ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и НПУА. Сер. ТН. 2015. Т. LXVIII, N4.

УДК 621.52+511.52

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

С.О. СИМОНЯН

ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЧНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СИЛЬВЕСТРА $\mathbf{A(t)\cdot X(t)+X(t)\cdot B(t)=C(t)}$

Рассматриваются три декомпозиционных метода определения решений однопараметрических матричных уравнений типа Сильвестра – декомпозиционные прямой аналитический, последовательный и параллельный численно-аналитические методы. Первый из них пригоден для простых задач с малыми размерами, второй и третий - для любых задач с аналитическими элементами. В последних двух методах основным математическим аппаратом служат дифференциальные преобразования, при которых решение исходных непрерывных задач сводится к решению ряда рекуррентных числовых задач, что дает возможность широко использовать средства современных информационных технологий. Рассмотрен модельный пример, иллюстрирующий вычислительную эффективность предложенных декомпозиционных последовательного и параллельного численно-аналитических методов.

Ключевые слова: однопараметрическое матричное непрерывное уравнение типа Сильвестра, кронекерово произведение, декомпозиционное аналитическое решение, дифференциальные преобразования, рекуррентные вычислительные процедуры, последовательный и параллельный численно-аналитические методы, модельный пример.

Введение. В теории матриц [1-4] и ее различных практических приложениях [5-7 и др.] часто встречаются числовые неявные уравнения Сильвестра, методы решения которых хорошо известны. Что касается методов решения однопараметрических матричных уравнений, то они недостаточно освещены в специальной литературе. В настоящей работе предлагаются декомпозиционные методы для решения однопараметрических матричных уравнений типа Сильвестра, основанных на дифференциальных преобразованиях Г.Е. Пухова [8].

Математический аппарат. Рассмотрим однопараметрическое матричное непрерывное уравнение типа Сильвестра:

$$A(t)\cdot X(t)+X(t)\cdot B(t)=C(t)\,. \tag{1}$$

Допустим также, что

$$A(t)_{m\times m}=M(t)_{m\times m}+j\cdot N(t)_{m\times m}, \tag{2}$$

$$B(t)_{n\times n}=P(t)_{n\times n}+j\cdot Q(t)_{n\times n}, \tag{3}$$

$$C(t)_{m\times n} = R(t)_{m\times n} + j\cdot S(t)_{m\times n}, \tag{4}$$

а неизвестная, подлежащая определению матрица -

$$X(t)_{m\times n} = G(t)_{m\times n} + j\cdot H(t)_{m\times n}. \tag{5}$$

1. Прямой аналитический метод решения. Нетрудно убедиться, что с учетом (2)-(5) из матричного уравнения (1) получим следующую систему матричных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} (M(t)\cdot G(t)+G(t)\cdot P(t)-(N(t)\cdot H(t)+H(t)\cdot Q(t))=R(t), \\ (N(t)\cdot G(t)+G(t)\cdot Q(t)+(M(t)\cdot H(t)+H(t)\cdot P(t))=S(t). \end{cases} \tag{6}$$

Эту систему можно представить и в виде

$$\begin{cases} (M(t)\cdot G(t)\cdot E_{n\times n}+E_{m\times m}\cdot G(t)\cdot P(t))-(N(t)\cdot H(t)\cdot E_{n\times n}+E_{m\times m}\cdot H(t)\cdot Q(t))=R(t), \\ (N(t)\cdot G(t)\cdot E_{n\times n}+E_{m\times m}\cdot G(t)\cdot Q(t))+(M(t)\cdot H(t)\cdot E_{n\times n}+E_{m\times m}\cdot H(t)\cdot P(t))=S(t), \end{cases} \tag{7}$$

где $E_{n\times n}$ и $E_{m\times m}$ - единичные матрицы порядка *n* и *m* соответственно.

Далее при использовании известной трансформации [3, 4] с кронекеровыми произведениями $\otimes$ из (7) имеем следующее гиперматрично-гипервекторное представление:

$$\left[\begin{array}{c|c} (M(t)\otimes E^T_{n\times n}+E_{m\times m}\otimes P^T(t) & -(N(t)\otimes E^T_{n\times n}+E_{m\times m}\otimes Q^T(t) \\ \hline (N(t)\otimes E^T_{n\times n}+E_{m\times m}\otimes Q^T(t) & (M(t)\otimes E^T_{n\times n}+E_{m\times m}\otimes P^T(t) \end{array}\right]\cdot\begin{pmatrix}\hat{G}(t)\\ \hdashline \hat{H}(t)\end{pmatrix}=$$
$$=\left[\begin{array}{c|c} J_{11}(t) & J_{12}(t) \\ \hline J_{21}(t) & J_{22}(t)\end{array}\right]_{2mn\times 2mn}\cdot\begin{pmatrix}\hat{G}(t)\\ \hdashline \hat{H}(t)\end{pmatrix}_{2mn\times 1}=J(t)\cdot\begin{pmatrix}\hat{G}(t)\\ \hdashline \hat{H}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{R}(t)\\ \hdashline \hat{S}(t)\end{pmatrix}_{2mn\times 1}, \tag{8}$$

