

С.О. СИМОНЯН

К РЕШЕНИЮ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ТРАНСПОНИРОВАННЫХ
АНАЛОГОВ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СИЛЬВЕСТРА

$$A(t) \cdot X(t) + X^T(t) \cdot B(t) = C(t)$$

Рассматриваются однопараметрические транспонированные аналоги матричных уравнений типа Сильвестра, методы решения которых ныне недостаточно разработаны. Предлагаются аналитический, а также последовательный и параллельный численно-аналитические методы решения проблемы, определенным образом дополняющие имеющийся пробел. Для численно-аналитических методов основным математическим аппаратом служат дифференциальные преобразования Г.Е. Пухова, вычислительные возможности которых и в настоящее время далеко не исчерпаны. При всех методах получены соответствующие условия однозначной разрешимости задачи. Рассмотрен модельный пример, для которого при использовании численно-аналитических методов получено точное тейлоровское решение. Предложенные численно-аналитические методы могут быть эффективно реализованы средствами современных информационных технологий.

Ключевые слова: однопараметрический транспонированный аналог матричного уравнения типа Сильвестра, редукция, аналитическое решение, дифференциальные преобразования, последовательная и параллельная численные процедуры, непрерывное решение непрерывной задачи, модельный пример.

Введение. Пусть имеется непрерывное матричное уравнение Сильвестра [1, 2]

$$A \cdot X + X \cdot B = C, \quad (1)$$

где A , B , C и X – числовые матрицы одного и того же порядка m , причем X – неизвестная матрица, подлежащая определению. Известно, что уравнения вида (1) достаточно часто встречаются в теории дифференциальных уравнений, теории оптимального управления, теории устойчивости (уравнение Ляпунова) и др. В последнее время особое внимание уделяется так называемому транспонированному аналогу уравнения типа Сильвестра [3, 4]

$$A \cdot X + X^T \cdot B = C, \quad (2)$$

внешне похожему на (1), но глубоко различному по природе. В частности, вопросы однозначной разрешимости таких уравнений рассмотрены в [5], а численные алгоритмы для решения таких уравнений – в [6-8]. Что касается однопараметрических непрерывных матричных уравнений типа Сильвестра

$$A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot B(t) = C(t), \quad (3)$$

то они также мало исследованы, в частности [9].

В настоящей работе рассматриваются методы решения однопараметрических транспонированных аналогов уравнения типа Сильвестра

$$A(t) \cdot X(t) + X^T(t) \cdot B(t) = C(t), \quad (4)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $X(t)$ – однопараметрические матрицы одного и того же порядка m , причем $X(t)$ – неизвестная функциональная матрица, подлежащая определению.

Редукция и аналитическое решение задачи. Допустим, что однопараметрические матрицы $A(t)$ и $B(t)$ невырождены на рассматриваемом интервале параметра t . Тогда, умножив уравнение (4) на $A^{-1}(t)$, получим

$$X(t) = -A^{-1}(t) \cdot X^T(t) \cdot B(t) + A^{-1}(t) \cdot C(t)$$

или

$$X^T(t) = -B^T(t) \cdot X(t) \cdot A^{-T}(t) + C^T(t) \cdot A^{-T}(t). \quad (5)$$

С другой стороны, из (4) имеем

$$X^T(t) = C(t) \cdot B^{-1}(t) - A(t) \cdot X(t) \cdot B^{-1}(t). \quad (6)$$

Сопоставление (5) и (6) приводит к следующему:

$$A(t) \cdot X(t) \cdot B^{-1}(t) - B^T(t) \cdot X(t) \cdot A^{-T}(t) = C(t) \cdot B^{-1}(t) - C^T(t) \cdot A^{-T}(t) = D_1(t)_{m \times m}. \quad (7)$$

Таким образом, после несложных преобразований получаем эквивалентное (4) достаточно сложное матричное уравнение (7), в котором фигурирует только неизвестная матрица $X(t)$ в отличие от (4), где фигурирует не только матрица $X(t)$, но и $X^T(t)$, намного усложняющая решение исходной задачи. Последнее обстоятельство и обуславливает природу уравнения (4), глубоко различную от уравнения (3).

