

УДК 621.52+511.52

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ
УПРАВЛЕНИЯ

С.О. СИМОНЯН

ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА
СТЕЙНА $A(t) \cdot X(t) \cdot B(t) - X(t) = C(t)$

Предложены два декомпозиционных метода решения однопараметрических матричных уравнений типа Стейна - аналитический метод, который пригоден для решения задач с малыми размерами и при простых элементах однопараметрических матриц, и последовательный рекуррентный численно-аналитический метод, который основан на дифференциальных преобразованиях Г.Е. Пухова и удобен в общем случае, когда элементы матриц этих уравнений аналитичны в центрах аппроксимации. Получены условия однозначной разрешимости этих уравнений при предложенных методах. Рассмотрен модельный пример, для решения которого был использован декомпозиционный последовательный рекуррентный численно-аналитический метод, и получено точное маклореновское решение задачи.

Ключевые слова: однопараметрическое матричное уравнение типа Стейна, декомпозиционный аналитический метод решения, дифференциальные преобразования, декомпозиционный последовательный рекуррентный численно-аналитический метод решения, условия однозначной разрешимости, модельный пример.

Введение. Числовые матричные уравнения Стейна (неявные дискретные матричные уравнения Сильвестра) достаточно часто используются в различных научно-практических исследованиях [1,2], решению которых посвящено большое количество различных публикаций, в частности [3,4]. Наряду с этими уравнениями и методами их решения значительный интерес представляют также однопараметрические матричные уравнения типа Стейна и методы их решения. Двум таким методам и посвящена настоящая работа.

Математический аппарат. Рассмотрим однопараметрическое матричное уравнение типа Стейна

$$A(t) \cdot X(t) \cdot B(t) - X(t) = C(t), \quad (1)$$

где $A(t)$ - матрица порядка m ; $B(t)$ - матрица порядка n ; $C(t)$ - матрица с размерами $m \times n$; $X(t)$ - неизвестная матрица также с размерами $m \times n$:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \dots x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) \dots x_{2n}(t) \\ \dots \dots \dots \\ x_{m1}(t) \dots x_{mn}(t) \end{bmatrix} = (x_{ij}(t)), \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

подлежащая определению.

Допустим, что $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $X(t)$ - матрицы с комплексными элементами, представимые в виде

$$A(t)_{m \times m} = M(t)_{m \times m} + j \cdot N(t)_{m \times m}, \quad (3)$$

$$B(t)_{n \times n} = P(t)_{n \times n} + j \cdot Q(t)_{n \times n}, \quad (4)$$

$$C(t)_{m \times n} = R(t)_{m \times n} + j \cdot S(t)_{m \times n}, \quad (5)$$

$$X(t)_{m \times n} = G(t)_{m \times n} + j \cdot H(t)_{m \times n}, \quad (6)$$

где $M(t), P(t), R(t), G(t)$ и $N(t), Q(t), S(t), H(t)$ – матрицы действительных и мнимых частей (2) - (5) соответственно.

Теперь, подставив соотношения (3)-(6) в (1) и приравнявая действительные и мнимые части в левой и правой частях получаемого при этом выражения, будем иметь следующую систему матричных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} M(t) \cdot G(t) \cdot P(t) - M(t) \cdot H(t) \cdot Q(t) - N(t) \cdot G(t) \cdot Q(t) - N(t) \cdot H(t) \cdot P(t) - G(t) = R(t), \\ M(t) \cdot G(t) \cdot Q(t) + M(t) \cdot H(t) \cdot P(t) + N(t) \cdot G(t) \cdot P(t) - N(t) \cdot H(t) \cdot Q(t) - H(t) = S(t) \end{cases} \quad (7)$$

с неизвестными матрицами

[illegible]

$$H(t) = \begin{bmatrix} h_{11}(t) \dots h_{1n}(t) \\ h_{21}(t) \dots h_{2n}(t) \\ \dots \dots \dots \\ h_{m1}(t) \dots h_{mn}(t) \end{bmatrix} = (h_{ij}(t)), \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}, \quad (9)$$

также подлежащими определению.