где гипервекторы

$$\begin{cases} \hat{G}(t)_{mn\times 1}=\left(g_{11}(t),\ldots,g_{1n}(t)\vdots g_{21}(t),\ldots,g_{2n}(t)\vdots\cdots\vdots g_{m1}(t),\ldots,g_{mn}(t)\right)^T=\left(g_1(t)\vdots g_2(t)\vdots\ldots\vdots g_m(t)\right)^T, \\ \hat{H}(t)_{mn\times 1}=\left(h_{11}(t),\ldots,h_{1n}(t)\vdots h_{21}(t),\ldots,h_{2n}(t)\vdots\cdots\vdots h_{m1}(t),\ldots,h_{mn}(t)\right)^T=\left(h_1(t)\vdots h_2(t)\vdots\ldots\vdots h_m(t)\right)^T, \\ \hat{R}(t)_{mn\times 1}=\left(r_{11}(t),\ldots,r_{1n}(t)\vdots h_{21}(t),\ldots,h_{2n}(t)\vdots\cdots\vdots r_{m1}(t),\ldots,r_{mn}(t)\right)^T=\left(r_1(t)\vdots r_2(t)\vdots\ldots\vdots r_m(t)\right)^T, \\ \hat{S}(t)_{mn\times 1}=\left(S_{11}(t),\ldots,S_{1n}(t)\vdots S_{21}(t),\ldots,S_{2n}(t)\vdots\cdots\vdots S_{m1}(t),\ldots,S_{mn}(t)\right)^T=\left(S_1(t)\vdots S_2(t)\vdots\ldots\vdots S_m(t)\right)^T, \end{cases}$$

а $g_i(t), h_i(t),\ z_i(t)$ и $s_i(t),\ \ i=\overline{1,m}$ - i-е строки матриц *G(t), H(t), R(t)* и *S(t)* соответственно.

Тогда, предполагая, что

$$rangJ(t)=2mn, \tag{9}$$

для неизвестных гипервекторов $\hat{G}(t)$ и $\hat{H}(t)$ из (8) с учетом (9) будем иметь

$$\left(\frac{\hat{G}(t)}{\hat{H}(t)}\right) = J^{-1}(t)\cdot\left(\frac{\hat{R}(t)}{\hat{S}(t)}\right). \qquad (10)$$

Аналитическое решение (10), естественно, практически малопригодно для решения конкретных задач ввиду функциональности элементов – сомножителей, входящих в него. Поэтому сталкиваемся с необходимостью поиска более эффективных альтернативных путей разрешения этой проблемы. К счастью, оказывается, что этому во многом удовлетворяют дифференциальные преобразования, позволяющие от сложных аналитических решений достаточно широкого класса задач перейти к сравнительно простым и легко реализуемым численно-аналитическим решениям [9]. К таким решениям рассматриваемой задачи и перейдем далее.

2. Последовательный численно-аналитический метод решения. Допустим, что для матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $X(t)$ с аналитическими элементами имеют место дифференциальные преобразования

$$A(K) = \frac{H^k}{K!}\cdot\frac{dA^k(t)}{dt^k}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty} \;\risingdotseq\; A(t)=\chi_1(t,t_\nu,H,A(K),\ K=\overline{0,\infty}), \qquad (11)$$

$$B(K) = \frac{H^k}{K!}\cdot\frac{dB^k(t)}{dt^k}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty} \;\risingdotseq\; B(t)=\chi_2(t,t_\nu,H,B(K),\ K=\overline{0,\infty}), \qquad (12)$$

$$C(K) = \frac{H^k}{K!}\cdot\frac{dC^k(t)}{dt^k}\Big|_{t=t_\nu},\quad K=\overline{0,\infty} \;\risingdotseq\; C(t)=\chi_3(t,t_\nu,H,B(K),\ K=\overline{0,\infty}), \qquad (13)$$

$$X(K) = \frac{H^k}{K!}\cdot\frac{dX^k(t)}{dt^k}\Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty} \;\risingdotseq\; X(t)=\chi_4(t,t_\nu,H,X(K),\ K=\overline{0,\infty}), \qquad (14)$$

где $A(K)$, $B(K)$, $C(K)$ и $X(K)$ - матричные дискреты матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $X(t)$ соответственно; $K=\overline{0,\infty}$ – целочисленный аргумент; H – масштабный коэффициент; t_ν – центр аппроксимации; символ $\risingdotseq$ – знак перехода из области оригиналов в область дифференциальных изображений и наоборот; $\chi_1(\cdot)-\chi_4(\cdot)$ – некоторые аппроксимирующие функции, восстанавливающие оригиналы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $X(t)$ соответственно.

