

О.Н. ГАСПАРЯН, О.Г. ОГАНЯН

КОРНЕВЫЕ ГОДОГРАФЫ ДИСКРЕТНЫХ ЦИРКУЛЯНТНЫХ СИСТЕМ
РЕГУЛИРОВАНИЯ

Рассмотрены вопросы построения корневых годографов дискретных многомерных систем автоматического регулирования с циркулянтными передаточными матрицами. Подобные системы имеют ортогональный канонический базис, а их характеристические передаточные функции описываются в аналитическом виде при любом числе N отдельных каналов. Сформулированы правила построения корневых годографов на плоскости z указанного класса систем, которые являются обобщением на многомерный случай известных правил построения корневых годографов дискретных систем регулирования с одним входом и выходом. Приведен численный пример.

Ключевые слова: многомерная дискретная система, циркулянтная система, период прерывания, z -преобразование, характеристическая передаточная функция, корневые годографы.

Введение. Метод корневого годографа, предложенный в 50-ых годах прошлого столетия известным американским ученым в области управления Вальтером Эвансом, является в настоящее время одним из основных и наиболее эффективных инженерных методов проектирования линейных непрерывных и дискретных систем регулирования с одним входом и одним выходом (одномерных систем) [1-4]. Основанный на ряде несложных графических правил и процедур, метод корневого годографа позволяет по распределению полюсов и нулей передаточной функции разомкнутой одномерной системы предсказать поведение корней замкнутой системы при изменении общего коэффициента усиления (или какого-либо другого параметра). С развитием теории многомерных систем автоматического регулирования (МСАР) этот метод стал объектом пристального внимания ученых и исследователей. В монографиях [5,6] дано распространение метода корневого годографа на случай непрерывных МСАР различных структурных классов. В то же время в современной научно-технической литературе практически отсутствуют работы, посвященные корневым годографам дискретных МСАР. В настоящей статье на основе метода характеристических передаточных функций (ХПФ) [5] сформулированы общие правила построения корневых годографов дискретных циркулянтных МСАР (ЦМСАР) с произвольным числом N отдельных каналов.

Корневые годографы дискретных ЦМСАР. Обобщенная матричная структурная схема линейной дискретной МСАР показана на рис. 1, где через $\varphi(z)$, $f(z)$ обозначены z -преобразования N -мерных векторов входа и выхода, T - период прерывания синхронных дискретных элементов в отдельных каналах,

$kW(z)$ - дискретная передаточная матрица разомкнутой системы размера $N \times N$ с дробно-рациональными элементами $kw_{i,j}(z)$ (k - вещественный скаляр).

Укажем, что комплексная переменная z связана с переменной Лапласа s известным выражением $z = \exp(sT)$ [3,4].

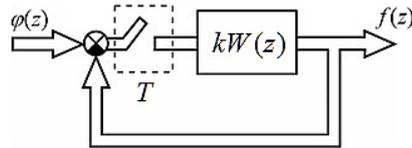


Рис. 1. Матричная структурная схема дискретной МСАР

Дискретная передаточная матрица $kW(z)$ в случае ЦМСАР имеет вид [5]

$$kW(z) = k \begin{pmatrix} w_0(z) & w_1(z) & \dots & w_{N-1}(z) \\ w_{N-1}(z) & w_0(z) & \dots & w_{N-2}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1(z) & w_2(z) & \dots & w_0(z) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

т.е. каждая последующая строка повторяет предыдущую при сдвиге всех элементов (кроме N -го) на одно место вправо: N -й элемент предыдущей строки при этом становится первым элементом следующей строки [5,6]. Отметим, что элементы $w_0(z), w_1(z), \dots, w_{N-1}(z)$ первой строки циркулянтной матрицы $kW(z)$ (1) являются обычными дискретными дробно-рациональными передаточными функциями. Подробное описание свойств циркулянтных матриц дано в [5,6].

