический, а также основанные на дифференциальных преобразованиях Г.Е. Пухова последовательный и параллельный численно-аналитические методы их решения. Аналитический метод ограничен в практических приложениях, однако он служит основой для разработки численно-аналитических методов, легко реализуемых средствами современных информационных технологий. Для всех методов получены соответствующие условия однозначной разрешимости рассмотренных матричных уравнений. Приведен модельный пример, на основе решения которого введено понятие неоднозначной разрешимости задачи.

Ключевые слова: однопараметрический транспонированный аналог матричного уравнения, редукция, аналитическое решение, дифференциальные преобразования, последовательный и параллельный численно-аналитические методы, модельный пример, условия однозначной и “неоднозначной разрешимости” задачи.

Введение. Вопросы решения непрерывных матричных уравнений Сильвестра

$$A \cdot X + X \cdot B = C \tag{1}$$

(где *A,B,C* и *X* - числовые матрицы порядка *m,* причём *X* - неизвестная матрица, подлежащая определению) рассмотрены, в частности, в работах [1,2]. Методы решения транспонированных аналогов (1), т.е. матричных уравнений

$$A \cdot X + X^T \cdot B = C, \tag{2}$$

рассмотрены, в частности, в работах [3-7], а методы решения подобных (2) матричных уравнений

$$A \cdot X + B \cdot X^T = C \text{ -} \tag{3}$$

в работах [8,9].

Методы решения однопараметрических непрерывных матричных уравнений типа Сильвестра

$$A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot B(t) = C(t) \tag{4}$$

(где *A(t), B(t), C(t)* и *X(t)* - функциональные матрицы порядка *m*, причём *X(t)* - неизвестная матрица, подлежащая определению), соответствующих (1), предложены в работах [10,11], а методы решения однопараметрических транспонированных аналогов

$$A(t)\cdot X(t)+X^{T}(t)\cdot B(t)=C(t), \tag{5}$$

соответствующих (2), - в работе [12].

В настоящей работе рассматриваются методы решения однопараметрических матричных уравнений типа

$$A(t)\cdot X(t)+B(t)\cdot X^{T}(t)=C(t), \tag{6}$$

соответствующих (3) и, с первого взгляда, достаточно похожих на (5), однако значительно отличающихся от него по существу.

Редукция и аналитическое решение задачи. Допустим, что однопараметрические матрицы *A(t)* и *B(t)* невырожденные на рассматриваемом интервале параметра *t*. Тогда, умножив (6) на $A^{-1}(t)$, получим

$$X(t)=A^{-1}(t)\cdot[C(t)-B(t)\cdot X^{T}(t)],$$

откуда

$$X^{T}(t)=C^{T}(t)\cdot A^{-T}(t)-X(t)\cdot B^{T}(t)\cdot A^{-T}(t). \tag{7}$$

С другой стороны, из того же уравнения (6) при умножении его на матрицу $B^{-1}(t)$ имеем

$$X^{T}(t)=B^{-1}(t)\cdot[C(t)-A(t)\cdot X(t)],$$

откуда

$$X^{T}(t)=B^{-1}(t)\cdot C(t)-B^{-1}(t)\cdot A(t)\cdot X(t). \tag{8}$$

Сопоставление (7) и (8) приводит к следующему:

$$B^{-1}(t)\cdot A(t)\cdot X(t)-X(t)\cdot B^{T}(t)\cdot A^{-T}(t)=B^{-1}(t)\cdot C(t)-C^{T}(t)\cdot A^{-T}(t)$$

или

$$P(t)\cdot X(t)-X(t)\cdot Q(t)=B^{-1}(t)\cdot C(t)-C^{T}(t)\cdot A^{-T}(t), \tag{9}$$

где $P(t)=B^{-1}(t)\cdot A(t)$, или

$$A(t)=B(t)\cdot P(t), \tag{10}$$

а $Q(t)=A^{-1}(t)\cdot B(t)$ или

$$B(t)=A(t)\cdot Q(t). \tag{11}$$

Очевидно, что при соотношениях (10) и (11) имеет место условие

$$P(t)\cdot Q(t)=Q(t)\cdot P(t)=E, \tag{12}$$

где E - единичная матрица порядка m.