При условиях (11)-(14), естественно, имеют место и следующие дифференциальные преобразования для матриц $M(t)$, $N(t)$, $P(t)$ и $Q(t)$, а также для матриц $R(t)$, $S(t)$, $G(t)$ и $H(t)$:

$$M(K)=\frac{H^k}{K!}\cdot\frac{dM^k(t)}{dt^k}\Big|_{t=t_\nu},\ \ K=\overline{0,\infty}\ \doteq\ M(t)=\chi_5(t,t_\nu,H,M_l(K),K=\overline{0,\infty}),\quad (15)$$

$$N(K)=\frac{H^k}{K!}\cdot\frac{dN_l^k(t)}{dt^k}\Big|_{t=t_\nu},\ \ K=\overline{0,\infty}\ \doteq\ N(t)=\chi_6(t,t_\nu,H,N_l(K),K=\overline{0,\infty}),\quad (16)$$

$$P(K)=\frac{H^k}{K!}\cdot\frac{dP_l^k(t)}{dt^k}\Big|_{t=t_\nu},\ \ K=\overline{0,\infty}\ \doteq\ P_l(t)=\chi_7(t,t_\nu,H,P_l(K),K=\overline{0,\infty}),\quad (17)$$

$$Q(K)=\frac{H^k}{K!}\cdot\frac{dQ_l^k(t)}{dt^k}\Big|_{t=t_\nu},\ \ K=\overline{0,\infty}\ \doteq\ Q(t)=\chi_8(t,t_\nu,H,Q_l(K),K=\overline{0,\infty}),\quad (18)$$

$$R(K)=\frac{H^k}{K!}\cdot\frac{dR^k(t)}{dt^k}\Big|_{t=t_\nu},\ \ K=\overline{0,\infty}\ \doteq\ R(t)=\chi_9(t,t_\nu,H,R(K),K=\overline{0,\infty}),\quad (19)$$

$$S(K)=\frac{H^k}{K!}\cdot\frac{dS^k(t)}{dt^k}\Big|_{t=t_\nu},\ \ K=\overline{0,\infty}\ \doteq\ S(t)=\chi_{10}(t,t_\nu,H,S(K),K=\overline{0,\infty}),\quad (20)$$

$$G(K)=\frac{H^k}{K!}\cdot\frac{dG^k(t)}{dt^k}\Big|_{t=t_\nu},\ \ K=\overline{0,\infty}\ \doteq\ G(t)=\chi_{11}(t,t_\nu,H,G(K),K=\overline{0,\infty}),\quad (21)$$

$$H(K)=\frac{H^k}{K!}\cdot\frac{dH^k(t)}{dt^k}\Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}\ \doteq\ H(t)=\chi_{12}(t,t_\nu,H,H(K),K=\overline{0,\infty}),\quad (22)$$

где $M(K)$, $N(K)$, $P(K)$, $Q(K)$, $K=\overline{0,\infty}$ - матричные дискреты матриц $M(t)$, $N(t)$, $P(t)$, $Q(t)$ соответственно; $R(K)$, $S(K)$, $G(K)$, $H(K)$, $K=\overline{0,\infty}$ - матричные дискреты матриц $P(t)$, $S(t)$, $G(t)$, $H(t)$ соответственно; $\chi_5(\bullet)\div\chi_{12}(\bullet)$ - некоторые аппроксимирующие функции, восстанавливающие оригиналы $M(t)$, $N(t)$, $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$, $S(t)$, $G(t)$, $H(t)$ соответственно.

Теперь с учетом (15)-(22) гиперматрично-гипервекторное соотношение (8) из области оригиналов переведем в область дифференциальных изображений, имея в виду, что для единичных матриц любого порядка дифференциальные изображения будут

$$E(K)=E\cdot\text{Ъ}(K)=\begin{cases}E, & \text{ибо Ъ}(0)=1,\text{если }K=0,\\ [0],, & \text{ибо Ъ}(K)=0,\text{если }K\geq 0,\end{cases}\quad (23)$$

где $\text{Ъ}(K)$ – тейлоровская единица [8]. Следовательно, получим:

при к=0:

$$\left[\begin{array}{c|c}(M(0)\otimes E_{n\times n}(0)^T+E_{m\times m}(0)\otimes P^T(0) & -(N(0)\otimes E_{n\times n}(0)^T+E_{m\times m}(0)\otimes Q^T(0)\\ \hline (N(0)\otimes E_{n\times n}(0)^T+E_{m\times m}(0)\otimes Q^T(0)) & (M(0)\otimes E_{n\times n}(0)^T+E_{m\times m}(0)\otimes P^T(0)\end{array}\right]\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\hat G(0)\\ \hdashline \hat H(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat R(0)\\ \hdashline \hat S(0)\end{pmatrix},$$