Декомпозиционный аналитический метод решения. Систему матричных уравнений второго порядка (7) представим в следующем гиперматрично-гипервекторном виде [3,4]:

$$\begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} M(t) \otimes P^T(t) - N(t) \otimes Q^T(t) & -[M(t) \otimes Q^T(t) + N(t) \otimes P^T(t)] \\ \hline M(t) \otimes Q^T(t) + N(t) \otimes P^T(t) & M(t) \otimes P^T(t) - N(t) \otimes Q^T(t) \end{array} \right] & \begin{pmatrix} \hat{G}(t) \\ \hat{H}(t) \end{pmatrix} \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{G}(t) \\ \hat{H}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{R}(t) \\ \hat{S}(t) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$\begin{matrix} 2mn \times 2mn & 2mn \times 1 \\ 2mn \times 1 & 2mn \times 1 \end{matrix}$

где символ $\otimes$ - знак кронекерова произведения, матрицы – блоки:

$$\begin{matrix} m \times m & n \times n & m \times m & n \times n & mn \times mn & mn \times mn \end{matrix} \quad (11)$$

$$\begin{matrix} m \times m & n \times n & m \times m & n \times n & mn \times mn & mn \times mn \end{matrix} \quad (12)$$

а гипервекторы:

$$\hat{G}(t) = (g_{11}(t), \dots, g_{1n}(t) : g_{21}(t), \dots, g_{2n}(t) : \dots : g_{m1}(t), \dots, g_{mn}(t))^T_{mn \times 1}, \quad (13)$$

$$\hat{H}(t) = (h_{11}(t), \dots, h_{1n}(t) : h_{21}(t), \dots, h_{2n}(t) : \dots : h_{m1}(t), \dots, h_{mn}(t))^T_{mn \times 1}, \quad (14)$$

$$\hat{R}(t) = (r_{11}(t), \dots, r_{1n}(t) : r_{21}(t), \dots, r_{2n}(t) : \dots : r_{m1}(t), \dots, r_{mn}(t))^T_{mn \times 1}, \quad (15)$$

$$\hat{S}(t) = (s_{11}(t), \dots, s_{1n}(t) : s_{21}(t), \dots, s_{2n}(t) : \dots : s_{m1}(t), \dots, s_{mn}(t))^T_{mn \times 1}. \quad (16)$$

С учетом (11)-(16) система (10) принимает вид

$$\begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} J_{11}(t) & J_{12}(t) \\ \hline J_{21}(t) & J_{22}(t) \end{array} \right] - E & \begin{pmatrix} \hat{G}(t) \\ \hat{H}(t) \end{pmatrix} \end{bmatrix} = D(t) \cdot \begin{pmatrix} \hat{G}(t) \\ \hat{H}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{R}(t) \\ \hat{S}(t) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$\begin{matrix} 2mn \times 2mn & 2mn \times 1 \\ 2mn \times 1 & 2mn \times 1 \end{matrix}$

откуда при выполнении условия

$$\text{rang} D(t) = 2mn \quad (18)$$

получим

$$\begin{pmatrix} \hat{G}(t) \\ \hat{H}(t) \end{pmatrix}_{2mn \times 1} = \left[\left[\begin{array}{c|c} J_{11}(t) & J_{12}(t) \\ \hline J_{21}(t) & J_{22}(t) \end{array} \right] - E \right]^{-1}_{2mn \times 2mn} \cdot \begin{pmatrix} \hat{R}(t) \\ \hat{S}(t) \end{pmatrix}_{2mn \times 1} = \left[\begin{array}{c|c} J_{11}(t) - E & J_{12}(t) \\ \hline J_{21}(t) & J_{22}(t) - E \end{array} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \hat{R}(t) \\ \hat{S}(t) \end{pmatrix} = D^{-1}(t) \cdot \begin{pmatrix} \hat{R}(t) \\ \hat{S}(t) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Далее, имея (19), в соответствии с (13)-(16), (8), (9), (6), (2) можно определить решение $X(t)$ задачи (1).

Декомпозиционный последовательный численно-аналитический метод решения. Пусть матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $X(t)$ обладают аналитическими в центре аппроксимации t_v элементами, иными словами, имеют место следующие дифференциальные преобразования [5,6]:

$$A(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{dA^K(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \xrightarrow{\cdot} \quad A(t) = \chi_1(t, t_v, H, A(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (20)$$

$$B(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{dB^K(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \xrightarrow{\cdot} \quad B(t) = \chi_2(t, t_v, H, B(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (21)$$

$$C(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{dC^K(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \xrightarrow{\cdot} \quad C(t) = \chi_3(t, t_v, H, C(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (22)$$

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{dX^K(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \xrightarrow{\cdot} \quad X(t) = \chi_4(t, t_v, H, X(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (23)$$