Далее, применив аппарат кронекеровых произведений [2] к линейному по отношению к матрице $X(t)_{m \times m}$ матричному уравнению (7), получим линейную по отношению к $\hat{X}(t)_{m^2 \times 1}$ гиперматрично-гипервекторную систему уравнений

$$[A(t) \otimes B^{-T}(t) - B^T(t) \otimes A^{-1}(t)]_{m^2 \times m^2} \cdot \hat{X}(t)_{m^2 \times 1} = \hat{D}_1(t)_{m^2 \times 1}, \quad (8)$$

откуда аналитическое решение последней при выполнении условия гиперрегулярности

$$\text{rang}[A(t) \otimes B^{-T}(t) - B^T(t) \otimes A^{-1}(t)] = m^2 \quad (9)$$

примет вид

$$\hat{X}(t) = [A(t) \otimes B^{-T}(t) - B^T(t) \otimes A^{-1}(t)]^{-1} \cdot \hat{D}_1(t) = D(t) \cdot \hat{D}_1(t). \quad (10)$$

Замечание 1. Из (10) нетрудно получить условия однозначной разрешимости задачи (4), т.е. одновременное выполнение:

- условия гиперрегулярности (9);
- условия регулярности:

$$\text{rang} A(t) = m \Leftrightarrow \exists A^{-1}(t), \forall t; \quad (11 \text{ б})$$

- условия регулярности:

$$\text{rang} B(t) = m \Leftrightarrow \exists B^{-1}(t), \forall t. \quad (11 \text{ в})$$

Очевидно, что аналитическое решение (10) малоприспособно для практических целей, ибо требует определения функциональных обратных матриц $A^{-1}(t)$, $B^{-1}(t)$ и $[A(t) \otimes B^{-T}(t) - B^T(t) \otimes A^{-1}(t)]^{-1}$. Для этого, конечно, могут быть использованы известные методы, предложенные, в частности, в [10, 11] и основанные на дифференциальных преобразованиях [12]. Однако это достаточно обременительно, особенно для третьей (кронекеровой) матрицы. Поэтому необходимо искать другие пути разрешения проблемы. К одному из таких возможных подходов и перейдем далее.

1. Последовательный численно-аналитический метод решения. Предположим, что матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $X(t)$, а также обратные $A^{-1}(t)$ и $B^{-1}(t)$ в центре аппроксимации $t = t_v$ обладают аналитическими элементами, для которых имеют место дифференциальные преобразования [12]:

$$A(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K A(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \text{и} \quad A(t) = \chi_1(t, t_v, H, A(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (12)$$

$$B(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K B(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \text{и} \quad B(t) = \chi_2(t, t_v, H, B(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (13)$$

$$C(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K C(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \text{и} \quad C(t) = \chi_3(t, t_v, H, C(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (14)$$

$$A^{-1}(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K A^{-1}(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \text{и} \quad A^{-1}(t) = \chi_4(t, t_v, H, A^{-1}(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (15)$$

$$B^{-1}_{\vee}(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K B^{-1}(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, K = \overline{0, \infty} \xrightarrow{\cdot} B^{-1}(t) = \chi_5(t, t_v, H, B^{-1}_{\vee}(K), K = \overline{0, \infty}), (16)$$

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K X(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, K = \overline{0, \infty} \xrightarrow{\cdot} X(t) = \chi_6(t, t_v, H, X(K), K = \overline{0, \infty}). (17)$$

В (12)-(17) матрицы $A(K)$, $B(K)$, $C(K)$, $A^{-1}_{\vee}(K)$, $B^{-1}_{\vee}(K)$ и $X(K)$ – матричные дискреты матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $A^{-1}(t)$, $B^{-1}(t)$ и $X(t)$ соответственно (заметим, что $A^{-1}_{\vee}(K)$ и $B^{-1}_{\vee}(K)$ – матричные дискреты обратных матриц $A^{-1}(t)$ и $B^{-1}(t)$, а не обратные матрицы матричных дискрет $A(K)$ и $B(K)$); $K = \overline{0, \infty}$ – целочисленный аргумент; H – масштабный коэффициент; t_v – центр аппроксимации; символ $\xrightarrow{\cdot}$ – знак перехода из области оригиналов в область дифференциальных изображений и наоборот; $\chi_1(\cdot) - \chi_6(\cdot)$ – некоторые аппроксимирующие функции, восстанавливающие оригиналы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $A^{-1}(t)$, $B^{-1}(t)$ и $X(t)$ соответственно.

