

С.О. СИМОНЯН

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЧНЫХ
НЕПРЕРЫВНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СИЛЬВЕСТРА
 $A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot B(t) = C(t)$

Рассматриваются три метода нахождения решений однопараметрических матричных непрерывных уравнений типа Сильвестра – прямой аналитический метод, последовательный и параллельный численно-аналитические методы. Аналитический метод практически может быть использован при решении простых задач с малыми размерами, последовательный численно-аналитический метод – при решении любых задач с аналитическими элементами и легко реализуем средствами современных информационных технологий, параллельный численно-аналитический метод – при решении любых задач с обеспечением высокой производительности вычислительных процедур. В последних двух методах основным математическим аппаратом служат дифференциальные преобразования. Во втором методе решение исходной задачи сводится к решению рекуррентной цепочки некоторых линейных гиперсистем алгебраических уравнений и нахождению соответствующих матричных дискрет задачи, а затем к восстановлению ее непрерывного решения и к решению некоторой неоднородной линейной алгебраической гиперсистемы с дальнейшим восстановлением отмеченного непрерывного решения при параллельном численно-аналитическом методе. Рассмотрен модельный пример, иллюстрирующий вычислительную эффективность последних двух методов.

Ключевые слова: однопараметрическое матричное непрерывное уравнение типа Сильвестра, кронекерово произведение, аналитическое решение, дифференциальные преобразования, рекуррентные вычислительные процедуры, последовательный и параллельный численно-аналитические методы, модельный пример.

Введение. В теории матриц [1-4] и ее различных приложениях [5], в задачах управления и автоматического регулирования [6-13] и многих других областях научных исследований достаточно часто встречаются различные матричные уравнения, в числе которых особое место занимают неявные уравнения Сильвестра [7,14], в частности, непрерывное уравнение с квадратными числовыми матрицами.

В настоящей работе рассмотрим однопараметрическое матричное непрерывное уравнение типа Сильвестра

$$\underset{m \times m}{A(t)} \cdot \underset{m \times n}{X(t)} + \underset{m \times n}{X(t)} \cdot \underset{n \times n}{B(t)} = \underset{m \times n}{C(t)}, \quad (1)$$

которое представим в виде

$$A(t)_{m \times m} \cdot X(t)_{m \times n} \cdot E_{n \times n} + E_{m \times m} \cdot X(t)_{m \times n} \cdot B(t)_{n \times n} = C(t)_{m \times n}, \quad (2)$$

где $E_{n \times n}$ и $E_{m \times m}$ - единичные матрицы.

1. Прямой аналитический метод решения. С учетом известной трансформации [2, 4]

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{m1}(t) & \dots & x_{mn}(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \hat{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{1n}(t) \\ \hline \vdots \\ \hline x_{m1}(t) \\ \vdots \\ x_{mn}(t) \end{pmatrix}_{mn \times 1} \quad (3)$$

уравнение (2) примет следующий вид:

$$[A(t) \otimes E_{n \times n}^T + E_{m \times m} \otimes B^T(t)] \cdot \hat{X}(t) = \hat{C}(t), \quad (4)$$

где символ $\otimes$ – знак кронекерова произведения, а гипервектор

$$\hat{C}(t) = \begin{pmatrix} c_{11}(t) \\ \vdots \\ c_{1n}(t) \\ \hline \vdots \\ \hline c_{m1}(t) \\ \vdots \\ c_{mn}(t) \end{pmatrix}_{mn \times 1}. \quad (5)$$

Следовательно, из (4), (5) получим

$$\hat{X}(t) = [A(t) \otimes E_{n \times n}^T + E_{m \times m} \otimes B^T(t)]^{-1} \hat{C}(t) = D^{-1}(t) \cdot \hat{C}(t), \text{ если } \det D(t) \neq 0, \quad (6 \text{ а})$$

$$\hat{X}(t) = [A(t) \otimes E_{n \times n}^T + E_{m \times m} \otimes B^T(t)]^+ \hat{C}(t) = D^+(t) \cdot \hat{C}(t), \text{ если } \det D(t) = 0. \quad (6 \text{ б})$$

Очевидно, представления (6а) и (6б) носят чисто теоретический характер и малоприспособны для практических задач (их использование возможно лишь только при малых размерах матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и их простых элементах). Ввиду этого обстоятельства перейдем к численно-аналитическим решениям, при которых в

качестве основного математического аппарата выступают дифференциальные преобразования Пухова [15, 16].