На основании метода ХПФ дискретная передаточная матрица разомкнутой ЦМСАР $kW(z)$ (1) имеет следующий канонический вид:

$$kW(z) = C \text{diag}\{kq_i(z)\}C^{-1}, \quad (2)$$

где C есть ортогональная (т.е. $C^{-1} = C^*$) модальная матрица, составленная из нормированных собственных векторов матрицы перестановок

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

а ХПФ $kq_i(z)$ могут быть записаны в аналитическом виде при любом N :

$$kq_i(z) = k \left[w_0(z) + \sum_{k=1}^{N-1} w_k(z) \exp \left\{ j \frac{2\pi(i-1)k}{N} \right\} \right] = k \frac{M_i(z)}{D(z)}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

Необходимо подчеркнуть, что все ХПФ (называемые также передаточными функциями одномерных характеристических систем) $kq_i(z)$ (4) являются дискретными дробно-рациональными передаточными функциями с одинаковыми полиномами $D(z)$ в знаменателе, имеющими действительные коэффициенты. Это следует из того, что полином $D(z)$ при любом i равен произведению полиномов знаменателей всех дискретных передаточных функций $w_0(z), w_1(z), \dots, w_{N-1}(z)$. Поэтому полюсы всех ХПФ $kq_i(z)$ (4) одинаковы и расположены на комплексной плоскости z симметрично относительно действительной оси. Что касается нулей $kq_i(z)$ (4), в общем случае они являются корнями полиномов $M_i(z)$ с комплексными коэффициентами. Поэтому расположение нулей для каждой ХПФ $kq_i(z)$ несимметрично относительно действительной оси. Вместе с тем любому такому расположению нулей соответствует “комплексно-сопряженное” расположение нулей некоторой другой ХПФ [5,6]. В результате совокупность всех нулей дискретной ЦМСАР всегда образует на плоскости z симметричную картину. Следует также указать, что число нулей всех ХПФ дискретной ЦМСАР одинаково, что вытекает из самой формы $kq_i(z)$ (4).

Дискретная передаточная матрица замкнутой ЦМСАР имеет вид

$$\Phi(z) = [I + kW(z)]^{-1} kW(z) = C \text{diag} \left\{ \frac{kq_i(s)}{1 + kq_i(s)} \right\} C^*, \quad (5)$$

где I - единичная матрица. Устойчивость замкнутой ЦМСАР определяется распределением корней характеристического уравнения

$$\det[I + kW(z)] = \prod_{i=1}^N [1 + kq_i(z)] = 0. \quad (6)$$

Для устойчивости замкнутой дискретной ЦМСАР необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (6) находились на плоскости z внутри окружности единичного радиуса (рис. 2) [3,4].

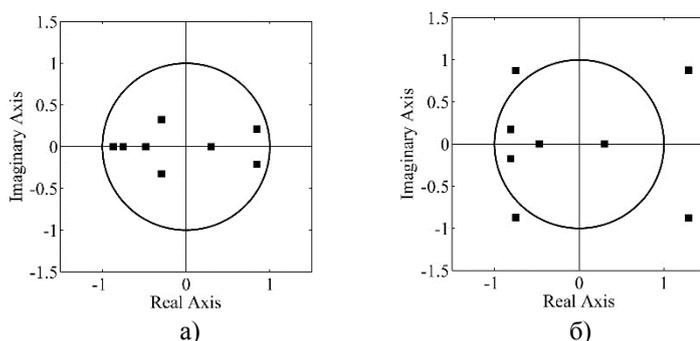


Рис. 2. Распределение корней (черные квадратики) дискретной ЦМСАР на плоскости z :
а - устойчивая система, б - неустойчивая система

Таким образом, в соответствии с классическим методом корневого годографа [1,2] ставится задача построения траекторий корней замкнутой дискретной ЦМСАР на рис. 1 при изменении коэффициента усиления k от нуля до бесконечности.