Теперь с учетом (12)-(17) гиперматрично-гипервекторную линейную систему (8) из области оригиналов переведем в область дифференциальных изображений. Получим:

при $K=0$:

$$\begin{aligned} [A(0) \otimes B^{-T}_{\vee}(0) - B^T(0) \otimes A^{-1}_{\vee}(0)] \cdot \hat{X}(0) &= D(0, 0) \cdot \hat{X}(0) = \\ &= C(0) \cdot B^{-1}_{\vee}(0) - C^T(0) \cdot A^{-T}_{\vee}(0) = \hat{D}_1(0), \end{aligned} \quad (18)$$

откуда

$$\hat{X}(0) = D^{-1}(0, 0) \cdot \hat{D}_1(0), \quad (19)$$

если, конечно, имеет место условие гиперрегулярности

$$\text{rang } D(0, 0) = m^2; \quad (20)$$

при $K=1$:

$$\begin{aligned} [A(0) \otimes B^{-T}_{\vee}(0) - B^T(0) \otimes A^{-1}_{\vee}(0)] \cdot \hat{X}(1) &+ [A(1) \otimes B^{-T}_{\vee}(0) + A(0) \otimes B^{-T}_{\vee}(1) - \\ - B^T(1) \otimes A^{-1}_{\vee}(0) - B^T(0) \otimes A^{-1}_{\vee}(1)] \cdot \hat{X}(0) &= \\ = D(0, 0) \cdot \hat{X}(1) + D(1, 0; 0, 1) \cdot \hat{X}(0) &= \\ = C(1) \cdot B^{-1}_{\vee}(0) + C(0) \cdot B^{-1}_{\vee}(1) - C^T(1) \cdot A^{-T}_{\vee}(0) - C^T(0) \cdot A^{-T}_{\vee}(1) &= \hat{D}_1(1), \end{aligned} \quad (21)$$

откуда

$$\hat{X}(1) = D^{-1}(0,0) \cdot [\hat{D}_1(1) - D(1,0; 0,1) \cdot \hat{X}(0)]; \quad (22)$$

при K=2:

$$\begin{aligned} & [A(0) \otimes B^{-T}(0) - B^T(0) \otimes A^{-1}(0)] \cdot \hat{X}(2) + [A(1) \otimes B^{-T}(0) + A(0) \otimes B^{-T}(1) - \\ & - B^T(1) \otimes A^{-1}(0) - B^T(0) \otimes A^{-1}(1)] \cdot \hat{X}(1) + \\ & + [A(2) \otimes B^{-T}(0) + A(1) \otimes B^{-T}(1) + A(0) \otimes B^{-T}(2) - B^T(2) \otimes A^{-1}(0) - B^T(1) \otimes A^{-1}(1) - \\ & - B^T(0) \otimes A^{-1}(2)] \cdot \hat{X}(0) = D(0,0) \cdot \hat{X}(2) + D(1,0; 0,1) \cdot \hat{X}(1) + D(2,0; 1,1; 0,2) \cdot \hat{X}(0) = \\ & = C(2) \cdot B^{-1}(0) + C(1) \cdot B^{-1}(1) + C(0) \cdot B^{-1}(2) - C^T(2) \cdot A^{-T}(0) - C^T(1) \cdot A^{-T}(1) - C^T(0) \cdot A^{-T}(2) = \\ & = \hat{D}_1(2), \end{aligned} \quad (23)$$

откуда

$$\hat{X}(2) = D^{-1}(0,0) \cdot [\hat{D}_1(2) - D(1,0; 0,1) \cdot \hat{X}(1) - D(2,0; 1,1; 0,2) \cdot \hat{X}(0)]; \quad (24)$$

...

