

О.Н. ГАСПАРЯН, К.В. БЕГОЯН

РОБАСТНАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ СКОРОСТЬЮ ВРАЩЕНИЯ  
ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ С Понижающим ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕМ  
ПОСТОЯННОГО НАПРЯЖЕНИЯ

На базе теории робастного управления рассмотрены вопросы разработки системы управления скоростью вращения двигателя постоянного тока с импульсным понижающим преобразователем постоянного напряжения (ППН). Подобные преобразователи имеют два режима работы, называемых режимами непрерывных и прерывистых токов. Для каждого из этих режимов ППН описывается различными передаточными функциями. Предлагается представление передаточной функции ППН в виде одной передаточной функции в форме мультипликативной неопределенности. Это позволяет использовать при проектировании и исследовании системы управления скоростью электродвигателя с ППН методы теории робастности. Приведен численный пример расчета системы управления.

**Ключевые слова:** робастная система, передаточная функция, понижающий преобразователь постоянного напряжения, режимы непрерывных и прерывистых токов.

**Введение.** Понижающие преобразователи постоянного напряжения с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ) сигнала (buck converters) широко используются в силу ряда положительных свойств в системах управления скоростью вращения маломощных двигателей постоянного тока [1].

Схема понижающего ППН с ШИМ показана на рис. 1, где  $R$  есть активное сопротивление нагрузки; при этом учтены паразитные сопротивления  $r_L$  и  $r_C$  дросселя  $L$  и конденсатора  $C$  [2-5].

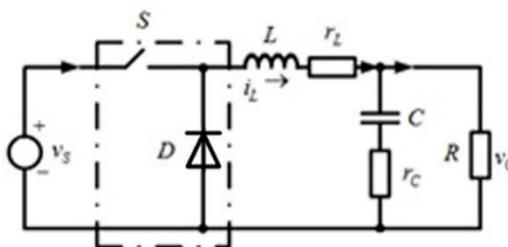


Рис. 1. Схема понижающего ППН

При достаточно высокой частоте прерывания  $f_s = 1/T$  среднее за период  $T$  значение  $V_0$  выходного напряжения  $v_0(t)$  равно  $V_0 = DV_s$ , где  $V_s = const$  - напря-

жение источника питания, а  $D = T_{\text{Вкл}} / T$  называется *коэффициентом заполнения* импульсов ( $T_{\text{Вкл}}$  - длительность интервала, при котором электронный ключ  $S$  на рис. 1 замкнут). Отметим, что  $D$  может изменяться в пределах  $0 \leq D \leq 1$ . ППН на рис. 1 имеют два режима работы: режимы непрерывных и прерывистых токов, которые приводят к существенно различным динамическим характеристикам и свойствам преобразователя [2,3]. В режиме непрерывных токов ток дросселя  $i_L(t)$  никогда не достигает нулевого значения, а в режиме прерывистых токов в течение (более точно, в конечном интервале) каждого периода  $T$  имеется промежуток времени, где ток  $i_L(t)$  равен нулю.

Исследование динамики системы управления скоростью электродвигателя с понижающими ППН с ШИМ является сложной задачей, поскольку ППН относятся к нелинейным нестационарным элементам с периодическими параметрами, точное аналитическое описание которых крайне затруднительно. На практике обычно прибегают к специальным приближенным методам, где особо следует выделить метод, основанный на усреднении во времени и последующей линеаризации уравнений ППН в пространстве состояний [2-5]. Подобный подход приводит к двум различным передаточным функциям ППН для режимов непрерывных и прерывистых токов, и поэтому динамика системы управления скоростью электродвигателя с ППН фактически описывается двумя различными передаточными функциями.

В статье предлагается для исследования динамики рассматриваемой системы управления использовать методы теории робастности [6], где две указанные выше передаточные функции ППН представляются в виде одной передаточной функции с мультипликативной неопределенностью. Это позволяет осуществлять проектирование системы управления скоростью вращения электродвигателя на основе стандартных методов классической теории управления [7].

**1. Передаточные функции понижающего ППН в режимах непрерывных и прерывистых токов.** В режиме прерывистых токов ППН на рис. 1 можно представить в виде трех эквивалентных схем на рис. 2, соответствующих трем интервалам времени  $0 \leq t < d_1 T$ ,  $d_1 T \leq t < (d_1 + d_2) T$  и  $(d_1 + d_2) T \leq t < T$ , где:  $d_1 = D$  - относительная длительность интервала, при котором ключ  $S$  на рис. 1 замкнут, а ток дросселя в конце интервала достигает своего пикового значения;  $d_2$  - относительная длительность интервала, при котором ключ  $S$  разомкнут, но ток  $i_L(t)$  отличен от нуля и достигает нулевого значения в конце интервала.