или

$$\left[\begin{array}{c|c}J_{11}(0,0) & J_{12}(0,0)\\ \hline J_{21}(0,0) & J_{22}(0,0)\end{array}\right]\cdot\begin{pmatrix}\hat G(0)\\ \hdashline \hat H(0)\end{pmatrix}=J(0,0)\cdot\begin{pmatrix}\hat G(0)\\ \hdashline \hat H(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat R(0)\\ \hdashline \hat S(0)\end{pmatrix}, \qquad (24)$$

откуда

$$\begin{pmatrix}\hat G(0)\\ \hdashline \hat H(0)\end{pmatrix}=J^{-1}(0,0)\cdot\begin{pmatrix}\hat R(0)\\ \hdashline \hat S(0)\end{pmatrix}, \qquad (25)$$

если, конечно, имеет место условие

$$rang\,J(0,0)=2mn, \qquad (26)$$

причем

$$\begin{cases}J_{11}(0,0)=J_{22}(0,0)=M(0)\otimes E^T_{n\times n}+E_{m\times m}\otimes P^T(0),\\ J_{21}(0,0)=-J_{12}(0,0)=N(0)\otimes E^T_{n\times n}+E_{m\times m}\otimes Q^T(0);\end{cases} \qquad (27)$$

при к=1:

$$\left[\begin{array}{l|l}(M(1)\otimes E^T_{n\times n}(0)+M(0)\otimes \cancelto{0}{E^T(1)_{n\times n}}+ & -(N(1)\otimes E^T_{n\times n}(0)+N(0)\otimes \cancelto{0}{E^T(1)_{n\times n}}+\\ +\cancelto{0}{E(1)_{m\times m}}\otimes P^T(0)+E(0)_{m\times m}\otimes P^T(1) & +\cancelto{0}{E(1)_{m\times m}}\otimes Q^T(0)+E(0)_{m\times m}\otimes Q^T(1))\\ \hline (N(1)\otimes E^T_{n\times n}(0)+N(0)\otimes \cancelto{0}{E^T(1)_{n\times n}}+ & (M(1)\otimes E^T_{n\times n}(0)+M(0)\otimes \cancelto{0}{E^T(1)_{m\times n}}+\\ +\cancelto{0}{E(1)_{m\times m}}\otimes Q^T(0)+E(0)_{m\times m}\otimes Q^T(1)) & +\cancelto{0}{E(1)_{m\times m}}\otimes P^T(0)+E(0)_{m\times m}\otimes P^T(1))\end{array}\right]\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\hat G(0)\\ \hdashline \hat H(0)\end{pmatrix}+J(0,0)\cdot\begin{pmatrix}\hat G(1)\\ \hdashline \hat H(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat R(1)\\ \hdashline \hat S(1)\end{pmatrix},$$

или

$$\left[\begin{array}{c|c}J_{11}(1,0;0,1) & J_{12}(1,0;0,1)\\ \hline J_{21}(1,0;0,1) & J_{22}(1,0;0,1)\end{array}\right]\cdot\begin{pmatrix}\hat G(0)\\ \hdashline \hat H(0)\end{pmatrix}+J(0,0)\cdot\begin{pmatrix}\hat G(1)\\ \hdashline \hat H(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat R(1)\\ \hdashline \hat S(1)\end{pmatrix}, \qquad (28)$$

откуда с учетом (26):

$$\frac{\hat{G}(1)}{\hat{H}(1)} = J^{-1}(0,0)\cdot\left[\left(\frac{\hat{R}(1)}{\hat{S}(1)}\right) - J(1,0;0,1)\cdot\left(\frac{\hat{G}(1)}{\hat{H}(0)}\right)\right], \tag{29}$$

причем

$$\begin{cases} J_{11}(1,0;0,1) = J_{22}(1,0;0,1) = M(1)\otimes E^T_{nxn} + E_{mxm}\otimes P^T(1), \\ J_{21}(1,0;0,1) = -J_{12}(1,0;0,1) = N(1)\otimes E^T_{nxn} + E_{mxm}\otimes Q^T(1); \end{cases} \tag{30}$$

<u>при к=2</u> (не вдаваясь в подробности):

$$\left[\begin{array}{c|c} J_{11}(2,0;0,2) & J_{12}(2,0;0,2) \\ \hline J_{21}(2,0;0,2) & J_{22}(2,0;0,2) \end{array}\right]\cdot\left(\frac{\hat{G}(0)}{\hat{H}(0)}\right) + J(1,0;0,1)\cdot\left(\frac{\hat{G}(1)}{\hat{H}(1)}\right) + J(0;0)\cdot\left(\frac{\hat{G}(2)}{\hat{H}(2)}\right) = \left(\frac{\hat{R}(2)}{\hat{S}(2)}\right)$$

или

$$J(2,0;0,2)\cdot\left(\frac{\hat{G}(0)}{\hat{H}(0)}\right) + J(1,0;0,1)\cdot\left(\frac{\hat{G}(1)}{\hat{H}(1)}\right) + J(0;0)\cdot\left(\frac{\hat{G}(2)}{\hat{H}(2)}\right) = \left(\frac{\hat{R}(2)}{\hat{S}(2)}\right), \tag{31}$$