при K=K:

$$\begin{aligned} & [A(0) \otimes B^{-T}(0) - B^T(0) \otimes A^{-1}(0)] \cdot \hat{X}(K) + [A(1) \otimes B^{-T}(0) + A(0) \otimes B^{-T}(1) - \\ & - B^T(1) \otimes A^{-1}(0) - B^T(0) \otimes A^{-1}(1)] \cdot \hat{X}(K-1) + [A(2) \otimes B^{-T}(0) + A(1) \otimes B^{-T}(1) + \\ & + A(0) \otimes B^{-T}(2) - B^T(2) \otimes A^{-1}(0) - B^T(1) \otimes A^{-1}(1) - B^T(0) \otimes A^{-1}(2)] \cdot \hat{X}(K-2) + \dots \\ & \dots + [A(K-1) \otimes B^{-T}(0) + A(K-2) \otimes B^{-T}(1) + \dots + A(0) \otimes B^{-T}(K-1) - \\ & - B^T(K) \otimes A^{-1}(0) - B^T(K-1) \otimes A^{-1}(1) - \dots - B^T(0) \otimes A^{-1}(K-1)] \cdot \hat{X}(1) + \\ & + [A(K) \otimes B^{-T}(0) + A(K-1) \otimes B^{-T}(1) + \dots + A(0) \otimes B^{-T}(K) - \\ & - B^T(K) \otimes A^{-1}(0) - B^T(K-1) \otimes A^{-1}(1) - \dots - B^T(0) \otimes A^{-1}(K)] \cdot \hat{X}(0) = \\ & = D(0,0) \cdot \hat{X}(K) + D(1,0; 0,1) \cdot \hat{X}(K-1) + D(2,0; 1,1; 0,2) \cdot \hat{X}(K-2) + \dots \\ & + D(K-1,0; K-2,1; \dots; 1, K-2; 0, K-1) \cdot \hat{X}(1) + D(K,0; \dots; 0, K) \cdot \hat{X}(0) = \\ & = \left[\begin{array}{l} C(K) \cdot B^{-1}(0) + C(K-1) \cdot B^{-1}(1) + \dots + C(0) \cdot B^{-1}(K) - \\ - C^T(K) \cdot A^{-T}(0) - C^T(K-1) \cdot A^{-T}(1) - \dots - C(0) \cdot A^{-T}(K) \end{array} \right] = \hat{D}_1(K), \end{aligned} \quad (25)$$

откуда

$$\begin{aligned} \hat{X}(K) &= [A(0) \otimes B^{-T}(0) - B^T(0) \otimes A^{-1}(0)]^{-1} \times \\ &\times \left[\sum_{\ell=0}^K [C(\ell) \cdot B^{-1}(K-\ell) - C^T(\ell) \cdot A^{-T}(K-\ell)] - \right. \\ &\left. - \sum_{\ell=0}^P \sum_{P=1}^K [A(\ell) \otimes B^{-T}(P-\ell) - B^T(\ell) \otimes A^{-1}(P-\ell)] \cdot X(K-P) \right] = \\ &= D^{-1}(0,0) \cdot [\hat{D}_1(K) - D(1,0;0,1) \cdot \hat{X}(K-1) - D(2,0;1,1;0,2) \cdot \hat{X}(K-2) - \dots \\ &\dots - D(K-1,0,K-2,1;\dots;1,K-2;0,K-1) \cdot \hat{X}(1) - D(K,0;\dots;0,K) \cdot \hat{X}(0)]. \end{aligned} \quad (26)$$

Таким образом, имея матричные дискреты (19), (22), (24) и (26), в соответствии с правой частью (17) можно найти решение $X(t)$ исходной задачи (4) или матричного уравнения (7).

Замечание 2. Очевидно, что при использовании последовательного численно-аналитического метода для однозначной разрешимости задачи (4) должны быть одновременно выполнены:

- условие гиперрегулярности (20);
- условия регулярности:

$$\text{rang} A^{-1}(K) = m, \quad \forall K = \overline{0, \infty}, \quad (27 \text{ а})$$

- условия регулярности:

$$\text{rang} B^{-1}(K) = m, \quad \forall K = \overline{0, \infty}. \quad (27 \text{ в})$$