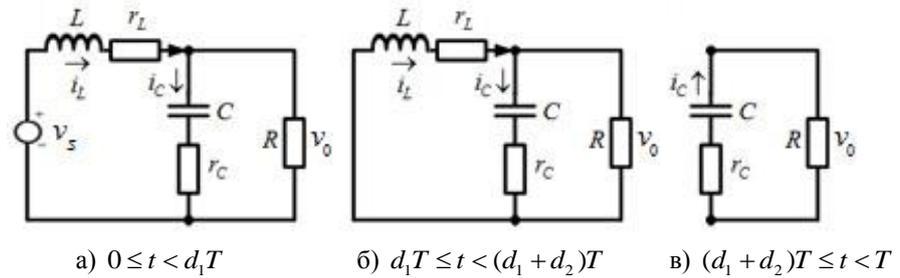


Рис. 2. Эквивалентные схемы ППН для различных интервалов времени  $t$ :

а - ключ замкнут; б - ключ разомкнут и  $i_L(t) > 0$ ; в - ключ разомкнут и  $i_L(t) = 0$

Для каждого из введенных выше интервалов времени можно дать на основании эквивалентных схем на рис. 2 точное аналитическое описание динамики понижающего ППН. Выберем в качестве переменных состояния ППН ток дросселя  $i_L(t)$  и напряжение на конденсаторе  $u_C(t)$ . Тогда, вводя в рассмотрение двумерный вектор-столбец  $x(t)$  с координатами  $x_1(t) = i_L(t)$  и  $x_2(t) = u_C(t)$ , для схемы на рис. 2а (т.е. для интервала  $0 \leq t < d_1T$ ) можно записать

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} + \left[ \frac{Rr_L + Rr_c + r_L r_c}{L(R + r_c)} \right] x_1(t) + \frac{R}{L(R + r_c)} x_2(t) &= \frac{1}{L} V_s, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \frac{R}{C(R + r_c)} x_1(t) - \frac{1}{C(R + r_c)} x_2(t), \\ v_0(t) &= \frac{Rr_c}{R + r_c} x_1(t) + \frac{R}{R + r_c} x_2(t), \end{aligned} \quad (1)$$

или в векторно-матричной форме:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A_1 x(t) + b_1 V_s, \\ v_0(t) &= c_1 x(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{Rr_L + Rr_c + r_L r_c}{L(R + r_c)} & -\frac{R}{L(R + r_c)} \\ \frac{R}{C(R + r_c)} & -\frac{1}{C(R + r_c)} \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_1 = \begin{bmatrix} \frac{Rr_c}{R + r_c} & \frac{R}{R + r_c} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Соответствующие векторные уравнения для интервала  $d_1T \leq t < (d_1 + d_2)T$ , при котором электронный ключ  $S$  разомкнут, а ток дросселя отличен от нуля, имеют аналогичный вид

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A_2 x(t) + b_2 V_s, \\ v_0(t) &= c_2 x(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку схема с разомкнутым электронным ключом на рис. 2б отличается от схемы на рис. 2а только значением  $V_s = 0$ , то можно показать, что матрица  $A_2$  и векторы  $b_2$  и  $c_2$  в (4) даются выражениями

$$A_2 = A_1, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_2 = c_1. \quad (5)$$

Наконец, для третьего интервала времени  $(d_1 + d_2)T \leq t < T$  с нулевым током дросселя на основании схемы на рис. 2в имеем

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_3 x(t) + b_3 v_s(t), \quad v_0(t) = c_3 x(t), \quad (6)$$

где, учитывая, что  $i_L(t) = \text{const} = 0$ , получим

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C(R+r_c)} \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R}{R+r_c} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

В [4] показано, что величина  $D_{pos}$ , равная относительной длительности положительных импульсов тока дросселя  $i_L(t)$  на рис. 2б, дается выражением

$$D_{pos} = d_1 + d_2 = \frac{1}{2} \left( D + \sqrt{D^2 + 4K} \right), \quad \text{где } K = 2L / (R + r_L) T. \quad (8)$$