2. Последовательный численно-аналитический метод решения. Предположим, что для матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $X(t)$ с аналитическими элементами имеют место дифференциальные преобразования

$$A(K) = \frac{H^k}{K!} \cdot \frac{dA^k(t)}{dt^k} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \xrightarrow{\cdot} \quad A(t) = \chi_1(t, t_v, H, A(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (7)$$

$$B(K) = \frac{H^k}{K!} \cdot \frac{dB^k(t)}{dt^k} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \xrightarrow{\cdot} \quad B(t) = \chi_2(t, t_v, H, B(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (8)$$

$$C(K) = \frac{H^k}{K!} \cdot \frac{dC^k(t)}{dt^k} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \xrightarrow{\cdot} \quad C(t) = \chi_3(t, t_v, H, C(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (9)$$

$$X(K) = \frac{H^k}{K!} \cdot \frac{dX^k(t)}{dt^k} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \xrightarrow{\cdot} \quad X(t) = \chi_4(t, t_v, H, X(K), K = \overline{0, \infty}). \quad (10)$$

В (7)-(10) $A(K)$, $B(K)$, $C(K)$, $X(K)$ – матричные дискреты матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $X(t)$ соответственно; $K = \overline{0, \infty}$ – целочисленный аргумент; H – масштабный коэффициент; t_v – центр аппроксимации; символ $\xrightarrow{\cdot}$ – знак перехода из области оригиналов в область дифференциальных изображений и наоборот; $\chi_1(\cdot) - \chi_4(\cdot)$ – некоторые аппроксимирующие функции, восстанавливающие оригиналы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $X(t)$ соответственно.

Теперь соотношение (4) из области оригиналов переведем в область дифференциальных изображений. Получим:

при $K=0$:

$$[A(0) \otimes E_{n \times n}^T + E_{m \times m} \otimes B^T(0)] \cdot \hat{X}(0) = D(0;0) \cdot \hat{X}(0) = \hat{C}(0), \quad (11)$$

откуда

$$\hat{X}(0) = [A(0) \otimes E_{n \times n}^T + E_{m \times m} \otimes B^T(0)]^{-1} \cdot \hat{C}(0) = D^{-1}(0;0) \cdot \hat{C}(0), \quad (12)$$

конечно, при выполнении условия

$$\text{rang} D(0,0) = m \cdot n; \quad (13)$$

при $K=1$:

$$[A(1) \otimes E_{n \times n}^T + E_{m \times m} \otimes B^T(1)] \cdot \hat{X}(0) + [A(0) \otimes E_{n \times n}^T + E_{m \times m} \otimes B^T(0)] \cdot \hat{X}(1) = \\ = D(1,0;0,1) \cdot \hat{X}(0) + D(0;0) \cdot \hat{X}(1) = \hat{C}(1), \quad (14)$$

откуда

$$\begin{aligned}\hat{X}(1) &= D^{-1}(0;0) \cdot [\hat{C}(1) - [A(1) \otimes E_{n \times n}^T + E_{m \times m} \otimes B^T(1)] \cdot \hat{X}(0)] = \\ &= D^{-1}(0;0) \cdot [\hat{C}(1) - D(1,0; 0,1) \cdot \hat{X}(0)];\end{aligned}\quad (15)$$