где $A(K)$, $B(K)$, $C(K)$ и $X(K)$ - матричные дискретизации матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $X(t)$ соответственно с размерами $m \times m$, $n \times n$, $m \times n$ и $m \times n$; $K = \overline{0, \infty}$ - целочисленный аргумент; H - масштабный коэффициент; символ $\xrightarrow{\cdot}$ - знак перехода из области оригиналов в область дифференциальных изображений и наоборот; $\chi_1(\cdot) - \chi_4(\cdot)$ - некоторые аппроксимирующие функции, восстанавливающие оригиналы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $X(t)$ соответственно. При дифференциальных преобразованиях (20)-(23) с учетом представлений (3)-(6), естественно, имеют место следующие дифференциальные преобразования:

$$M(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{dM^K(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \xrightarrow{\cdot} \quad M(t) = \chi_5(t, t_v, H, M(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (24)$$

$$N(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{dN^K(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \xrightarrow{\cdot} \quad N(t) = \chi_6(t, t_v, H, N(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (25)$$

$$P(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{dP^K(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \xrightarrow{\cdot} \quad P(t) = \chi_7(t, t_v, H, P(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (26)$$

$$Q(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{dQ^K(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \xrightarrow{\cdot} \quad Q(t) = \chi_8(t, t_v, H, Q(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (27)$$

$$R(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{dR^K(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \xrightarrow{\cdot} \quad R(t) = \chi_9(t, t_v, H, R(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (28)$$

$$S(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{dS^K(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \xrightarrow{\cdot} \quad S(t) = \chi_{10}(t, t_v, H, S(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (29)$$

$$G(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{dG^K(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \cdot \quad G(t) = \chi_{11}(t, t_v, H, G(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (30)$$

$$H(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{dH^K(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \cdot \quad H(t) = \chi_{12}(t, t_v, H, H(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (31)$$

где $M(K), N(K), P(K), Q(K), R(K), S(K), G(K)$ и $H(K)$ - матричные дискреты матриц $M(t), N(t), P(t), Q(t), R(t), S(t), G(t)$ и $H(t)$ соответственно с размерами $m \times m, m \times m, n \times n, n \times n, m \times n, m \times n$ и $m \times n$; $\chi_5(\cdot) - \chi_{12}(\cdot)$ - некоторые аппроксимирующие функции, восстанавливающие оригиналы $M(t), N(t), P(t), Q(t), R(t), S(t), G(t)$ и $H(t)$ соответственно.

Теперь с учетом правил алгебры дифференциальных преобразований переведем (17) из области оригиналов в область дифференциальных изображений. Получим:

при $K=0$:

$$\begin{bmatrix} [M(0) \otimes P^T(0) - N(0) \otimes Q^T(0) - E] & -[M(0) \otimes Q^T(0) + N(0) \otimes P^T(0)] \\ [M(0) \otimes Q^T(0) + N(0) \otimes P^T(0)] & [M(0) \otimes P^T(0) - N(0) \otimes Q^T(0) - E] \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{G}(0) \\ \hat{H}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{R}(0) \\ \hat{S}(0) \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{pmatrix} \hat{G}(0) \\ \hat{H}(0) \end{pmatrix}_{2mn \times 1} = \begin{bmatrix} [M(0) \otimes P^T(0) - N(0) \otimes Q^T(0) - E] & -[M(0) \otimes Q^T(0) + N(0) \otimes P^T(0)] \\ [M(0) \otimes Q^T(0) + N(0) \otimes P^T(0)] & [M(0) \otimes P^T(0) - N(0) \otimes Q^T(0) - E] \end{bmatrix}_{2mn \times 2mn}^{-1} \times \\ \times \begin{pmatrix} \hat{R}(0) \\ \hat{S}(0) \end{pmatrix}_{2mn \times 1} = \begin{bmatrix} D_{11}(\bullet) & D_{12}(\bullet) \\ D_{21}(\bullet) & D_{22}(\bullet) \end{bmatrix}_0^{-1} \cdot \begin{pmatrix} R(0) \\ S(0) \end{pmatrix} = D^{-1}(0,0) \cdot \begin{pmatrix} R(0) \\ S(0) \end{pmatrix}, \quad (32)$$