откуда с учетом (26):

$$\left(\frac{\hat{G}(2)}{\hat{H}(2)}\right) = J^{-1}(0;0)\cdot\left[\left(\frac{\hat{R}(2)}{\hat{S}(2)}\right) - J(2,0;0,2)\cdot\left(\frac{\hat{G}(0)}{\hat{H}(0)}\right) - J(1,0;0,1)\cdot\left(\frac{\hat{G}(1)}{\hat{H}(1)}\right)\right], \tag{32}$$

причем

$$\begin{cases} J_{11}(2,0;0,2) = J_{22}(2,0;0,2) = M(2)\otimes E^T_{nxn} + E_{mxm}\otimes P^T(2), \\ J_{21}(2,0;0,2) = -J_{12}(2,0;0,2) = N(2)\otimes E^T_{nxn} + E_{mxm}\otimes Q^T(2), \end{cases} \tag{33}$$

<u>при к = K</u> (тоже не вдаваясь в подробности):

$$\begin{aligned} &J(K,0;0,K)\cdot\left(\frac{\hat{G}(0)}{\hat{H}(0)}\right) + J(K-1,0;0,K-1)\cdot\left(\frac{\hat{G}(1)}{\hat{H}(1)}\right) + \cdots + \\ &+ J(1,0;0,1)\cdot\left(\frac{\hat{G}(K-1)}{\hat{H}(K-1)}\right) + J(0,0)\cdot\left(\frac{\hat{G}(K)}{\hat{H}(K)}\right) = \left(\frac{\hat{R}(K)}{\hat{S}(K)}\right), \end{aligned} \tag{34}$$

откуда с учетом (26):

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\hat{G}(K)}{\hat{H}(K)}\right) = J^{-1}(0,0)\times \\ &\times\left[\left(\frac{\hat{R}(K)}{\hat{S}(K)}\right) - \sum_{l=1}^{K}\left[\begin{array}{c|c} (M(l)\otimes E^T_{nxn} + E_{mxm}\otimes P^T(l)) & -(N(l)\otimes E^T_{nxn} + E_{mxm}\otimes Q^T(l)) \\ (N(l)\otimes E^T_{nxn} + E_{mxm}\otimes Q^T(l)) & (M(l)\otimes E^T_{nxn} + E_{mxm}\otimes P^T(l)) \end{array}\right]\left(\frac{\hat{G}(K-l)}{\hat{H}(K-l)}\right)\right], \end{aligned} \tag{35}$$

причем

$$\begin{cases} J_{11}(l,0;0,l) = J_{22}(l,0;0,l) = M(l)\otimes E^T_{nxn} + E_{mxm}\otimes P^T(l), \\ J_{21}(l,0;0,l) = -J_{12}(l,0;0,l) = N(l)\otimes E^T_{nxn} + E_{mxm}\otimes Q^T(l), \end{cases} \quad l=\overline{1,K}. \tag{36}$$

3. Параллельный численно-аналитический метод решения. Объединив соотношения (24), (28), (31) и (34), получим гиперматрично-гипервекторное представление

$$\begin{bmatrix} J(0,0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline J(1,0;0,1) & J(0,0) & 0 & \dots & 0 \\ \hline J(2,0;02) & J(1,0;0,1) & J(0,0) & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline J(K,0;0,K) & J(K-1,0;0,K-1) & \dots & \dots & J(0,0) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{G}(0) \\ \hat{H}(0) \\ \hline \hat{G}(1) \\ \hat{H}(1) \\ \hline \hat{G}(2) \\ \hat{H}(2) \\ \hline \vdots \\ \hline \hat{G}(K) \\ \hat{H}(K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{R}(0) \\ \hat{S}(0) \\ \hline \hat{R}(1) \\ \hat{S}(1) \\ \hline \hat{R}(2) \\ \hat{S}(2) \\ \hline \vdots \\ \hline \hat{R}(K) \\ \hat{S}(K) \end{pmatrix} \tag{37}$$

$$2(K+1)mn\times 2(K+1)mn \qquad 2(K+1)mn\times 1 \qquad 2(K+1)mn\times 1,$$

или в компактной записи:

$$J(\bullet)\begin{pmatrix} \hat{G}(\bullet) \\ \hat{H}(\bullet) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{R}(\bullet) \\ \hat{S}(\bullet) \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Предполагая, что