Применением к выражениям (1)-(7) известной техники усреднения во времени и последующей линеаризации в окрестности рабочей точки в [5] показано, что передаточная функция понижающего ППН по отношению к коэффициенту  $D$  в режиме прерывистых токов описывается выражением

$$G_{II}(s) = \frac{RV_s}{M\sqrt{D^2 + 4K}} \left\{ \frac{M_0 s + M_1}{LC(R+r_c)\Delta(s)} + r_c D \right\}, \quad (9)$$

где

$$M_0 = r_c 2KCM + RLD, \quad M_1 = 2KM + \frac{D_{pos}R}{(R+r_c)} [Rr_L + Rr_c + r_L r - r_c D_{pos}RD], \quad (10)$$

$$M = [Rr_L + Rr_c + r_L r_c + R^2 D_{pos}],$$

а характеристическое уравнение  $\Delta(s) = \det(sI - A)$ :

$$\Delta(s) = s^2 + \frac{[C(Rr_L + Rr_c + r_L r_c)D_{pos} + L]}{LC(R+r_c)} s + \frac{MD_{pos}}{LC(R+r_c)^2}. \quad (11)$$

В режиме непрерывных токов ППН описывается двумя эквивалентными схемами на рис. 2а и б и уравнениями (1)-(5). Как показано в [5], передаточная функция ППН по отношению к  $D$  при этом дается выражением

$$G_H(s) = \frac{k_0(s - z_c)}{\det(sI - A_1)} V_s, \quad k_0 = \frac{Rr_c}{L(R+r_c)}, \quad z_c = -\frac{1}{r_c C}, \quad (12)$$

где

$$\det(sI - A_1) = s^2 + \left[ \frac{(Rr_L + Rr_c + r_L r_c)C + L}{LC(R+r_c)} \right] s + \frac{Rr_L + Rr_c + r_L r_c + R^2}{LC(R+r_c)^2}. \quad (13)$$

Как видно из выражений (9) и (12), наличие паразитного сопротивления  $r_c$  в цепи конденсатора приводит к возникновению алгебраического члена  $r_c D$  в  $G_H(s)$  и нуля передаточной функции  $G_H(s)$  в точке  $z_c = -1/r_c C$ . Для идеального ППН, т.е. при  $r_L = r_c = 0$ , вид передаточных функций  $G_H(s)$  (9) и  $G_H(s)$  (12) существенно упрощается:

$$G_H(s) = \frac{k_1(s - z_D)}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + D_{pos}^2 \omega_0^2}, \quad k_1 = \frac{DV_s}{CRD_{pos}\sqrt{D^2 + 4K}}, \quad z_D = -\frac{2KRD_{pos}}{LD}, \quad (14)$$

$$G_H(s) = \frac{V_s \omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}, \quad \xi = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (15)$$

Таким образом, понижающий ППН с ШИМ как элемент системы управления описывается двумя различными передаточными функциями для режимов непрерывных и прерывистых токов.

## 2. Проектирование системы управления скоростью электродвигателя с понижающим ППН на основе методов теории робастного управления.

Один из основных подходов к проектированию систем автоматического управления со структурированными и неструктурированными неопределенностями базируется на методах теории робастного управления [6]. В отличие от адаптивных систем управления, в которых регулятор автоматически подстраивается к заранее неизвестным изменениям параметров объекта управления, в робастных системах регулятор выбирается таким образом, чтобы обеспечить устойчивость и требуемые качественные характеристики системы во всем диапазоне изменения неопределенностей. Неопределенности при этом могут быть двух основных видов – аддитивные и мультипликативные. В первом случае неопределенная передаточная функция (или матрица в многомерном случае) системы представляется в виде

$$W(s) = W_0(s) + \Delta W(s), \quad (16)$$

а в случае мультипликативной неопределенности - в виде

$$W(s) = [1 + \Delta W(s)]W_0(s) = W_0(s) + \Delta W(s)W_0(s), \quad (17)$$

где  $W_0(s)$  - номинальная передаточная функция, а  $\Delta W(s)$  - неопределенность, о которой известны только границы изменения её модуля (нормы в многомерном случае)  $|\Delta W(j\omega)|$  во всем диапазоне частот  $0 \leq \omega \leq \infty$ . Поскольку аддитивную неопределенность всегда можно привести к мультипликативной [6], в дальнейшем для краткости ограничимся только последним случаем. В теории робастности доказывается, что если система управления с номинальной передаточной функцией  $W_0(s)$  устойчива, то система с мультипликативной неопределенностью сохраняет устойчивость при выполнении условия

$$|\Phi(j\omega)| < \frac{1}{|\Delta W(j\omega)|} \quad (18)$$

для всех частот  $0 \leq \omega \leq \infty$ , где

$$\Phi(j\omega) = \frac{W_0(j\omega)}{1 + W_0(j\omega)} \quad (19)$$

есть передаточная функция замкнутой системы с номинальными параметрами.