если, конечно, имеет место условие

$$\text{rang} D(0,0) = 2 \cdot m \cdot n; \quad (33)$$

при $K=1$:

$$\begin{bmatrix} [M(1) \otimes P^T(0) + M(0) \otimes P^T(1) - & -[M(1) \otimes Q^T(0) + M(0) \otimes Q^T(1) + \\ -N(1) \otimes Q^T(0) - N(0) \otimes Q^T(1)] & +N(1) \otimes P^T(0) + N(0) \otimes P^T(1)] \\ [M(1) \otimes Q^T(0) + M(0) \otimes Q^T(1) + & [M(1) \otimes P^T(0) + M(0) \otimes P^T(1) - \\ +N(1) \otimes P^T(0) + N(0) \otimes P^T(1)] & -N(1) \otimes Q^T(0) - N(0) \otimes Q^T(1)] \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{G}(0) \\ \hat{H}(0) \end{pmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} [M(0) \otimes P^T(0) - N(0) \otimes Q^T(0) - E] & -[M(0) \otimes Q^T(0) + N(0) \otimes P^T(0)] \\ [M(0) \otimes Q^T(0) + N(0) \otimes P^T(0)] & [M(0) \otimes P^T(0) - N(0) \otimes Q^T(0) - E] \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{G}(1) \\ \hat{H}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{R}(1) \\ \hat{S}(1) \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \hat{G}(1) \\ \hat{H}(1) \end{pmatrix}_{2mn \times 1} &= \begin{pmatrix} -1 \\ D(0,0) \end{pmatrix}_{2mn \times 2mn} \cdot \begin{pmatrix} \hat{R}(1) \\ \hat{S}(1) \end{pmatrix}_{2mn \times 1} - \\
 &- \begin{bmatrix} [M(1) \otimes P^T(0) + M(0) \otimes P^T(1) - & -[M(1) \otimes Q^T(0) + M(0) \otimes Q^T(1) + \\ -N(1) \otimes Q^T(0) - N(0) \otimes Q^T(1)] & +N(1) \otimes P^T(0) + N(0) \otimes P^T(1)] \\ [M(1) \otimes Q^T(0) + M(0) \otimes Q^T(1) + & [M(1) \otimes P^T(0) + M(0) \otimes P^T(1) - \\ +N(1) \otimes P^T(0) + N(0) \otimes P^T(1)] & -N(1) \otimes Q^T(0) - N(0) \otimes Q^T(1)] \end{bmatrix}_{2mn \times 2mn} \cdot \begin{pmatrix} \hat{G}(0) \\ \hat{H}(0) \end{pmatrix}_{2mn \times 1} = \\
 &= D^{-1}(0,0) \cdot \left[\begin{pmatrix} \hat{R}(1) \\ \hat{S}(1) \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} D_{11}(\bullet) & D_{12}(\bullet) \\ D_{21}(\bullet) & D_{22}(\bullet) \end{bmatrix}_1 \cdot \begin{pmatrix} \hat{G}(0) \\ \hat{H}(0) \end{pmatrix} \right] = D^{-1}(0,0) \left[\begin{pmatrix} \hat{R}(1) \\ \hat{S}(1) \end{pmatrix} - D(1,0;0,1) \cdot \begin{pmatrix} \hat{G}(0) \\ \hat{H}(0) \end{pmatrix} \right]. \quad (34)
 \end{aligned}$$

Не вдаваясь в подробности, представим также окончательные соотношения по определению неизвестных гипервекторных дискрет:

при K=2:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \hat{G}(2) \\ \hat{H}(2) \end{pmatrix}_{2mn \times 1} &= \begin{pmatrix} -1 \\ D(0,0) \end{pmatrix}_{2mn \times 2mn} \cdot \begin{pmatrix} \hat{R}(2) \\ \hat{S}(2) \end{pmatrix}_{2mn \times 1} - \\
 &- \begin{bmatrix} [M(2) \otimes P^T(0) + M(1) \otimes P^T(1) + M(0) \otimes P^T(2) - & -[M(2) \otimes Q^T(0) + M(1) \otimes Q^T(1) + M(0) \otimes Q^T(2) + \\ -N(2) \otimes Q^T(0) - N(1) \otimes Q^T(1) - N(0) \otimes Q^T(2)] & +N(2) \otimes P^T(0) + N(1) \otimes P^T(1) + N(0) \otimes P^T(2)] \\ [M(2) \otimes Q^T(0) + M(1) \otimes Q^T(1) + M(0) \otimes Q^T(2) + & [M(2) \otimes P^T(0) + M(1) \otimes P^T(1) + M(0) \otimes P^T(2) - \\ +N(2) \otimes P^T(0) + N(1) \otimes P^T(1) + N(0) \otimes P^T(2)] & -N(2) \otimes Q^T(0) - N(1) \otimes Q^T(1) - N(0) \otimes Q^T(2)] \end{bmatrix}_{2mn \times 2mn} \times \\
 &\times \begin{pmatrix} \hat{G}(0) \\ \hat{H}(0) \end{pmatrix}_{2mn \times 1} - \begin{bmatrix} [M(1) \otimes P^T(0) + M(0) \otimes P^T(1) - & -[M(1) \otimes Q^T(0) + M(0) \otimes Q^T(1) + \\ N(1) \otimes Q^T(0) - N(0) \otimes Q^T(1)] & +N(1) \otimes P^T(0) + N(0) \otimes P^T(1)] \\ [M(1) \otimes Q^T(0) + M(0) \otimes Q^T(1) + & [M(1) \otimes P^T(0) + M(0) \otimes P^T(1) - \\ +N(1) \otimes P^T(0) + N(0) \otimes P^T(1)] & -N(1) \otimes Q^T(0) - N(0) \otimes Q^T(1)] \end{bmatrix}_{2mn \times 2mn} \cdot \begin{pmatrix} \hat{G}(1) \\ \hat{H}(1) \end{pmatrix}_{2mn \times 1} = \\
 &= D^{-1}(0,0) \cdot \left[\begin{pmatrix} \hat{R}(2) \\ \hat{S}(2) \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} D_{11}(\bullet) & D_{12}(\bullet) \\ D_{21}(\bullet) & D_{22}(\bullet) \end{bmatrix}_2 \cdot \begin{pmatrix} \hat{G}(0) \\ \hat{H}(0) \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} D_{11}(\bullet) & D_{12}(\bullet) \\ D_{21}(\bullet) & D_{22}(\bullet) \end{bmatrix}_1 \cdot \begin{pmatrix} \hat{G}(1) \\ \hat{H}(1) \end{pmatrix} \right] = \\
 &= D^{-1}(0,0) \left[\begin{pmatrix} \hat{R}(2) \\ \hat{S}(2) \end{pmatrix} - D(2,0;1,1;0,2) \cdot \begin{pmatrix} \hat{G}(0) \\ \hat{H}(0) \end{pmatrix} - D(1,0;0,1) \cdot \begin{pmatrix} \hat{G}(1) \\ \hat{H}(1) \end{pmatrix} \right]; \quad (35)
 \end{aligned}$$

при $K=K$:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \hat{G}(K) \\ \hat{H}(K) \end{pmatrix}_{2mn \times 1} &= \begin{pmatrix} -1 \\ D(0,0) \end{pmatrix}_{2mn \times 2mn} \cdot \begin{pmatrix} \hat{R}(K) \\ \hat{S}(K) \end{pmatrix}_{2mn \times 1} - \begin{bmatrix} D_{11}(\bullet) & D_{12}(\bullet) \\ D_{21}(\bullet) & D_{22}(\bullet) \end{bmatrix}_K \begin{pmatrix} \hat{G}(0) \\ \hat{H}(0) \end{pmatrix}_{2mn \times 1} - \dots - \\
 &- \begin{bmatrix} D_{11}(\bullet) & D_{12}(\bullet) \\ D_{21}(\bullet) & D_{22}(\bullet) \end{bmatrix}_1 \begin{pmatrix} \hat{G}(K-1) \\ \hat{H}(K-1) \end{pmatrix}_{2mn \times 1} = D^{-1}(0,0) \cdot \begin{pmatrix} \hat{R}(K) \\ \hat{S}(K) \end{pmatrix} - D(K,0;K-1,1;\dots,1,K-1,0,K) \cdot \begin{pmatrix} \hat{G}(0) \\ \hat{H}(0) \end{pmatrix} - \\
 &- \dots - D(1,0;0,1) \cdot \begin{pmatrix} \hat{G}(K-1) \\ \hat{H}(K-1) \end{pmatrix} = D^{-1}(0,0) \left[\begin{pmatrix} \hat{R}(K) \\ \hat{S}(K) \end{pmatrix} - \sum_{\ell=1}^K D(\ell,0;\ell-1,1;\dots,1,\ell-1,0,\ell) \cdot \begin{pmatrix} \hat{G}(K-\ell) \\ \hat{H}(K-\ell) \end{pmatrix} \right], \quad (36)
 \end{aligned}$$