$$rang\, J(\bullet) = 2(K+1)mn \Leftrightarrow rang\, J(0,0) = 2mn, \tag{39}$$

и используя результаты, полученные в [9], из (37), (38), будем иметь

$$\begin{pmatrix} \hat{G}(0) \\ \hat{H}(0) \\ \hline \hat{G}(1) \\ \hat{H}(1) \\ \hline \hat{G}(2) \\ H(2) \\ \hline \vdots \\ \hline \hat{G}(K) \\ \hat{H}(K) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline J_1 & J_0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline J_2 & J_1 & J_0 & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \hline J_K & J_{k-1} & J_{k-2} & \dots & J_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{R}(0) \\ \hat{S}(0) \\ \hline \hat{R}(1) \\ \hat{S}(1) \\ \hline \hat{R}(2) \\ \hat{S}(2) \\ \hline \vdots \\ \hline \hat{R}(K) \\ \hat{S}(K) \end{pmatrix}, \tag{40}$$

$$2(K+1)mn\times 1 \qquad 2(K+1)mn\times 2(K+1)mn \qquad 2(K+1)mn\times 1,$$

где

$$\begin{cases} J_0 = J^{-1}(0,0) = J^{-1}(0,0)\cdot E = J^{-1}(0,0)\cdot \bar{J}_0, \\ J_1 = -J^{-1}(0,0)\cdot[J(1,0;0,1)\cdot J^{-1}(0,0)] = J^{-1}(0,0)\cdot \bar{J}_1, \\ J_2 = -J^{-1}(0,0)\cdot[J(1,0;0,1)\cdot J^{-1}(0,0)\cdot J(1,0;0,1)\cdot J^{-1}(0,0) - \\ - J(2,0;0,2)\cdot J^{-1}(0,0)] = J^{-1}(0,0)\cdot \bar{J}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ J_K = -J^{-1}(0,0)\cdot \sum_{r=1}^{K} J(r,0;0,r)\cdot J_{k-r} = J^{-1}(0,0)\cdot \bar{J}_k. \end{cases} \tag{41}$$

Далее, имея гипервекторы дискрет $\begin{pmatrix} \hat{G}(r) \\ \hat{H}(r) \end{pmatrix}$, $r=\overline{0,K}$, в соответствии с (5) можно восстановить решение исходной задачи.

Вопросы нахождения решения при невыполнении условия (26) подробно рассмотрены в работе [9].

Модельный пример. Пусть имеется матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} (1+jt) & 0 \\ t & (1-jt) \end{bmatrix}\cdot X(t) + X(t)\cdot \begin{bmatrix} (-1-jt) & -1 \\ -t & (-1+jt) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t^2 & (-1-j+2jt^2) \\ (jt-t^2) & t^2 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим решение этого примера последовательным численно-аналитическим методом.

Очевидно, при $t_\nu = 1,\ H=1$ имеем следующие тейлоровские матричные дискреты:

<u>при K=0:</u>

$$M(0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ M(1)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ M(K)=[0],\ \forall_K \ge 2;$$

$$N(0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ N(1)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ N(K)=[0],\ \forall_K \ge 2;$$

$$P(0)=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\ P(1)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ P(K)=[0],\ \forall_K \ge 2;$$

$$Q(0)=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ Q(1)=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ Q(K)=[0],\ \forall_K \ge 2;$$

$$R(0)=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix},\ R(1)=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ -2 & 2\end{bmatrix},\ R(2)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix},\ R(K)=[0],\ \forall_K \geq 3;$$

$$S(0)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ S(1)=\begin{bmatrix}0 & 4\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ S(2)=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ S(K)=[0],\ \forall_K \geq 3.$$

Следовательно,

$$J_{11}(0,0)=J_{22}(0,0)=M(0)\otimes E^T+E\otimes P^T(0)=\left[\begin{array}{c|c}\begin{matrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{matrix} & \mathbf{0}\\ \hline \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix} & \begin{matrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{matrix}\end{array}\right],$$

$$J_{21}(0,0)=-J_{12}(0,0)=N(0)\otimes E^T+E\otimes Q^T(0)=\left[\begin{array}{c|c}\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{matrix} & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & \begin{matrix}-2 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\end{array}\right],$$

а гиперматрицы:

$$J(0,0)=\left[\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c:c}\begin{matrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{matrix} & \mathbf{0}\\ \hdashline \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix} & \begin{matrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{matrix}\end{array} &
\begin{array}{c:c}\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & -2\end{matrix} & \mathbf{0}\\ \hdashline \mathbf{0} & \begin{matrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\end{array}\\ \hline
\begin{array}{c:c}\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{matrix} & \mathbf{0}\\ \hdashline \mathbf{0} & \begin{matrix}-2 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\end{array} &
\begin{array}{c:c}\begin{matrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{matrix} & \mathbf{0}\\ \hdashline \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix} & \begin{matrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{matrix}\end{array}
\end{array}\right],\quad
J^{-1}(0,0)=\left[\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c:c}\begin{matrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{matrix} & \mathbf{0}\\ \hdashline \begin{matrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{matrix} & \begin{matrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{matrix}\end{array} &
\begin{array}{c:c}\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{matrix} & \mathbf{0}\\ \hdashline \mathbf{0} & \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & -2\end{matrix}\end{array}\\ \hline
\begin{array}{c:c}\begin{matrix}-2 & 0\\ 0 & 0\end{matrix} & \mathbf{0}\\ \hdashline \mathbf{0} & \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{matrix}\end{array} &
\begin{array}{c:c}\begin{matrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{matrix} & \mathbf{0}\\ \hdashline \begin{matrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{matrix} & \begin{matrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{matrix}\end{array}
\end{array}\right].$$