Условию робастности (18) можно придать наглядную графическую интерпретацию, показанную на рис. 3. Для того чтобы замкнутая система с мультипликативной неопределенностью была робастной, достаточно, чтобы амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) замкнутой системы  $|\Phi(j\omega)|$  проходила ниже кривой  $1/|\Delta W(j\omega)|$ .

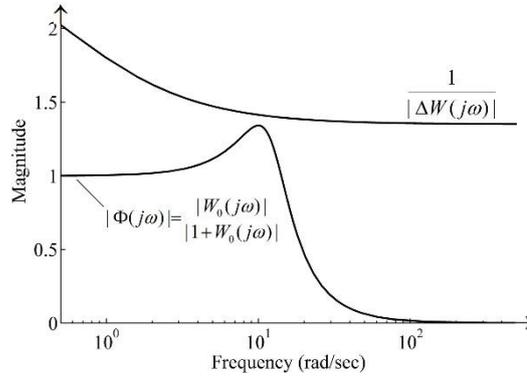


Рис. 3. Графическая интерпретация условия робастности (18)

Воспользуемся описанным подходом для проектирования системы управления скоростью электродвигателя постоянного тока с питанием от понижающего ППН. Поскольку передаточная функция ППН зависит от режимов работы, представим её на основании вышеизложенного в виде передаточной функции с мультипликативной неопределенностью, где в качестве номинального выберем режим прерывистых токов, и ограничимся для краткости случаем идеального ППН. Тогда передаточную функцию ППН  $G(s)$  можно представить в виде

$$G(s) = [1 + \Delta G(s)] G_{II}(s), \quad (20)$$

где передаточная функция  $G_{II}(s)$  определяется выражением (14). Можно показать, что мультипликативная неопределенность  $\Delta G(s)$  в (20) в данном случае имеет вид

$$\Delta G(s) = \frac{G_H(s) - G_{II}(s)}{G_{II}(s)} = \frac{V \omega_0^2 s^2 + (2\xi V \omega_0^3 - k_1) s + (D_{pos}^2 V \omega_0^4 + k_1 z_D)}{k_1 (s - z_D) (s^2 + 2\xi \omega_0 s + \omega_0^2)}. \quad (21)$$

Структурная схема системы управления скоростью двигателя постоянного тока с понижающим ППН с передаточной функцией  $G(s)$  в форме (20) показана на рис. 4, где  $K(s)$  есть передаточная функция регулятора, а  $W_M(s)$  - передаточная функция электродвигателя постоянного тока, имеющая, если пренебречь для простоты электромагнитной постоянной времени цепи якоря, вид апериодического звена первого порядка [7]:

$$W_M(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{K_M}{T_M s + 1}. \quad (22)$$

Номинальная передаточная функция разомкнутой системы  $W_0(s)$  при этом равна

$$W_0(s) = W_M(s)G_{II}(s)K(s). \quad (23)$$

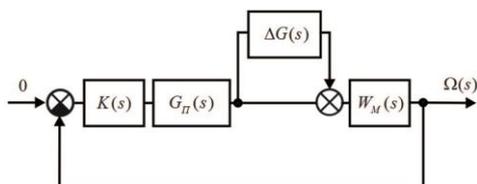


Рис. 4. Структурная схема системы управления скоростью электродвигателя с понижающим ППН

Таким образом, если выбрать регулятор  $K(s)$  таким образом, чтобы выполнялось условие робастности (18), где  $\Delta W(s)$  следует заменить неопределенностью  $\Delta G(s)$  (21), то система на рис. 4 сохраняет устойчивость независимо от режима работы понижающего ППН.