при $K=2$:

$$\begin{aligned}&[A(2) \otimes E_{n \times n}^T + E_{m \times m} \otimes B^T(2)] \cdot \hat{X}(0) + [A(1) \otimes E_{n \times n}^T + E_{m \times m} \otimes B^T(1)] \cdot \hat{X}(1) + \\ &+ [A(0) \otimes E_{n \times n}^T + E_{m \times m} \otimes B^T(0)] \cdot \hat{X}(2) = D(2,0;0,2) \cdot \hat{X}(0) + D(1,0;0,1) \cdot \hat{X}(1) + \\ &+ D(0;0) \cdot \hat{X}(2) = \hat{C}(2),\end{aligned}\quad (16)$$

откуда

$$\hat{X}(2) = D^{-1}(0,0) \cdot [\hat{C}(2) - D(2,0;0,2) \cdot \hat{X}(0) - D(1,0; 0,1) \cdot \hat{X}(1)];\quad (17)$$

...

при $K=K$:

$$\begin{aligned}&[A(K) \otimes E_{n \times n}^T + E_{m \times m} \otimes B^T(K)] \cdot \hat{X}(0) + [A(K-1) \otimes E_{n \times n}^T + E_{m \times m} \otimes B^T(K-1)] \cdot \hat{X}(1) + \dots \\ &\dots + [A(1) \otimes E_{n \times n}^T + E_{m \times m} \otimes B^T(1)] \cdot \hat{X}(K-1) + [A(0) \otimes E_{n \times n}^T + E_{m \times m} \otimes B^T(0)] \cdot \hat{X}(K) = \\ &= D(K,0; 0,K) \cdot \hat{X}(0) + D(K-1,0; 0,K-1) \cdot \hat{X}(1) + \dots + \\ &+ D(1,0; 0,1) \cdot \hat{X}(K-1) + D(0,0) \cdot \hat{X}(K) = \hat{C}(K),\end{aligned}\quad (18)$$

откуда

$$\begin{aligned}\hat{X}(K) &= D^{-1}(0;0) \cdot [\hat{C}(K) - D(K,0; 0,K) \cdot \hat{X}(0) - D(K-1,0; 0,K-1) - \dots \\ &\dots - D(1,0; 0,1) \cdot \hat{X}(K-1)] = D^{-1}(0,0) \cdot [\hat{C}(K) - \sum_{\ell=1}^K D(\ell,0; 0,\ell) \cdot \hat{X}(K-\ell)].\end{aligned}\quad (19)$$

Таким образом, вычислив гипервекторы (12), (15), (17) и (19), далее в соответствии с дифференциальными преобразованиями (7)-(10) и с учетом (3) можно определить решение (10) исходной задачи (1).

Модельный пример. Пусть задано однопараметрическое линейное матричное непрерывное уравнение типа Сильвестра

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} (1+jt) & 0 \\ t & (1-jt) \end{bmatrix} \cdot X(t) + X(t) \cdot \begin{bmatrix} (-1-jt) & -1 \\ -t & (-1+jt) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -t^2 & (-1-j+2jt^2) \\ (jt-t^2) & t^2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Тогда при $t_\nu=1$, $H=1$ получим следующие тейлоровские матричные дискреты:

$$A(0)=\begin{bmatrix} (1+j) & 0 \\ 1 & (1-j) \end{bmatrix}, \quad A(1)=\begin{bmatrix} j & 0 \\ 1 & -j \end{bmatrix}, \quad A(K)=[0], \quad \forall K \geq 2;$$

$$B(0)=\begin{bmatrix} (-1-j) & -1 \\ -1 & (-1+j) \end{bmatrix}, \quad B(1)=\begin{bmatrix} -j & 0 \\ -1 & j \end{bmatrix}, \quad B(K)=[0], \quad \forall K \geq 2;$$

$$C(0)=\begin{bmatrix} -1 & (-1+j) \\ (-1+j) & 1 \end{bmatrix}, \quad C(1)=\begin{bmatrix} -2 & 4j \\ (-2+j) & 2 \end{bmatrix}, \quad C(2)=\begin{bmatrix} -1 & 2j \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C(K)=[0], \quad \forall K \geq 3.$$