Теперь в соответствии с результатами, полученными в [10], имеем

$$[P(t)\otimes E-E\otimes Q(t)]\cdot \hat{X}(t)=D(t)\cdot \hat{X}(t)=[B^{-1}(t)\cdot C(t)-C^{T}(t)\cdot A^{-T}(t)]=\hat{D}_1(t), \tag{13}$$

откуда при условии гиперрегулярности кронекеровой гиперматрицы $D(t)$ получим решение исходной задачи в виде гипервектора

$$\hat{X}(t)=D^{-1}(t)\cdot \hat{D}_1(t). \tag{14}$$

Таким образом, условием однозначной разрешимости задачи (6) является одновременное выполнение:

- условия гиперрегулярности:

$$rangD(t)=m^2; \tag{15а}$$

- условия регулярности:

$$rangA(t)=m; \tag{15б}$$

- условия регулярности:

$$rangB(t)=m. \tag{15в}$$

Что касается практического применения аналитического решения (14), то, естественно, оно весьма ограничено из-за присутствия в нем функциональных обратных матриц $A^{-1}(t)$ и $B^{-1}(t)$, а также кронекеровой обратной матрицы $D^{-1}(t)$. Поэтому перейдём к более эффективным численно-аналитическим методам, основанным на дифференциальных преобразованиях [13].

1. Последовательный численно-аналитический метод решения. Предположим, что в центре аппроксимации $t=t_v$ для матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$,$A^{-1}(t)$,$B^{-1}(t)$ и $X(t)$ имеют место дифференциальные преобразования

$$A(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K A(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_v},\quad K=\overline{0,\infty}\ \risingdotseq\ A(t)=\chi_1(t,t_v,H,A(K),\ K=\overline{0,\infty}), \tag{16}$$

$$B(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K B(t)}{dt^K}\ \Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}\ \doteq\ B(t)=\chi_2(t,t_\nu,H,B(K),\ K=\overline{0,\infty}),\qquad (17)$$

$$C(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K C(t)}{dt^K}\ \Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty}\ \doteq\ C(t)=\chi_3(t,t_\nu,H,C(K),\ K=\overline{0,\infty}),\qquad (18)$$

$$\overset{-1}{\underset{\vee}{A}}(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K A^{-1}(t)}{dt^K}\ \Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}\ \doteq\ A^{-1}(t)=\chi_4(t,t_\nu,H,\overset{-1}{\underset{\vee}{A}}(K),K=\overline{0,\infty}),\ (19)$$

$$\overset{-1}{\underset{\vee}{B}}(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K B^{-1}(t)}{dt^K}\ \Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}\ \doteq\ B^{-1}(t)=\chi_5(t,t_\nu,H,\overset{-1}{\underset{\vee}{B}}(K),K=\overline{0,\infty}),\ (20)$$

$$X(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K X(t)}{dt^K}\ \Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}\ \doteq\ X(t)=\chi_6(t,t_\nu,H,X(K),\ K=\overline{0,\infty}).\ (21)$$

В (16)-(21) матрицы $A(K),B(K),C(K),\overset{-1}{\underset{\vee}{A}}(K),\overset{-1}{\underset{\vee}{B}}(K)$ и $X(K)$ - матричные дискреты матриц $A(t),B(t),C(t),A^{-1}(t),B^{-1}(t)$ и $X(t)$ соответственно (заметим, что $\overset{-1}{\underset{\vee}{A}}(K)$ и $\overset{-1}{\underset{\vee}{B}}(K)$ - матричные дискреты обратных матриц $A^{-1}(t)$ и $B^{-1}(t)$, а не обратные матрицы матричных дискрет *A(K) и B(K)*); $K=\overline{0,\infty}$ - целочисленный аргумент; H - масштабный коэффициент; символ $\doteq$ - знак перехода из области оригиналов в область дифференциальных изображений и наоборот; $\chi_1(\cdot)-\chi_6(\cdot)$ - некоторые аппроксимирующие функции, восстанавливающие оригиналы $A(t),B(t),C(t),A^{-1}(t),B^{-1}(t)$ и $X(t)$ соответственно.