**3. Пример.** В качестве примера рассмотрим систему управления скоростью вращения на рис. 4, где передаточная функция электродвигателя равна

$$W_M(s) = \frac{20}{0,02s + 1}. \quad (24)$$

Параметры понижающего ППН зададим в следующем виде:  $L = 3,3 \text{ мкГн}$ ,  $D = 0,1$ ,  $C = 75,2 \text{ мкФ}$ ,  $R = 1,0 \text{ Ом}$ ,  $V_s = 12,0 \text{ В}$ ,  $f_s = 100 \text{ кГц}$ . Критическое значение коэффициента заполнения, при котором ППН находится на границе между режимами непрерывных и прерывистых токов, при указанных параметрах равно  $D_{crit} = 0,39$ . Поэтому при  $D = 0,1$  ППН находится в режиме прерывистых токов. Передаточная функции  $G_{II}(s)$  в этом режиме равна

$$G_{II}(s) = \frac{5,421 \cdot 10^4 s + 2,688 \cdot 10^{10}}{s^2 + 1,33 \cdot 10^4 s + 2,229 \cdot 10^9}. \quad (25)$$

При  $D > D_{crit}$  ППН переходит в режим непрерывных токов с передаточной функцией

$$G_{II}(s) = \frac{4,836 \cdot 10^{10}}{s^2 + 1,33 \cdot 10^4 s + 4,03 \cdot 10^9}. \quad (26)$$

Мультипликативная неопределенность  $\Delta G(s)$  (21) при этом имеет вид

$$\Delta G(s) = \frac{4,836 \cdot 10^6 s^2 + 6,43 \cdot 10^{10} s + 1,078 \cdot 10^{16}}{5,421 s^3 + 2,76 \cdot 10^6 s^2 + 5,759 \cdot 10^{10} s + 1,083 \cdot 10^6}. \quad (27)$$

Допустим, что регулятор  $K(s)$  в системе (23) отсутствует. На рис. 5 показаны АЧХ замкнутой системы  $\Phi(j\omega)$  (19) при  $K(s) = 1$  и кривая  $1/|\Delta G(j\omega)|$  для неопределенности  $\Delta G(s)$  (27). Поскольку эти кривые пересекаются, то условие робастности (18) в системе без коррекции не удовлетворяется.

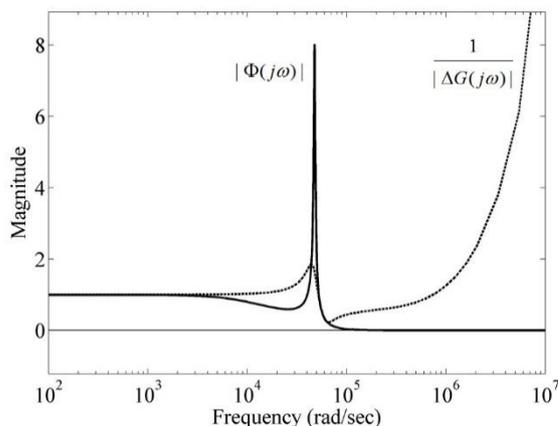


Рис. 5. Проверка условия робастности для системы без коррекции [при  $K(s) = 1$ ]

Расчеты на основе стандартных методов показали, что для обеспечения требуемой робастности в системе достаточно ввести усилитель с коэффициентом усиления  $K_p = 0,5$ , т.е. уменьшить в два раза коэффициент передачи разомкнутой системы. Соответствующие кривые приведены на рис. 6 и свидетельствуют о выполнении условия робастности (18). Это означает, что рассматриваемая система устойчива независимо от режима работы ППН.