причем

$$\begin{cases} D_{11}(\bullet)_0 = D_{22}(\bullet)_0 = M(0) \otimes P^T(0) - N(0) \otimes Q^T(0) - E_{mn \times mn}, \\ D_{21}(\bullet)_0 = -D_{12}(\bullet)_0 = M(0) \otimes Q^T(0) + N(0) \otimes P^T(0); \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} D_{11}(\bullet)_K = D_{22}(\bullet)_K = \sum_{\ell=0}^K [M(\ell) \otimes P^T(K-\ell) - N(\ell) \otimes Q^T(K-\ell)], \\ D_{21}(\bullet)_K = -D_{12}(\bullet)_K = \sum_{\ell=0}^K [M(\ell) \otimes Q^T(K-\ell) + N(\ell) \otimes P^T(K-\ell)], \end{cases} \quad K \geq 1. \quad (38)$$

Таким образом, имея гипервекторные дискретизации (32), (34)-(36), в соответствии с (30) и (31) можно восстановить матрицы (8) и (9) соответственно, а в соответствии с (6) - решение (2) исходного матричного уравнения (1).

Модельный пример. Рассмотрим однопараметрическое матричное уравнение типа Стейна

$$\begin{bmatrix} 1 & jt & (1+j) \\ t & 0 & 1 \\ j & -t & j \end{bmatrix} \cdot X(t) \cdot \begin{bmatrix} jt & -1 \\ -t & 0 \end{bmatrix} - X(t) = \begin{bmatrix} (jt^2 - 2jt - t^3) & (-j - t - jt) \\ (-t^3 + jt^3 + 1) & (-j - 2t - jt^2) \\ (jt^2 - t^2) & (-jt + jt^2) \end{bmatrix},$$

откуда очевидно, что

$$M(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 0 & 1 \\ 0 & -t & 0 \end{bmatrix}, \quad N(t) = \begin{bmatrix} 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -t & 0 \end{bmatrix}, Q(t) = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R(t) = \begin{bmatrix} -t^3 & -t \\ (-t^3+1) & -2t \\ -t^2 & 0 \end{bmatrix}, S(t) = \begin{bmatrix} (t^2-2t) & (-1-t) \\ t^3 & (-t^2-1) \\ t^2 & (t^2-t) \end{bmatrix}.$$

Следовательно, при $t_v = 0, H = 1$ будем иметь следующие матричные дискретности:

$$M(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, M(K) = [0], \forall K \geq 2;$$

$$N(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, N(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, N(K) = [0], \forall K \geq 2;$$

$$P(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, P(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, P(K) = [0], \forall K \geq 2;$$

$$Q(0) = [0], Q(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Q(K) = [0], \forall K \geq 2;$$

$$R(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R(1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, R(3) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R(K) = [0], \forall K \geq 4;$$

$$S(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, S(1) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, S(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, S(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, S(K) = [0], \forall K \geq 4;$$

Далее имеем:

npu $K=0$:

$$D_{11}(0,0) = D_{22}(0,0) = M(0) \otimes P^T(0) - N(0) \otimes Q^T(0) - E = \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$$D_{21}(0,0) = -D_{12}(0,0) = M(0) \otimes Q^T(0) + N(0) \otimes P^T(0) = \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$$D(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{12 \times 12},$$

$$D^{-1}(0,0) = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]_{12 \times 12},$$

$$\begin{bmatrix} \hat{G}(0) \\ \hat{H}(0) \end{bmatrix} = D^{-1}(0,0) \cdot \begin{bmatrix} \hat{R}(0) \\ \hat{S}(0) \end{bmatrix} = (0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)^T.$$

Следовательно,

$$G(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

при $K=1$:

$$D_{11}(1,0;0,1) = D_{22}(1,0;0,1) = M(1) \otimes P^T(0) + M(0) \otimes P^T(1) - N(1) \otimes Q^T(0) - N(0) \otimes Q^T(1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