Теперь, с учётом правил алгебры дифференциальных преобразований [13], соотношения (10) и (11) переведём в область дифференциальных изображений.

Имея в виду (10), получим:

при *K=0*:

$$A(0)=B(0)\cdot P(0),$$

откуда

$$P(0)=B^{-1}(0)\cdot A(0),\qquad (22)$$

если, конечно, имеет место условие регулярности *rangB(0)=m;*

при *K=1*:

$$A(1)=B(1)\cdot P(0)+B(0)\cdot P(1),$$

откуда

$$P(1)=B^{-1}(0)\cdot[A(1)-B(1)\cdot P(0)];\qquad (23)$$

при *K=2*:

$$A(2) = B(2) \cdot P(0) + B(1) \cdot P(1) + B(0) \cdot P(2),$$

откуда

$$P(2) = B^{-1}(0) \cdot [A(2) - B(2) \cdot P(0) - B(1) \cdot P(1)]; \qquad (24)$$

…

при *K=K*:

$$A(K) = \sum_{l=0}^{K} B(l) \cdot P(K-l),$$

откуда

$$P(K) = B^{-1}(0) \cdot \left[A(K) - \sum_{l=1}^{K} B(l) \cdot P(K-l)\right]. \qquad (25)$$

Аналогично, имея в виду (11), получим:

при *K=0*:

$$B(0) = A(0) \cdot Q(0),$$

откуда

$$Q(0) = A^{-1}(0) \cdot B(0), \qquad (26)$$

если, конечно, имеет место условие регулярности *rangA(0)=m;*

при *K=1*:

$$B(1) = A(1) \cdot Q(0) + A(0) \cdot Q(1),$$

откуда

$$Q(1) = A^{-1}(0) \cdot [B(1) - A(1) \cdot Q(0)]; \qquad (27)$$

при *K=2*:

$$B(2) = A(2) \cdot Q(0) + A(1) \cdot Q(1) + A(0) \cdot Q(2),$$

откуда

$$Q(2) = A^{-1}(0) \cdot [B(2) - A(2) \cdot Q(0) - A(1) \cdot Q(1)]; \qquad (28)$$

…

при *K=K*:

$$B(K) = \sum_{l=0}^{K} A(l) \cdot Q(K-l),$$

откуда

$$Q(K) = A^{-1}(0) \cdot \left[B(K) - \sum_{l=1}^{K} A(l) \cdot Q(K-l)\right]. \qquad (29)$$

Теперь, имея в виду соотношения (22) - (25) и (26) - (29), переведём гиперматрично-гипервекторную линейную систему (13) из области оригиналов в область дифференциальных изображений. Получим:

при *K=0*:

$$\begin{gathered}[P(0)\otimes E - E\otimes Q(0)]\cdot \hat{X}(0) = D(0,0)\cdot \hat{X}(0) = \\ = [B^{-1}_{\vee}(0)\cdot C(0) - C^{T}(0)\cdot A^{-T}_{\vee}(0)] = \hat{D}_1(0),\end{gathered} \qquad (30)$$

откуда

$$\hat{X}(0) = D^{-1}(0,0) \cdot \hat{D}_1(0), \qquad (31)$$

если, конечно, имеет место условие гиперрегулярности

$$rangD(0,0)=m^2; \qquad (32)$$

при *K=1*:

$$\begin{gathered}[P(0)\otimes E - E\otimes Q(0)]\cdot \hat{X}(1) + [P(1)\otimes E - E\otimes Q(1)]\cdot \hat{X}(0) = \\ = D(0,0)\cdot \hat{X}(1) + D(1,0;0,1)\cdot \hat{X}(0) = B^{-1}_{\vee}(1)\cdot C(0) + B^{-1}_{\vee}(0)\cdot C(1) - \\ - C^{T}(1)\cdot A^{-T}_{\vee}(0) - C^{T}(0)\cdot A^{-T}_{\vee}(1) = \hat{D}_1(1),\end{gathered} \qquad (33)$$