Поэтому

$$\left(\begin{array}{c}\hat{G}(0)\\ \hdashline \hat{H}(0)\end{array}\right)=J^{-1}(0,0)\cdot\left(\begin{array}{c}\hat{R}(0)\\ \hdashline \hat{S}(0)\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}1\\ 1\\ \hdashline 0\\ 2\\ \hline 1\\ 0\\ \hdashline 0\\ 0\end{array}\right),$$

откуда

$$G(0)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\ H(0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};$$

при к=1:

$$J_{11}(1,0;0,1)=J_{22}(1,0;0,1)=M(1)\otimes E^T+E\otimes P^T(1)=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & 0 & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$J_{21}(1,0;0,1)=-J_{12}(1,0;0,1)=N(1)\otimes E^T+E\otimes G^T(1)=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & 2 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & -2 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$J(1,0;\ 0,1)=\left[\begin{array}{cc:cc|cc:cc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$\left(\frac{\hat{G}(1)}{\hat{H}(1)}\right)=J^{-1}(0,0)\cdot\left[\left(\frac{\hat{R}(1)}{\hat{S}(1)}\right)-J(1,0;0,1)\cdot\left(\frac{\hat{G}(0)}{\hat{H}(0)}\right)\right]=J^{-1}(0,0)\cdot\left[\begin{pmatrix} -2 \\ \hdashline 0 \\ \hline -2 \\ \hdashline 2 \\ \hline 0 \\ \hdashline 4 \\ \hline 1 \\ \hdashline 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 \\ \hdashline 0 \\ \hline -1 \\ \hdashline 1 \\ \hline 0 \\ \hdashline 2 \\ \hline 1 \\ \hdashline 0 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 0 \\ \hdashline 1 \\ \hline 0 \\ \hdashline 1 \\ \hline 0 \\ \hdashline 0 \\ \hline 0 \\ \hdashline 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$G(1)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \ H(1)=[0];$$

при к=2:

$$J_{11}(2,0;0,2)=J_{22}(2,0;0,2)=M(2)\otimes E^T+E\otimes P^T(2)=[0],$$
$$J_{21}(2,0;0,2)=-J_{22}(2,0;0,2)=N(2)\otimes E^T+E\otimes Q^T(2)=[0],$$
$$J(2,0;0,2)=[0],$$

$$\left(\frac{\hat{G}(2)}{\hat{H}(2)}\right) = J^{-1}(0,0)\cdot\left[\left[\left(\frac{\hat{R}(2)}{\hat{S}(2)}\right) - \cancelto{0}{J(2,0;0,2)}\cdot\left(\frac{\hat{G}(0)}{\hat{H}(0)}\right)\right] - J(1,0;0,1)\cdot\left(\frac{\hat{G}(1)}{\hat{H}(1)}\right)\right] =$$

$$= J^{-1}(0,0)\cdot\left[\left(\begin{array}{c} -1 \\ \hline 0 \\ \hdashline -1 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 2 \\ \hdashline 0 \\ \hline 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} -1 \\ \hline 0 \\ \hdashline -1 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 2 \\ \hdashline 0 \\ \hline 0 \end{array}\right)\right] = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ \hdashline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hdashline 0 \\ \hline 0 \end{array}\right),$$

откуда

$$G(2) = [0], \quad H(2) = [0].$$

Нетрудно убедиться, что при $\forall K \geq 3$ также имеем

$$G(K) = [0], \quad H(K) = [0].$$

Поэтому тейлоровское решение задачи имеет вид

$$X(t) = \sum_{K=0}^{\infty}\left(\frac{t-t_y}{H}\right)^K (G(K) + j\cdot H(K)) =$$

$$= \left[G(0) + j\cdot H(0)\right] + [G(1) + \cancelto{0}{j\cdot H(1)}]\cdot(t-1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}(t-1) = \begin{bmatrix} (1+j) & t \\ 0 & (1+t) \end{bmatrix},$$

которое точно удовлетворяет исходному матричному уравнению.

И, наконец, рассмотрим решение модельного примера параллельным численно-аналитическим методом:

В соответствии с (41) имеем

$$
J_0=\left[\begin{array}{cccc|cccc}
0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\\
\hline
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0
\end{array}\right],\quad
J_1=\left[\begin{array}{cccc|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right],
$$

$$
J_2=\left[\begin{array}{cccc|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{array}\right].
$$

При этом в соответствии с (40) с использованием ППП MATLAB [11] получено решение:

$$(\hat{G}(0)\vdots\hat{H}(0)\vdots\hat{G}(1)\vdots\hat{H}(1)\vdots\hat{G}(2)\vdots\hat{H}(2))=(1102\vdots1000\vdots0101\vdots0000\vdots0000\vdots0000)^T,$$

откуда

$$G(0)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\ H(0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ G(1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ H(1)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$G(2)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ H(2)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Следовательно, и здесь приходим к вышепредставленному точному тейлоровскому решению задачи.