Уравнение (6), очевидно, эквивалентно следующей системе N уравнений:

$$1 + kq_i(z) = 0 \quad (7)$$

или

$$kq_i(z) = -1, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

откуда видно, что корнями замкнутой дискретной ЦМСАР при любом $k = const$ могут быть только те значения комплексной переменной z , для которых выполняются при некотором i следующие два условия:

$$|kq_i(z)| = 1, \quad \arg q_i(z) = \pm (2r + 1)180^\circ, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где ХПФ $kq_i(z)$ даются выражениями (4). Иными словами, корнями замкнутой дискретной ЦМСАР могут быть только те значения z , при которых некоторые ХПФ $kq_i(z)$ являются действительными отрицательными числами.

С учетом (4) условия (7) можно переписать в виде

$$1 + kq_i(z) = \frac{D(z) + kM_i(z)}{D(z)} = 0 \quad (9)$$

или

$$kq_i(z) = k \frac{M_i(z)}{D(z)} = -1, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Данные условия дают возможность сформулировать правила построения траекторий корней дискретных ЦМСАР в форме, учитывающей специфические структурные особенности рассматриваемого класса многомерных систем.

Правило 1. Число траекторий корней. Число траекторий корней N -мерной дискретной ЦМСАР равно Nnp_0 , где np_0 - число всех полюсов элементов первой строки циркулянтной передаточной матрицы $kW(z)$ (1).

Правило 2. Начало и конец траекторий корней. При $k = 0$ траектории корней каждой характеристической системы начинаются в одних и тех же корнях уравнения $D(z) = 0$ и кончаются при $k = \infty$ в корнях уравнения $M_i(z) = 0$. Если обозначить через nz_0 одинаковые степени всех полиномов $M_i(z)$ ($i = 1, 2, \dots, N$), то это значит, что nz_0 траекторий корней каждой одномерной характеристической

системы неограниченно стремится при $k \rightarrow \infty$ к nz_0 конечным нулям ХПФ $q_i(z)$ (4).

Правило 3. *Число траекторий, стремящихся к бесконечности.* Число траекторий корней каждой характеристической системы, стремящихся к бесконечности при неограниченном возрастании коэффициента k , одинаково и равно $e_0 = np_0 - nz_0$. Соответственно, общее число траекторий корней дискретной ЦМСАР, стремящихся к бесконечности, равно Ne_0 .

Правило 4. *Наклон асимптот траекторий корней.* Допустим, $kq_i(z)$ (4) можно представить в виде произведения сомножителей:

$$kq_i(z) = k \frac{M_i(z)}{D(z)} = k \frac{K_c^i \prod_{j=1}^{nz_0} (z - z_j^i)}{\prod_{j=1}^{np_0} (z - p_j)}, \quad i=1,2,\dots,N, \quad (10)$$

где через p_j обозначены полюсы (одинаковые для всех i), через z_j^i - нули, а K_c^i - в общем случае комплексный “коэффициент усиления” i -й одномерной характеристической системы.

Можно показать [5], что e_0 уходящих в бесконечность траекторий корней i -й характеристической системы неограниченно приближаются к e_0 -лучевой конфигурации, лучи которой (асимптоты траекторий корней) составляют с положительным направлением действительной оси углы:

$$\gamma_r = \frac{(2r+1)180^\circ - \arg K_c^i}{e_0}, \quad r=0,1,\dots,e_0-1. \quad (11)$$

Правило 5. *Центры асимптот траекторий корней.* Центр асимптот i -й характеристической системы расположен на комплексной плоскости в точке

$$A_{ci} = \frac{\sum_{r=1}^{np_0} p_r - \sum_{r=1}^{nz_0} z_r^i}{np_0 - nz_0}, \quad i=1,2,\dots,N, \quad (12)$$

где обозначения те же, что и в (10).