Следовательно, в соответствии с (11) будем иметь:
при $K=0$:

$$D(0, 0) = A(0) \otimes E_{2 \times 2}^T + E_{2 \times 2} \otimes B^T(0) =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} (1+j) & 0 & & \\ 0 & (1+j) & & \\ \hline 1 & 0 & (1-j) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (1-j) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc|cc} (-1-j) & -1 & & \\ -1 & (-1+j) & & \\ \hline & 0 & (-1-j) & -1 \\ & & -1 & (-1+j) \end{array} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & & \\ -1 & 2j & & \\ \hline 1 & 0 & -2j & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right],$$

откуда

$$D^{-1}(0,0) = \left[\begin{array}{cc|cc} -2j & -1 & & \\ -1 & 0 & & \\ \hline -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2j \end{array} \right].$$

Поэтому гипервектор в соответствии с (12) имеет вид

$$\hat{X}(0) = D^{-1}(0,0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ (-1+j) \\ (-1+j) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+j) \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

а нулевая по номеру матричная дискрета:

$$X(0) = \begin{bmatrix} (1+j) & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

при $K=1$:

В соответствии с (14) будем иметь

$$\begin{aligned} D(1, 0; 0, 1) &= A(1) \otimes E_{2 \times 2}^T + E_{2 \times 2} \otimes B^T(1) = \\ &= \begin{bmatrix} j & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 1 & 0 & -j & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -j & -1 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & -j & -1 \\ 0 & 0 & 0 & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2j & 0 \\ 1 & 0 & -2j & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

откуда

$$D(1, 0; 0, 1) \cdot \hat{X}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2j}{(-1+j)} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в соответствии с (15) получим

$$\hat{X}(1) = D^{-1}(0, 0) \cdot \left[\hat{C}(1) - \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2j}{(-1+j)} \\ 1 \end{pmatrix} \right] = D^{-1}(0, 0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2j}{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{0} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому матричная дискрета

$$X(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

при $K=2$:

$$D(2, \overset{0}{\nearrow} 0; \overset{0}{\nearrow} 0, 2) = A(2) \otimes E_{2 \times 2}^T + E_{2 \times 2} \otimes \overset{0}{\nearrow} B^T(2) = [0],$$

$$D(2, 0; 0, 2) \cdot \hat{X}(0) = [0], \quad D(1, 0; 0, 1) \cdot \hat{X}(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2j}{-1} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{X}(2) = D^{-1}(0, 0) \cdot \left[\hat{C}(2) - \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2j}{-1} \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{0}{0} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому матричная дискрета

$$X(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Дальнейшие вычисления также приводят к нулевым матричным дискретам, т.е.

$$X(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \forall K \geq 3.$$

Следовательно, окончательное тейлоровское решение задачи имеет вид

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t-t_v}{H} \right)^k \cdot X(K) = X(0) + X(1) \cdot (t-t_v) + \overset{0}{X(2)} \cdot (t-t_v)^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} (1+j) & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (t-1) = \begin{bmatrix} (1+j) & t \\ 0 & (1+t) \end{bmatrix},$$

которое точно удовлетворяет исходному матричному уравнению.