откуда

$$\hat{X}(1) = D^{-1}(0,0)\cdot[\hat{D}_1(1) - D(1,0;0,1)\cdot \hat{X}(0)]; \qquad (34)$$

при *K=2*:

$$\begin{gathered}[P(0)\otimes E - E\otimes Q(0)]\cdot \hat{X}(2) + [P(1)\otimes E - E\otimes Q(1)]\cdot \hat{X}(1) + \\ + [P(2)\otimes E - E\otimes Q(2)]\cdot \hat{X}(0) = D(0,0)\cdot \hat{X}(2) + D(1,0;0,1)\cdot \hat{X}(1) + \\ + D(2,0;0,2)\cdot \hat{X}(0) = B^{-1}_{\vee}(2)\cdot C(0) + B^{-1}_{\vee}(1)\cdot C(1) + B^{-1}_{\vee}(0)\cdot C(2) - \\ - C^{T}(2)\cdot A^{-1}_{\vee}(0) - C^{T}(1)\cdot A^{-1}_{\vee}(1) - C^{T}(0)\cdot A^{-1}_{\vee}(2) = \hat{D}_1(2),\end{gathered} \qquad (35)$$

откуда

$$\hat{X}(2) = D^{-1}(0,0)\cdot[\hat{D}_1(2) - D(1,0;0,1)\cdot \hat{X}(1) - D(2,0;0,2)\cdot \hat{X}(0)]; \qquad (36)$$

…

<u>при *K=K*:</u>

$$
\begin{aligned}
&[P(0)\otimes E - E\otimes Q(0)]\cdot \hat{X}(K) + [P(1)\otimes E - E\otimes Q(1)]\cdot \hat{X}(K-1) + \ldots \\
&\ldots + [P(K-1)\otimes E - E\otimes Q(K-1)]\cdot \hat{X}(1) + [P(K)\otimes E - E\otimes Q(K)]\cdot \hat{X}(0) = \\
&= D(0,0)\cdot \hat{X}(K) + D(1,0;0,1)\cdot \hat{X}(K-1) + \ldots + D(K-1,0;0,K-1)\cdot \hat{X}(1) + \\
&+ D(K,0;0,K)\cdot \hat{X}(0) = B^{-1}_{\vee}(K)\cdot C(0) + B^{-1}_{\vee}(K-1)\cdot C(1) + \ldots + B^{-1}_{\vee}(1)\times \\
&\times C(K-1) + B^{-1}_{\vee}(0)\cdot C(K) - C^{T}(K)\cdot A^{-1}_{\vee}(0) - C^{T}(K-1)\cdot A^{-1}_{\vee}(1) - \ldots \\
&\ldots - C^{T}(1)\cdot A^{-1}_{\vee}(K-1) - C^{T}(0)\cdot A^{-1}_{\vee}(K) = \hat{D}_1(K),
\end{aligned}
\tag{37}
$$

откуда

$$
\begin{aligned}
&\hat{X}(K) = D^{-1}(0,0)\cdot[\hat{D}_1(K) - D(1,0;0,1)\cdot \hat{X}(K-1) - \ldots \\
&\ldots - D(K-1,0;0,K-1)\cdot \hat{X}(1) - D(K,0;0,K)\cdot \hat{X}(0)].
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Таким образом, имея матричные дискреты (23), (26), (28) и (30), в соответствии с (21) можно найти решение *X(t)* исходной задачи (6) или матричного уравнения (9). Очевидно также, что условием однозначной разрешимости задачи (6) является одновременное выполнение:

- условия гиперрегулярности (32); (39а)
- условий регулярности:

$$rang A^{-1}_{\vee}(K) = m, \forall K = \overline{0,\infty}; \tag{39б}$$

- условий регулярности:

$$rang B^{-1}_{\vee}(K) = m, \forall K = \overline{0,\infty}. \tag{39в}$$

2. Параллельный численно-аналитической метод решения. Объединив соотношения (30), (33), (35) и (37), получим следующее гиперматрично-гипервекторное представление:

$$
\underset{(K+1)\cdot m^2\times(K+1)\cdot m^2}{\begin{bmatrix}
D(0,0) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
D(1,0;0,1) & D(0,0) & 0 & \ldots & 0 \\
D(2,0;0,2) & D(1,0;0,1) & D(0,0) & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
D(K,0;0,K) & D(K-1,0;0,K-1) & \cdots & \ldots & D(0,0)
\end{bmatrix}}
\times
\underset{(K+1)\cdot m^2\times 1}{\begin{pmatrix}
\hat{X}(0) \\ \hat{X}(1) \\ \hat{X}(2) \\ \vdots \\ \hat{X}(K)
\end{pmatrix}}
=
\underset{(K+1)\cdot m^2\times 1}{\begin{pmatrix}
\hat{D}_1(0) \\ \hat{D}_1(1) \\ \hat{D}_1(2) \\ \vdots \\ \hat{D}_1(K)
\end{pmatrix}}
\tag{40}
$$

или в компактной записи:

$$D(\bullet)\cdot \hat{X}(\bullet) = \hat{D}_1(\bullet), \tag{41}$$

откуда

$$\hat{X}(\bullet) = D^{-1}(\bullet) \cdot \hat{D}_1(\bullet), \tag{42}$$

если, конечно, имеет место условие гиперрегулярности

$$rangD(\bullet) = (K+1) \cdot m^2, \tag{43}$$

немедленно следующее из условия гиперрегулярности (32).

Далее нетрудно убедиться, что гиперматрица

$$D^{-1}(\bullet) = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} D_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline D_1 & D_0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline D_2 & D_1 & D_0 & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \hline D_K & D_{k-1} & D_{k-2} & \dots & D_0 \end{array}\right], \tag{44}$$

где

$$\begin{cases} D_0 = D^{-1}(0,0) = D^{-1}(0,0) \cdot E = D^{-1}(0,0) \cdot \overline{D}_0, \\ D_1 = -D^{-1}(0,0) \cdot [D(1,0;0,1) \cdot D^{-1}(0,0)] = D^{-1}(0,0) \cdot \overline{D}_1, \\ D_2 = -D^{-1}(0,0) \cdot [D(2,0;0,2) \cdot D^{-1}(0,0) - (D(1,0;0,1) \cdot D^{-1}(0,0))^2] = D^{-1}(0,0) \cdot \overline{D}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D_K = -D^{-1}(0,0) \cdot \sum_{P=1}^{K} D(P) \cdot D_{K-P} = D^{-1}(0,0) \cdot \overline{D}_k. \end{cases} \tag{45}$$

Таким образом, имея гипервектор (42), в соответствии с правой частью (21) можно восстановить решение *X(t)* исходной задачи (6) (или (9)). Очевидно также, что при использовании параллельного численно-аналитического метода для однозначной разрешимости задачи (6) должны быть одновременно выполнены:

- условие гиперрегулярности (43); (46а)
- условия регулярности (39б); (46б)
- условия регулярности (39в). (46в)

Модельный пример. Пусть имеется матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & t \end{bmatrix} \cdot X(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -t & -t \end{bmatrix} \cdot X^T(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2t^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$A^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/t \end{bmatrix}, B^{-1}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1/t \end{bmatrix},$$

$$A^{-1}(t) \cdot B(t) = \begin{bmatrix} (-1+t) & t \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B^{-1}(t) \cdot A(t) = \begin{bmatrix} -1 & -t \\ 1 & (-1+t) \end{bmatrix},$$

$$B^{-1}(t)\cdot C(t)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 2t & 0\end{bmatrix},\ C^T(t)\cdot A^{-T}(t)=\begin{bmatrix}2t^2 & -2t\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

а гиперматрично-гипервекторное уравнение (13) имеет вид

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -t & -t & -t & 0\\ 1 & 0 & 0 & -t\\ \hline 1 & 0 & 0 & -t\\ 0 & 1 & 1 & t\end{array}\right]\cdot\left(\begin{array}{c} x_{11}(t)\\ x_{12}(t)\\ \hline x_{21}(t)\\ x_{22}(t)\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} -2t^2\\ 2t\\ \hline 2t\\ 0\end{array}\right).$$