Как видно из (12), в общем случае дискретной ЦМСАР центры асимптот A_{ci} могут быть комплексными. Это вызвано тем, что комплексные нули z_j^i в (12), будучи в общем случае корнями полиномов с комплексными коэффициентами, не будут иметь в этом случае комплексно-сопряженную пару. Однако каждому

комплексному центру A_{ci} всегда соответствует комплексно-сопряженный центр некоторой другой одномерной характеристической системы с комплексно-сопряженным полиномом в числителе ХПФ. Число таких комплексных центров в случае дискретных ЦМСАР нечетного порядка N равно $N-1$, а при четных $N - N-2$.

Правило 6. *Симметричные траектории корней.* Известно, что независимо от числа каналов N дискретной ЦМСАР первое собственное значение матрицы перестановок U (3) всегда равно единице [5,6]. Далее, при четных N $(1+N/2)$ -е собственное значение этой матрицы всегда равно минус единице. Поэтому дискретные ХПФ $kq_i(z)$ (4), порожденные этими собственными значениями (при $i=1$ и в случае четных N при $i=1+N/2$), будут иметь вещественные полиномы не только в знаменателе, но и в числителе. Это значит, что не только полюсы, но и нули соответствующих ХПФ расположены или на действительной оси, или же симметрично относительно этой оси.

Соответственно, траектории корней этих характеристических систем подчиняются всем обычным правилам поведения траекторий корней дискретных систем регулирования с одним входом и выходом [3,4]. Это касается симметричности траекторий корней относительно действительной оси, участков траекторий, принадлежащих этой оси (см. Правило 7), точек пересечения траекторий корней и т.д.

Правило 7. *Отрезки действительной оси, принадлежащие корневым годографам дискретных ЦМСАР.* В обычном одномерном случае траектории корней, совпадающие с конечными или полубесконечными интервалами действительной оси, находятся особенно легко – это отрезки, расположенные слева (при отрицательной обратной связи) или справа (при положительной связи) от нечетного числа вещественных полюсов или нулей передаточной функции разомкнутой дискретной системы [1-4]. Для случая дискретных ЦМСАР данное правило непосредственно применимо при $i=1$ (что эквивалентно обычным одномерным системам с отрицательной обратной связью) и в случае четных N при $i=1+N/2$ (что эквивалентно одномерным системам с положительной обратной связью).

Сформулированные выше простые правила отражают специфику корневых годографов дискретных ЦМСАР. Существенным здесь является то, что центры асимптот траекторий корней ЦМСАР располагаются не только на действительной оси, но и могут быть комплексно-сопряженными. Вместе с тем, учитывая, что для центров асимптот и их наклонов имеются простые выражения (11), (12), а также принимая во внимание, что дискретные ХПФ $kq_i(z)$ (4) могут быть записаны в аналитическом виде при любом числе каналов N , задача построения траекторий корней ЦМСАР не вызывает особых затруднений.

Пример. В качестве численного примера построения корневых годографов рассмотрим непрерывную трехмерную ЦМСАР с передаточной матрицей

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{10}{s+10} & \frac{10(s+10)}{(s+5)(s+40)} & \frac{70(s+2)}{(s+40)(s+60)} \\ \frac{70(s+2)}{(s+40)(s+60)} & \frac{10}{s+10} & \frac{10(s+10)}{(s+5)(s+40)} \\ \frac{10(s+10)}{(s+5)(s+40)} & \frac{70(s+2)}{(s+40)(s+60)} & \frac{10}{s+10} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Если ввести в отдельные каналы этой системы синхронные импульсные элементы с периодом прерывания $T=0,1$ с и фиксаторами нулевого порядка (zero-order hold) [3], то дискретная передаточная матрица $W(z)$ системы примет следующий вид:

$$W(z) = \begin{pmatrix} \frac{0.632}{z-0.368} & \frac{0.323(z-0.402)}{(z-0.607)(z-0.018)} & \frac{0.112(z-0.485)}{(z-0.018)(z-0.002)} \\ \frac{0.112(z-0.485)}{(z-0.018)(z-0.002)} & \frac{0.632}{z-0.368} & \frac{0.323(z-0.402)}{(z-0.607)(z-0.018)} \\ \frac{0.323(z-0.402)}{(z-0.607)(z-0.018)} & \frac{0.112(z-0.485)}{(z-0.018)(z-0.002)} & \frac{0.632}{z-0.368} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Переход от непрерывной передаточной матрицы $W(s)$ (13) к дискретной матрице $W(z)$ (14) осуществляется при помощи функции $W(z) = c2d(W(s), T)$ в пакете *Control System Toolbox* [7], входящем в состав специализированных пакетов системы *MATLAB*. Для компьютерного построения корневых годографов дискретных ЦМСАР произвольной размерности, а также дискретных многомерных систем других структурных классов были разработаны пакет программ на языке *MATLAB* и графический интерфейс пользователя, который позволяет автоматизировать процедуру ввода данных и вывода результатов расчетов в графическом виде. Общий вид корневых годографов дискретной ЦМСАР с передаточной матрицей $W(z)$ (14) представлен на рис. 3а, где крестиками и кружочками показаны полюсы и нули разомкнутой, а черными квадратиками - корни замкнутой системы. Корневые годографы первой характеристической системы ($i=1$) показаны на рис. 3б. Как видно из рисунка, полюсы и нули, а также корневые годографы при $i=1$ расположены или симметрично относительно действительной оси, или же принадлежат данной оси. Корневые годографы двух остальных одномерных характеристических систем (при $i=2,3$), показанные на рис. 3а и б, соответствуют ХПФ $kq_i(z)$ (4) с комплексными коэффициентами в числителе. Поэтому нули этих ХПФ расположены несимметрично по отношению к действительной оси. Как следствие, корневые годографы характеристических систем

при $i = 2,3$ также не обладают свойством симметрии. Вместе с тем как нули, так и корневые годографы ХПФ $kq_i(z)$ при $i = 2,3$ комплексно-сопряжены относительно друг друга.

В результате полная картина корневых годографов дискретной трехмерной ЦМСАР (14) на рис. 3а, которая получается простым наложением корневых годографов отдельных характеристических систем на рис. 3б-г, симметрична относительно действительной оси.

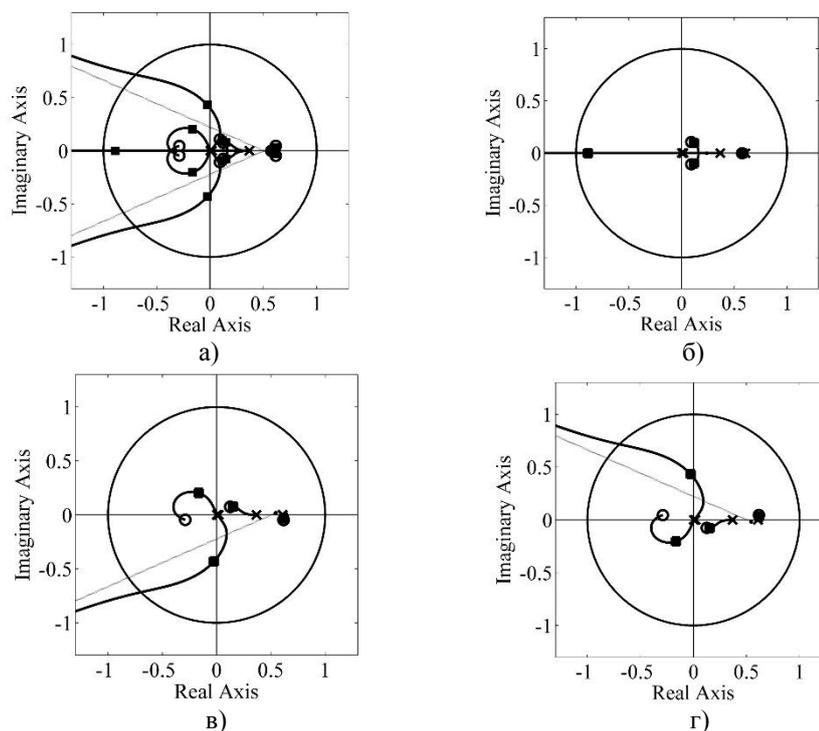


Рис. 3. Корневые годографы дискретной ЦМСАР с передаточной матрицей (14):
 а - общий вид, б - первая характеристическая система, в - вторая характеристическая система, г - третья характеристическая система

Заключение. Исследованы общие свойства корневых годографов линейных дискретных ЦМСАР с произвольным числом отдельных каналов N .