2. Параллельный численно-аналитический метод решения. Объединив соотношения (18), (21), (23) и (25), получим следующее гиперматрично-гипервекторное представление:

$$\begin{bmatrix} D(0,0) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D(1,0;0,1) & D(0,0) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D(2,0;1,1;0,2) & D(1,0;0,1) & D(0,0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & D(2,0;1,1;0,2) & D(1,0;0,1) & D(0,0) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & D(2,0;1,1;0,2) & D(1,0;0,1) & D(0,0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D(K,0,\dots,0,K) & D(K-1,\dots,K-1) & D(K-2,\dots,K-2) & D(K-3,\dots,K-3) & D(K-4,\dots,K-4) & \dots & D(0,0) \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{X}(0) \\ \hat{X}(1) \\ \hat{X}(2) \\ \hat{X}(3) \\ \hat{X}(4) \\ \vdots \\ \hat{X}(K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{D}_1(0) \\ \hat{D}_1(1) \\ \hat{D}_1(2) \\ \hat{D}_1(3) \\ \hat{D}_1(4) \\ \vdots \\ \hat{D}_1(K) \end{pmatrix} \quad (28)$$

$(K+1) \cdot m^2 \times (K+1) \cdot m^2 \quad (K+1) \cdot m^2 \times 1 \quad (K+1) \cdot m^2 \times 1$

или в компактной форме записи:

$$D(\bullet) \cdot \hat{X}(\bullet) = \hat{D}_1(\bullet), \quad (29)$$

откуда

(30)

следует и условие гиперрегулярности

(31)

задачи (28) или (29).

С другой стороны, нетрудно убедиться, что гиперматрица

(32)

где

(33)

(17) можно восстанавливать решение $X(t)$ исходной задачи (4) (или матричного уравнения (7)).

аналитического метода для однозначной разрешимости задачи (4) должны быть одновременно выполнены:

- (34 a)

- (34 6)

- (34 B)

Модельный пример. Пусть задано матричное уравнение вида (4), где

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & (1+t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} (1+t) & (1-t) \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C(t) = \begin{bmatrix} (2+t) & (1+t) \\ t & t \end{bmatrix},$$

и, следовательно, матрицы

$$A^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{t}{1+t} & \frac{1}{1+t} \end{bmatrix}, \quad B^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+t} & \frac{1-t}{1+t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда при $t_v = 1, H=1$ и применении последовательного численно-аналитического метода получим

$$A(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A(K) = [0], \quad \forall K \geq 2;$$

$$A^{-1}(0) = A^{-1}_{\vee}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0,5 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad A^{-1}_{\vee}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,25 & -0,25 \end{bmatrix}, \quad A^{-1}_{\vee}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,125 & 0,125 \end{bmatrix};$$

$$B(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B(1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(K) = [0], \quad \forall K \geq 2;$$

$$B^{-1}(0) = B^{-1}_{\vee}(0) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1}_{\vee}(1) = \begin{bmatrix} -0,25 & -0,5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{-1}_{\vee}(2) = \begin{bmatrix} 0,125 & 0,25 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C(0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C(K) = [0], \quad \forall K \geq 2,$$

а также

$$D(0,0) = \left[\begin{array}{cc|cc} -1,5 & 0 & \mathbf{0} & \\ 1 & -2 & & \\ \hline 0,5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -0,5 & -1,5 \end{array} \right], \quad D^{-1}(0,0) = \left[\begin{array}{cc|cc} -2/3 & 0 & \mathbf{0} & \\ -1/3 & -1/2 & & \\ \hline 1/6 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & -1/6 & -2/3 \end{array} \right],$$

$$\hat{D}_1(0) = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -1 \\ -1,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}, \quad \hat{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$D(1,0; 0,1) = \left[\begin{array}{cc|cc} -1,25 & 0 & \mathbf{0} & \\ 0,5 & 0 & & \\ \hline 1,25 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -0,5 & -1,25 & -1,25 \end{array} \right], \quad \hat{D}_1(1) = \begin{pmatrix} -1,25 \\ -1,5 \\ -0,75 \\ -0,75 \end{pmatrix}, \quad \hat{X}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D(2,0; 1,1; 0,2) = \left[\begin{array}{cc|cc} 0,125 & 0 & & \\ 0,25 & 0 & & \\ \hline -0,125 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & -0,25 & 0,125 & 0,125 \end{array} \right], \quad \hat{D}_1(2) = \begin{pmatrix} 0,125 \\ 0,25 \\ \cdots \\ -0,125 \\ -0,125 \end{pmatrix},$$

$$\hat{X}(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\hat{X}(K) = (0), \quad \forall K \geq 2.$$