Очевидно, что матрица этой системы *D(t)* особенная, ввиду чего нарушено условие гиперрегулярности (15а) об однозначной разрешимости задачи. Иными словами, эта задача ввиду ее недоопределенности (2-е и 3-е уравнения одинаковы) обладает бесчисленным множеством решений. В частности, такими решениями являются гипервекторы (матрицы), в абсолютной точности которых удостовериться нетрудно их подстановкой в исходное матричное уравнение:

$$\hat{X}_1(t)=\left(\begin{array}{c} t\\ t\\ \hline 0\\ -1\end{array}\right)\Rightarrow X_1(t)=\begin{bmatrix}t & t\\ 0 & -1\end{bmatrix}\ \text{и}\ \hat{X}_2(t)=\left(\begin{array}{c} 4t\\ -2t\\ \hline 0\\ 2\end{array}\right)\Rightarrow X_2(t)=\begin{bmatrix}4t & -2t\\ 0 & 2\end{bmatrix}.$$

Ввиду отмеченного обстоятельства естественно введение следующего понятия о неоднозначной разрешимости матричного уравнения (6).

Определение. Если кронекерова гиперматрица *D(t)* эквивалентной задачи (13) вырожденная, т.е. нарушено условие гиперрегулярности (15а) ($rangD(t)<m^2$), а матрицы *A(t)* и *B(t)* невырожденные, т.е. имеют место условия регулярности (15б) и (15в), то исходная задача (6) разрешима неоднозначно.

Заключение. Таким образом, для решения однопараметрических транспонированных аналогов матричных уравнений типа (6) в настоящей работе предложены аналитический, а также приближенные последовательный и параллельный численно-аналитические методы, основанные на дифференциальных преобразованиях. При них решение исходной задачи сначала сводится к некоторым рекуррентным численным процедурам, которые могут быть эффективно реализованы средствами современных информационных технологий [14]. Восстановление непрерывного решения *X(t)* выполняется достаточно легко - применением некоторого обратного дифференциального преобразования (21).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. - М.: Наука, 2010. – 560 с.
2. **Икрамов Х.Д.** Численное решение матричных уравнений. - М.: Наука, 1984.- 190 с.
3. **Piao F.X., Zhang Q.I., Wang Z.F.** The solution to matrix equation $A\cdot X+X^T\cdot C=B$ // Journal of the Franklin Institute.- 2007.- 344.- P.1056-1062.
4. **Икрамов Х.Д., Воронцов Ю.О.** Об однозначной разрешимости матричного уравнения $A\cdot X+X^T\cdot C=B$ в сингулярном случае // Доклады РАН.- 2011.- Т. 438, №5.- С. 599-602.
5. **Воронцов Ю.О., Икрамов Х.Д.** Численный алгоритм для решения матричного уравнения $A\cdot X+X^T\cdot C=B$ // Журнал вычислительный математики и математической физики.- 2011.- Т. 51, № 5.- С.739-747.
6. **Воронцов Ю.О., Икрамов Х.Д.** О численном решении матричных уравнений $A\cdot X+X^T\cdot C=B$ и $X+ A\cdot X^T\cdot C=B$ с прямоугольными коэффициентами A и B // Записки научных семинаров ПОМО.- 2012.- Т. 405.- С.54-58.
7. **Воронцов Ю.О., Икрамов Х.Д.** Численное решение матричных уравнений $A\cdot X+X^T\cdot C=B$ и $A\cdot X+X^*\cdot C=B$ в самосопряжённом случае // ЖВМ и МФ.- 2014. – Т. 54, № 2.- С.179-182.
8. **Икрамов Х.Д. Воронцов Ю.О.** Матричные уравнения $A\cdot X+X^T\cdot C=B$ и $A\cdot X+X^*\cdot C=B$ // Доклады РАН.- 2013.- Т.449, № 5.- С.513-515.
9. **Воронцов Ю.О., Икрамов Х.Д.** Численные алгоритмы для решения матричных уравнений $A\cdot X+X^T\cdot C=B$ и $A\cdot X+X^*\cdot C=B$ // Журнал вычислительной математики и математической физики.- 2013.- Т.53, № 6. – С. 843-852.
10. **Симонян С.О.** Методы решения однопараметрических матричных непрерывных уравнений типа Сильвестра $A(t)\cdot X(t)+X(t)\cdot B(t)=C(t)$ // Известия НАН РА и НПУА. Сер. ТН. -2015.- Т. LXVIII, № 3.- С.370-380.
11. **Симонян С.О.** Декомпозиционные методы решения однопараметрических матричных непрерывных уравнений типа Сильвестра $A(t)\cdot X(t)+X(t)\cdot B(t)=C(t)$ //Известия НАН РА и НПУА. Сер.ТН.- 2015.- Т. LXVIII, №4. – С.497-510.
12. **Симонян С.О.** К решению однопараметрических транспонированных аналогов матричных уравнений типа Сильвестра $A(t)\cdot X(t)+X^T(t)\cdot B(t)=C(t)$ // Известия НАН РА и НПУА. Сер.ТН.- 2016.-Т.LXIX, № 1.- С.49-60.
13. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений.- Киев: Наукова думка, 1984.- 420с.
14. **Straustrup B.** The C++ programming language. 4th edition. – Boston: Addison-Wesley Professional, 2013.- 1368 p.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 09.04.2016.