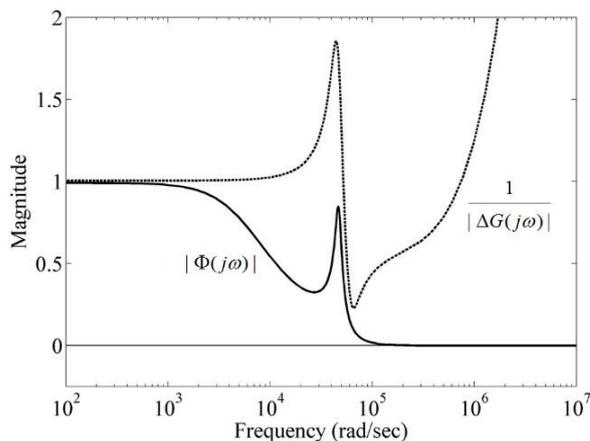


Рис. 6. Проверка условия робастности при  $K(s) = K_p = 0,5$

**Заключение.** Предлагается подход к проектированию систем управления скоростью вращения электродвигателя постоянного тока с понижающим ППН с ШИМ, основанный на представлении передаточных функций ППН для режимов непрерывных и прерывистых токов в виде одной передаточной функции с мультипликативной неопределенностью, где в качестве номинальной принята передаточная функция для случая прерывистых токов. Это дает возможность применять при проектировании указанных систем частотные методы теории робастности, а также соответствующие методы классической теории автоматического регулирования.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ahmad M.A., Raja Ismail R.M.T., and Ramli M.S.** Control strategy of buck converter driven DC motor: a comparative assessment // Australian Journal of Basic and Applied Sciences. -2010.- Vol. 4, no. 10. - P. 4893–4903.
2. **Choi B.** Pulse-width Modulated DC-to-DC Power: Conversion Circuits, Dynamics, and Control Designs.- John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2008.- 649 p.
3. **Mohan N., Tore M., Willam P.** Power Electronics: Converters, Applications, and Design.- John Wily and Sons, Ltd, New York, 2002.- 802 p.
4. **Бегоян К.В., Гаспарян О.Н.** Определение передаточной функции понижающего преобразователя постоянного напряжения в режиме непрерывных токов // Вестник НПУА. Электротехника, Энергетика.- Ереван, 2015.- N1.- С. 56-67.
5. **Бегоян К.В., Гаспарян О.Н.** Определение передаточной функции понижающего преобразователя постоянного напряжения в режиме прерывистых токов // Вестник НПУА. Электротехника, Энергетика.- Ереван, 2015.- N2.- С. 18-31.
6. **Skogestad S., Postlethwaite I.** Multivariable Feedback Control. Analysis and Design.- John Wiley and Sons Ltd., Chichester, Sussex, UK, 2005.
7. **Dorf R.C., Bishop R.** Modern Control Systems.- Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 2007.- 1046 p.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 15.02.2016.

Օ.Ն. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ, Կ.Վ. ԲԵԳՈՅԱՆ

**ՀԱՍՏԱՏԱՏՈՒՆ ԼԱՐՄԱՆ ՑԱԾՐԱՑՆՈՂ ԿԵՐՊԱՓՈԽԻԶՈՎ ԷԼԵԿՏՐՈՇԱՐԺԻԶԻ  
ՊՏՄԱՆ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՆ ՌՈՒԲԱՍՏ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳ**

Դիտարկված են ռոբաստ կառավարման տեսության բազայի վրա հաստատուն լարման ցածրացնող իմպուլսային կերպափոխիչով (ՀԼԿ) հաստատուն հոսանքի շարժիչի պտտման արագության կառավարման համակարգի մշակման հարցերը: Այդպիսի կերպափոխիչներն ունեն աշխատանքային երկու ռեժիմներ՝ անընդհատ և ընդհատուն հոսանքների, և այդ յուրաքանչյուր ռեժիմի համար ՀԼԿ-ն բնութագրվում է տարբեր փոխանցման ֆունկցիաներով: Առաջարկվում է ՀԼԿ-ի փոխանցման ֆունկցիան ներկայացնել միակ փոխանցման ֆունկցիայով՝ մուլտիպլիկատիվ անորոշության տեսքով: Դա հնարավորություն է ընձեռում ՀԼԿ-ով էլեկտրաշարժիչի արագության կառավարման համակարգը նախագծելիս և հետագոտելիս օգտագործել ռոբաստության տեսության մեթոդները: Բերված է կառավարման համակարգի հաշվարկման թվային օրինակ:

*Առանցքային բառեր.* ռոբաստ համակարգ, փոխանցման ֆունկցիա, հաստատուն լարման ցածրացնող կերպափոխիչ, անընդհատ և ընդհատուն հոսանքների ռեժիմներ:

O.N. GASPARYAN, K.V. BEGOYAN

**ROBUST CONTROL SYSTEM OF ANGULAR VELOCITY OF THE  
DC MOTOR WITH THE STEP-DOWN BUCK CONVERTER**

The issues on the development of the control system of angular velocity of the DC motor with a step-down buck converter on the basis of robust control are considered. Such converters possess two working modes called continuous and discontinuous conduction modes, and for each of these modes, the buck converter is described by a different transfer function. In the paper, it is proposed to present the transfer function of the buck converter in the form of a single transfer function with the multiplicative uncertainty. This allows to apply the methods of robust control for the development and investigation of the control system of angular velocity of a DC motor with the buck converter. A numerical example of the control system design is given.

*Keywords:* robust system, transfer function, step-down buck converter, continuous and discontinuous conduction modes.