При применении параллельного численно-аналитического метода имеем

$$D_0 = \left[\begin{array}{cc|cc} -2/3 & 0 & & \\ -1/3 & -1/2 & & \\ \hline 1/6 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & -1/6 & -2/3 \end{array} \right], \quad D_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} 5/9 & 0 & & \\ 1/9 & 0 & & \\ \hline 5/18 & 0 & 0 & 0 \\ 1/9 & -1/9 & -5/18 & 5/9 \end{array} \right],$$

$$D_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} -14/27 & 0 & & \\ -11/54 & 0 & & \\ \hline 7/27 & 0 & 0 & 0 \\ -11/54 & 11/54 & 7/27 & -14/27 \end{array} \right], \quad \hat{X}(0) = D_0 \cdot \hat{D}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{X}(1) = D_1 \cdot \hat{D}_1(0) + D_0 \cdot \hat{D}_1(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{X}(2) = D_2 \cdot \hat{D}_1(0) + D_1 \cdot \hat{D}_1(1) + D_0 \cdot \hat{D}_1(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{X}(K) = [0], \quad \forall K \geq 2.$$

Таким образом, в обоих случаях при использовании обратных дифференциально-тейлоровских преобразований решение задачи будет иметь вид

$$X(t) = X(0) + X(t) \cdot (t-1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot (t-1) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix},$$

в абсолютной точности которого легко убедиться подстановкой его в исходное матричное уравнение.

Замечание 4. При рассмотренном простом модельном примере с целью демонстрации вычислительных характеристик предложенных методов нами были использованы точные аналитические соотношения $A^{-1}(t)$ и $B^{-1}(t)$ и их матричные дискреты $A^{-1}_{\Delta}(K)$ и $B^{-1}_{\Delta}(K)$, $\forall K = \overline{0, \infty}$.

Однако, как было отмечено выше, определение и дальнейшее использование таких матриц на практике связано с большими вычислительными трудностями, и поэтому приходится оперировать их аппроксимированными (приближенными) представлениями с вытекающими отсюда дальнейшими последствиями.

Заключение. Таким образом, в настоящей работе для решения однопараметрических транспонированных аналогов матричных уравнений типа Сильвестра предложены аналитический, а также приближенные последовательный и параллельный численно-аналитические методы, основанные на дифференциальных преобразованиях. Последние позволяют решение исходной непрерывной задачи сначала свести к некоторым рекуррентным численным процедурам, эффективно реализуемым средствами современных информационных технологий [13], а восстановление непрерывного решения $X(t)$ осуществлять сравнительно легко, на основе некоторого обратного дифференциального преобразования (17).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. - М.: Наука, 2010. – 560 с.
2. **Икрамов Х.Д.** Численное решение матричных уравнений. - М.: Наука, 1984. – 190 с.
3. **Piao F.X., Zhang Q.L., Wang Z.F.** The solution to matrix equation $A \cdot X + X^T \cdot C = B$ // Journal of the Franklin Institute. - 2007. - 344. – P. 1056-1062.
4. **Fernando De Terán, Froilán M. Dopico.** The solution of the equation $X \cdot A + A \cdot X^T = 0$ and its application to the theory of orbits // Linear Algebra and its Application. – 2011. - 434. – P. 44-67.
5. **Икрамов Х.Д., Воронцов Ю.О.** Об однозначной разрешимости матричного уравнения $A \cdot X + X^T \cdot B = C$ в сингулярном случае // Доклады РАН. - 2011. - Т.438, № 5. – С. 599-602.
6. **Воронцов Ю.О., Икрамов Х.Д.** Численный алгоритм для решения матричного уравнения $A \cdot X + X^T \cdot B = C$ // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2011. - Т.51, № 5. – С. 739-747.
7. **Воронцов Ю.О., Икрамов Х.Д.** О численном решении матричных уравнений $A \cdot X + X^T \cdot B = C$ и $X + A \cdot X^T \cdot B = C$ с прямоугольными коэффициентами A и B // Записки научных семинаров ПОМИ. - 2012. - Т. 405. – С. 54-58.