Ս.Հ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Գ.Վ. ԱԴԱՄՅԱՆ, Ա.Ա. ԱՅՎԱԶՅԱՆ

$A(t)\cdot X(t)+ B(t) \cdot X^T(t)=C(t)$ ՏԻՊԻ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Դիտարկվել են Սիլվեստրի տիպի միապարամետրական մատրիցային հավասարումների տրանսպոնացված նմանակները: Առաջարկվել են դրանց լուծման անալիտիկ, ինչպես նաև Գ.Ե. Պուխովի դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա հիմնված հաջորդական և զուգահեռ թվաանալիտիկ մեթոդներ: Անալիտիկ մեթոդը սահմանափակված է գործնական կիրառություններում, սակայն այն հիմք է հանդիսանում ժամանակակից տեղեկատվական տեխնոլոգիաների միջոցներով հեշտությամբ իրականացվող թվաանալիտիկ մեթոդների մշակման համար: Բոլոր մեթոդների համար ստացվել են դիտարկված մատրիցային հավասարումների միարժեքորեն լուծելիության համապատասխան պայմանները: Ներկայացված է մոդելային օրինակ, որի լուծման հիման վրա ներմուծվել է խնդրի «ոչ միարժեքորեն լուծելիություն» հասկացությունը:

Առանցքային բառեր. միապարամետրական մատրիցային հավասարման տրանսպոնացված նմանակ, ռեդուկցիա, անալիտիկ լուծում, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, հաջորդական և զուգահեռ թվաանալիտիկ մեթոդներ, մոդելային օրինակ, խնդրի միարժեք և ոչ միարժեք լուծելիության պայմաններ:

S.H. SIMONYAN, G.V. ADAMYAN, A.A. AYVAZYAN

SOLUTION OF ONE-PARAMETRIC MATRIX EQUATION OF THE $A(t)\cdot X(t)+B(t)\cdot X^T(t)=C(t)$ TYPE

One-parametric transposed analogs of matrix Silvester – type equations of the problem are considered. An analytical, as well as serial and parallel numerical methods are proposed for their solution based on the differential transformations of G.E.Pukhov. The analytical method is limited in practical applications, however, it serves as a basis for the development of numerical-analytical methods easily implemented by means of modern information technologies. Appropriate conditions of unique solvability for the considered matrix equations are obtained for all the methods. A model example is introduced, and on the basis of its solution, the concept of the non-unique solvability is presented.

Keywords: one-parametric transposed analog of matrix equation, reduction, analytic solution, differential transformations, parallel and serial numerical-analytical methods, model example, unique and non-unique solvability conditions.