0

$$D_{21}(1,0;0,1) = -D_{12}(1,0;0,1) = M(1) \otimes Q^T(0) + M(0) \otimes Q^T(1) + N(1) \otimes P^T(0) + N(0) \otimes P^T(1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & -1 \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D(1,0;0,1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \mathbf{0} & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & -1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & -1 & 0 \\ -1 & 0 & & 0 & 0 & & & & & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & \mathbf{0} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & -1 \\ & & & 0 & 0 & -1 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \mathbf{0} & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{12 \times 12},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{G}(1) \\ \hat{H}(1) \end{pmatrix} = \begin{matrix} -1 \\ D \end{matrix} (0,0) \cdot \left[\begin{pmatrix} \hat{R}(1) \\ \hat{S}(1) \end{pmatrix} - D(1,0;0,1) \cdot \begin{pmatrix} \hat{G}(0) \\ \hat{H}(0) \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{matrix} -1 \\ D \end{matrix} (0,0) \cdot \left[(0 \text{ } -1 \text{ } 0 \text{ } -2 \text{ } 0 \text{ } 0 \text{ } -2 \text{ } -1 \text{ } 0 \text{ } 0 \text{ } 0 \text{ } -1)^T - (0 \text{ } 0 \text{ } 0 \text{ } 0 \text{ } 1 \text{ } -1 \text{ } -1 \text{ } 1 \text{ } 0 \text{ } 0 \text{ } 0 \text{ } 0)^T \right] =$$

$$= (0 \text{ } 0 \text{ } 0 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 0 \text{ } 1 \text{ } 0 \text{ } 1 \text{ } 0 \text{ } 0 \text{ } 0 \text{ } 0)^T.$$

Следовательно,

$$G(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

npu K=2:

$$D_{11}(2,0;1,1;0,2) = D_{22}(2,0;1,1;0,2) = \cancel{M(2)}^0 \otimes \cancel{P^T(0)}^0 + M(1) \otimes P^T(1) + \cancel{M(0)}^0 \otimes \cancel{P^T(2)}^0 -$$

$$- \cancel{N(2)}^0 \otimes \cancel{Q^T(0)}^0 - N(1) \otimes Q^T(1) - \cancel{N(0)}^0 \otimes \cancel{Q^T(2)}^0 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{21}(2,0;1,1;0,2) = -D_{12}(2,0;1,1;0,2) = \cancel{M(2)}^0 \otimes \cancel{Q^T(0)}^0 + M(1) \otimes Q^T(1) + \cancel{M(0)}^0 \otimes \cancel{Q^T(2)}^0 +$$

$$+ \cancel{N(2)}^0 \otimes \cancel{P^T(0)}^0 + N(1) \otimes P^T(1) + \cancel{N(0)}^0 \otimes \cancel{P^T(2)}^0 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D(2,0;1,1;0,2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Следовательно,

$$G(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что имеют место и следующие матричные дискреты:

$$G(K) = [0], H(K) = 0; \forall K \geq 4.$$

Таким образом, маклореновское решение задачи следующее:

$$G(t) = G(0) + G(1) \cdot t + \cancel{G(2) \cdot t^2} + \cancel{G(3) \cdot t^3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot t,$$

$$H(t) = H(0) + H(1) \cdot t + H(2) \cdot t^2 + \cancel{H(3) \cdot t^3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot t + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot t^2,$$

$$X(t) = G(t) + j \cdot H(t) = \begin{bmatrix} jt & j \\ -1 & (j+t) \\ t & -jt^2 \end{bmatrix},$$

в точности которого можно легко убедиться его подстановкой в исходное матричное уравнение.

Замечание 1. Условия однозначной разрешимости числовых неявных дискретных матричных уравнений Сильвестра хорошо известны (см. [3, стр.92, формула (12.10)]). Аналогичные условия легко можно написать и для однопараметрических матричных уравнений (1), однако их проверка связана с большими вычислительными трудностями, так как они фактически сводятся к определению собственных функций матриц $A(t)$ и $B(t)$ и их всевозможным парным произведениям, не равным единице. Ввиду этих затруднений и с учетом гиперматрично-гипервекторных соотношений (32), (34)-(36) можно утверждать, что условия однозначной разрешимости однопараметрических матричных уравнений типа Стейна (1) при предложенном декомпозиционном аналитическом методе сводятся к выполнению одного единственного условия (18), а также к выполнению условия (33) при предложенном декомпозиционном численно-аналитическом методе.

Замечание 2. Из условий (11), (12), а также из (19) следуют блочная косо-симметричность относительно первой главной диагонали и блочная симметричность относительно второй главной диагонали матрицы $D(t)$, а из условий (37) и

(38) - блочная кососимметричность относительно первых главных диагоналей и блочная симметричность относительно вторых главных диагоналей матриц $D(\ell, 0; \ell - 1, 1; \dots, 1, \ell - 1; 0, \ell), \forall \ell = \overline{0, K}$.