8. **Воронцов Ю.О., Икрамов Х.Д.** Численное решение матричных уравнений $A \cdot X + X^T \cdot B = C$ и $A \cdot X + X^* \cdot B = C$ в самосопряженном случае // ЖВМ и М. - 2014. - Т.54, № 2. - С. 179-182.
9. **Симонян С.О., Адамян Г.В., Симонян А.С., Паповян Р.А.** Методы решения линейных однопараметрических матричных непрерывных уравнений типа $A^T(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot A(t) = C(t)$ // Вестник ИАА. – 2015. - Т.12, № 2. - С. 216-224.
10. **Бадалян Л.А.** Разработка методов определения псевдообратных нестационарных матриц и автоматизация вычислительных процедур: Автореф. дис. ... к.т.н. – Ереван, 2007. – 21 с.
11. **Симонян А.С.** Разработка численно-аналитических методов определения параметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза и автоматизация вычислительных процедур: Автореф. дис. ... к.т.н. – Ереван, 2013. – 24 с.
12. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Киев: Наукова думка, 1984. – 420 с.
13. **Strastrup B.** The C++ Programming Language. 4th edition. - Boston: Addison-Wesley Professional, 2013. - 1368 p.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 02.11.2015.

Ս.Հ. ՄԻՄՈՆՅԱՆ

ՄԻԼՎԵՍՏՐԻ ՏԻՊԻ $A(t) \cdot X(t) + X^T(t) \cdot B(t) = C(t)$ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՏՐԱՆՍՊՈՆԱՑԿԱԾ ՆՄԱՆԱԿՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Դիտարկվում են Միլվեստրի տիպի միապարամետրական մատրիցային հավասարումների տրանսպոնացված նմանակները, որոնց լուծման եղանակներն առայժմ բավարար չափով մշակված չեն: Առաջարկվում են հիմնախնդրի լուծման անալիտիկ, ինչպես նաև մոտավոր հաջորդական և գուգահեռ թվա-անալիտիկ եղանակներ, որոնք որոշակիորեն լրացնում են գոյություն ունեցող բացը: Թվա-անալիտիկ մեթոդների համար որպես հիմնական մաթեմատիկական ապարատ են ծառայում Գ.Ե. Պուխովի դիֆերենցիալ ձևափոխությունները, որոնց հաշվողական հնարավորությունները դեռևս շատ հեռու են սպառված լինելուց: Բոլոր եղանակների դեպքերում էլ ստացվել են խնդրի միարժեքորեն լուծելիության համապատասխան պայմանները: Դիտարկվել է մոդելային օրինակ, որի համար թվա-անալիտիկ եղանակների օգտագործմամբ ստացվել է ճշգրիտ թեյլորյան լուծումը: Առաջարկված թվա-անալիտիկ մեթոդները կարող են արդյունավետորեն իրագործվել տեղեկատվական տեխնոլոգիաների ժամանակակից միջոցներով:

Առանցքային բառեր. Միլվեստրի տիպի միապարամետրական մատրիցային հավասարման տրանսպոնացված նմանակ, ռեդուկցիա, անալիտիկ լուծում, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, հաջորդական և գուգահեռ թվային ընթացակարգեր, անընդհատ խնդրի անընդհատ լուծում, մոդելային օրինակ:

S.H. SIMONYAN

**SOLUTION OF THE $A(t) \cdot X(t) + X^T(t) \cdot B(t) = C(t)$ SYLVESTER TYPE
ONE-PARAMETRIC TRANSPOSED ANALOGUES OF MATRIX
EQUATIONS**

The transposed analogues of Sylvester type one-parametric matrix equations are examined whose methods of solution are not yet sufficiently developed. The analytical, as well as the sequential and parallel numerical-analytical methods for solving the problem are proposed which definitely fill up the existing gap. For numerical-analytical methods G.E. Pukhov's differential transformations are used as a basic mathematical apparatus, whose computational powers are yet far from being exhausted even at present. A model example for which, at using the numerical-analytical methods, the accurate Taylor solution is obtained. The proposed numerical-analytical methods can be productively implemented by means of contemporary IT means.

Keywords: Sylvester type one-parametric transposed analogue of a matrix equation, contraction, analytical solution, differential transformations, sequential and parallel numeric procedures, continuous solution of the continuous problem, a model example.