Применение метода ХПФ позволило свести построение корневых годографов дискретных ЦМСАР к построению корневых годографов N дискретных одномерных характеристических систем, имеющих в общем случае комплексные коэффициенты. Выведены формулы для определения центров, а также наклонов асимптот корневых годографов отдельных характеристических систем. Приведен численный пример расчета трехмерной дискретной ЦМСАР. Результаты статьи могут быть использованы при проектировании сложных взаимосвязанных систем управления в различных областях техники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Evans W. R.** Control System Dynamics.- McGraw-Hill Book Co., New York, NY, 1954.-117 p.
2. **Dorf R.C., Bishop R.** Modern Control Systems.- Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 2007.- 1046 p.
3. **Moudgalya K.M.** Digital Control.- John Wiley & Sons, UK, 2007.- 543 p.
4. **Chen Chi-Tsong.** Analog and Digital Control System Design.- Sounder College Publishing, 2006.- 609 p.
5. **Gasparyan O.N.** Linear and Nonlinear Multivariable Feedback Control: A Classical Approach.- John Wiley & Sons, UK, 2008.- 354 p.
6. **Гаспарян О.Н.** Теория многосвязных систем автоматического регулирования.- Ереван: Изд-во “Асогик”, 2010.- 380 с.
7. Control System Toolbox User’s Guide.- The MathWorks, Inc., South Natic, 2014.- 617 p.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 10.03.2015.

Օ.Ն. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ, Օ.Հ. ՕՀԱՆՅԱՆ

ԴԻՍԿՐԵՏ ՑԻՐԿՈՒԼՅԱՆՏ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԱՐՄԱՏԱՅԻՆ ՀԵՏԱԳԾԵՐԸ

Դիտարկված են ցիրկուլյանտ փոխանցման մատրիցով դիսկրետ ավտոմատ կառավարման բազմաչափ համակարգերն արմատային հետազոտելով կառուցման խնդիրները: Նման համակարգերն ունեն օրթոգոնալ կանոնական բազիս, և դրանց բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաները նկարագրվում են N -ի ցանկացած արժեքի դեպքում անալիտիկ տեսքով: Ձևակերպված են նշված դասի համակարգերի z հարթությունում արմատային հետազոտելի կառուցման կանոններ, որոնք մեկ մուտք և մեկ ելք ունեցող դիսկրետ կառավարման համակարգերի արմատային հետազոտելի կառուցման հայտնի կանոնների ընդհանրացումն են բազմաչափ դեպքի համար: Բերված է թվային օրինակ:

Առանցքային բառեր. դիսկրետ բազմաչափ համակարգ, ցիրկուլյանտ համակարգ, ընդհատման պարբերություն, z -ձևափոխություն, բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիա, արմատային հետազոտելի:

O.N. GASPARYAN, O.H. OHANYAN

ROOT LOCI OF DISCRETE-TIME CIRCULANT CONTROL SYSTEMS

Issues on construction of root loci for discrete-time multivariable control systems with circulant transfer matrices are discussed. Such systems have an orthogonal canonical basis, and their characteristic transfer functions can be written in an analytical form for any number of N separate channels. The rules of root loci construction on the z -plane for the mentioned class of systems are formulated, which can be considered as the generalization to the multivariable case of well-known rules of construction of root loci for discrete-time feedback systems with one input and one output. A numerical example is given.

Keywords: multivariable discrete-time system, circulant system, sampling period, z -transform, characteristic transfer function, root loci.