Заключение. Таким образом, при предложенных последовательном и параллельном численно-аналитических методах решение однопараметрических матричных непрерывных уравнений типа Сильвестра на первом этапе вычислений сводится к решению некоторых числовых задач, для которых эффективно могут быть использованы современные средства информационных технологий [10,11]. Восстановление непрерывного решения – оригинала на втором этапе вычислений не представляет особой трудности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Беклемишев Д.В.** Дополнительные главы линейной алгебры. – М.: Наука, 1983. – 385 с.
2. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976. – 351 с.
3. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. – М.: Наука, 2010. - 560 с.
4. **Ланкастер П.** Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
5. **Икрамов Х.Д.** Численное решение матричных уравнений. – М.: Наука, 1984. –190 с.
6. **Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.** Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 1998. – 574 с.
7. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Киев: Наукова думка,1984. – 420 с.
8. **Helmke U., Moore J.B.** Optimization and Dynamical Systems.- Springer-Verlag, London Limited, 1994. – 389 p.
9. **Симонян С.О., Аветисян А.Г.** Прикладная теория дифференциальных преобразований .-Ереван: Изд -во ГИУА “Чартарагет”, 2010. - 361 с.
10. **Метьюз Дж. Г., Финк К.Д.** Численные методы. Использование MATLAB. – М., СПб., Киев, 2001. – 713 с.
11. **Stroustrup B.** The C++ Programming Language. 4th edition. - Boston: Addison-Wesley Professional, 2013. - 1368 p.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 25.03.2015.

Ս.Հ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ՍԻԼՎԵՍՏՐԻ ՏԻՊԻ $A(t)\cdot X(t)+X(t)\cdot B(t)=C(t)$ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԴԵԿՈՄՊՈԶԻՑԻՈՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

Դիտարկվում են Սիլվեստրի տիպի միապարամետրական մատրիցային անընդհատ հավասարումների անընդհատ լուծումների որոշման երեք՝ ուղիղ անալիտիկ, հաջորդական և զուգահեռ թվաանալիտիկ դեկոմպոզիցիոն մեթոդներ: Դրանցից առաջինը կիրառելի է փոքր չափերով պարզ խնդիրների, իսկ երկրորդը և երրորդը՝ անալիտիկ տարրերով ցանկացած խնդիրների համար: Վերջին երկու մեթոդներում որպես հիմնական մաթեմատիկական ապարատ են ծառայում դիֆերենցիալ ձևափոխությունները, որոնց դեպքում նախնական անընդհատ խնդրի լուծումը հանգում է մի շարք անդրադարձ թվային խնդիրների լուծմանը, ինչը հնարավորություն է տալիս լայնորեն օգտագործել ժամանակակից տեղեկատվական տեխնոլոգիաների միջոցները: Դիտարկված է մոդելային օրինակ, որը ցուցադրում է հաջորդական և զուգահեռ դեկոմպոզիցիոն թվաանալիտիկ մեթոդների հաշվողական արդյունավետությունը:

Առանցքային բառեր. Սիլվեստրի տիպի միապարամետրական մատրիցային անընդհատ հավասարումներ, կրոնեկերյան արտադրյալ, դեկոմպոզիցիոն անալիտիկ լուծում, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, անդրադարձ հաշվողական ընթացակարգեր, դեկոմպոզիցիոն հաջորդական և զուգահեռ թվաանալիտիկ մեթոդներ, մոդելային օրինակ:

S.H. SIMONYAN

DECOMPOSITION AL METHODS FOR SOLVING THE $A(t)\cdot X(t)+X(t)\cdot B(t)=C(t)$ SYLVESTER - TYPE ONE-PARAMETRIC MATRIX CONTINUOUS EQUATIONS

Three decompositional methods for solving the Sylvester type one-parametric matrix continuous equations are considered: the direct analytical, the consecutive and the parallel numeric-analytical decompositional methods. The first one is applicable for small-sized common problems, whereas the second and the third ones –for any problems with analytical elements. In the last two methods the differential transformations serve as the basic mathematical apparatus in case of which the solution of initial consecutive problems leads to several recurrent numeric problem solutions which enable a wide utilization of contemporary IT means. A modeling sample is considered which displays the computational productivity of the consecutive and parallel decompositional numeric-analytical methods.

Keywords: Sylvester-type one-parametric matrix continuous equations, Kronecker product, decompositional analytical solution, differential transformations, recurrent computational procedures, consecutive and parallel numeric-analytical methods, modeling sample.