Заключение. Таким образом, решение однопараметрических матричных уравнений типа Стейна $A(t) \cdot X(t) \cdot B(t) + X(t) = C(t)$ с аналитическими элементами предложенным декомпозиционным численно-аналитическим методом на основе использования прямых дифференциальных преобразований сводится к последовательным рекуррентным численным процедурам, а восстановление оригиналов - решений осуществляется на основе использования обратных дифференциальных преобразований. Однако, несмотря на то, что при этом трансформированный численно-аналитический эквивалент исходной непрерывной задачи обладает высокой по отношению к ней размерностью, все-таки он может быть эффективно реализован средствами современных информационных технологий [7,8] ввиду отсутствия при этом принципиальных затруднений. Что же касается декомпозиционного аналитического метода, то он сильно ограничен в практическом плане, ибо может быть использован лишь в задачах с малыми размерами и простыми элементами матриц и, скорее всего, представляет в общем случае лишь только теоретический интерес.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. - М.: Наука, 2010. – 560с.
2. **Ланкастер П.** Теория матриц. - М.: Наука, 1978. – 280 с.
3. **Икрамов Х.Д.** Численное решение матричных уравнений. - М.: Наука, 1984. – 190 с.
4. **Мамонов С.С.** Решение матричных уравнений // Вестник Ряз. гос. ун.-та. им. С.А. Есенина. - Рязань, 2009. - Вып.21, №1. – С. 115 - 136.
5. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. - Киев: Наукова думка, 1984. - 420 с.
6. **Симонян С.О., Аветисян А.Г.** Прикладная теория дифференциальных преобразований. - Ереван: Изд-во ГИУА “Чартарагет”, 2010. - 361с.
7. **Поршнев С.В.** Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB. - СПб. - М. - Краснодар: Лань, 2011. - 736 с.
8. **Strastrup B.** The C++ Programming Language. 4th edition. - Boston: Addison-Wesley Professional, 2013. - 1368 p.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 02.11.2015.

Ս.Հ. ՄԻՄՈՆՅԱՆ

ՍՏԵՅՆԻ ՏԻՊԻ $A(t) \cdot X(t) \cdot B(t) - X(t) = C(t)$ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՄԱՏՐԻՑԱՑԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐԱՌԱՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԴԵԿՈՄՊՈԶԻՑԻՈՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

Առաջարկվել են Ստեյնի տիպի միապարամետրական մատրիցային հավասարումների լուծման երկու եղանակներ՝ անալիտիկ եղանակը, որը հարմար է փոքր չափերով և միապարամետրական մատրիցների հասարակ տարրերով խնդիրների լուծման համար, դեկոմպոզիցիոն հաջորդական անդրադարձ թվա-անալիտիկ եղանակը, որը հիմնված է Գ.Ե. Պուխովի դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա և հարմար է ընդհանուր դեպքում, երբ այդ հավասարումների մատրիցների տարրերը անալիտիկ են մոտարկման կենտրոններում: Ստացվել են նման հավասարումների միարժեքորեն լուծելիության պայմանները այդ երկու մեթոդների դեպքում: Դիտարկվել է մոդելային օրինակ՝ լուծված դեկոմպոզիցիոն հաջորդական անդրադարձ թվա-անալիտիկ եղանակով, և ստացվել է խնդրի ճշգրիտ մակլորենյան լուծումը:

Առանցքային բառեր. Ստեյնի տիպի միապարամետրական մատրիցային հավասարում, լուծման դեկոմպոզիցիոն անալիտիկ եղանակ, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, լուծման դեկոմպոզիցիոն հաջորդական անդրադարձ թվա-անալիտիկ եղանակ, միարժեքորեն լուծելիության պայմաններ, մոդելային օրինակ:

S.H. SIMONYAN

DECOMPOSITION METHODS FOR SOLVING ONE-PARAMETRIC MATRIX EQUATIONS $A(t) \cdot X(t) \cdot B(t) - X(t) = C(t)$ OF STEYN TYPE

Two decomposition methods for solving one-parametric Steyn type matrix equations are proposed - analytical method, which is suitable for solving problems with small sizes and with simple elements of one-parametric matrices and sequential recursive numerical-analytical method, which is based on G.E. Pukhov's differential transformations and is generally convenient when the elements of matrices of the equations are analytical in the approximation centers. Condition of unique solvability of these equations were obtained for the proposed methods. A model example was considered, which was solved by using the decomposition sequential recursive numerical-analytical method and the exact Maclorenian solution was obtained.

Keywords: one-parametric Steyn type matrix equation, decomposition analytical solving method, differential transformations, decomposition sequential recursive numerical-analytical solving method, condition of unique solvability, model example.