3. Параллельный численно-аналитический метод решения. Нетрудно убедиться, что, объединив соотношения (11), (14), (16) и (18), получим следующее гиперматрично-гипервекторное представление:

$$\begin{bmatrix} D(0,0) & 0 & \cdots & 0 \\ D(1,0; 0,1) & D(0,0) & \cdots & 0 \\ D(2,0; 0,2) & D(1,0; 0,1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D(K,0; 0,K) & D(K-1,0; 0,K-1) & \cdots & D(0,0) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{X}(0) \\ \hat{X}(1) \\ \hat{X}(2) \\ \vdots \\ \hat{X}(K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{C}(0) \\ \hat{C}(1) \\ \hat{C}(2) \\ \vdots \\ \hat{C}(K) \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$(K+1)mn \times (K+1)mn$
 $(K+1)mn \times 1$
 $(K+1)mn \times 1,$

или в компактной записи:

$$D(\bullet) \cdot \hat{X}(\bullet) = \hat{C}(\bullet). \quad (21)$$

При этом нетрудно убедиться, что при выполнении условия (13) имеет место и условие

$$\text{rang } D(\bullet) = (K+1)mn \quad (22)$$

Следовательно, решение линейной неоднородной системы алгебраических уравнений (20) или (21) с учетом (22) и результатов, полученных в [16], имеет вид

$$\begin{pmatrix} \hat{X}(0) \\ \hat{X}(1) \\ \hat{X}(2) \\ \vdots \\ \hat{X}(K) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ D_1 & D_0 & 0 & \cdots & 0 \\ D_2 & D_1 & D_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ D_K & D_{K-1} & D_{K-2} & \cdots & D_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{C}(0) \\ \hat{C}(1) \\ \hat{C}(2) \\ \vdots \\ \hat{C}(K) \end{pmatrix} = D^{-1}(\bullet) \cdot C(\bullet), \quad (23)$$

$(k+1)mn \times 1$ $(k+1)mn \times (k+1)mn$ $(k+1)mn \times 1$

где

$$\begin{cases} D_0 = D^{-1}(0,0) = D^{-1}(0,0) \cdot E = D^{-1}(0,0) \cdot \bar{D}_0, \\ D_1 = -D^{-1}(0,0) \cdot [D(1,0; 0,1) \cdot D^{-1}(0,0)] = D^{-1}(0,0) \cdot \bar{D}_1, \\ D_2 = -D^{-1}(0,0) \cdot [D(2,0; 0,2) \cdot D^{-1}(0,0) - \\ \quad - D(1,0; 0,1) \cdot D^{-1}(0,0) \cdot D(1,0; 0,1) \cdot D^{-1}(0,0)] = D^{-1}(0,0) \cdot \bar{D}_2, \\ \dots\dots\dots \\ D_k = -D^{-1}(0,0) \cdot \sum_{r=1}^K D(r,0; 0,r) \cdot D_{k-r} = D^{-1}(0,0) \cdot \bar{D}_k, \end{cases} \quad (24)$$

причем если имеет место условие

$$\text{rang } D(\bullet) = (K+1)mn \Leftrightarrow \text{rang } D(0,0) = mn, \quad (25)$$

т.е. если $D(\bullet)$ – невырожденная матрица (при этом невырожденна и матрица $D(0,0)$ и наоборот). Если же

$$\text{rang } D(\bullet) < (K+1)mn \Leftrightarrow \text{rang } D(0,0) < mn, \quad (26)$$

то в этом случае можно вместо матрицы $D^{-1}(0,0)$ использовать псевдообратную матрицу $D^+(0,0)$ с соответствующим составным вектором корректирующих дискрет (эти вопросы достаточно подробно освещены в работе [16], однако из-за больших вычислительных трудностей при их практической реализации на них здесь останавливаться не будем). Следовательно, в этом случае лучше поменять центр аппроксимации t_v таким образом, чтобы имело место условие (25), а не (26), и далее воспользоваться вычислительной схемой (23), (24).

Рассмотрим также применение параллельного численно-аналитического метода для решения приведенного выше модельного примера. В соответствии с (20) и (23) получим

$$\begin{pmatrix} x_{11}(0) \\ x_{12}(0) \\ x_{21}(0) \\ x_{22}(0) \\ x_{11}(1) \\ x_{12}(1) \\ x_{21}(1) \\ x_{22}(1) \\ x_{11}(2) \\ x_{12}(2) \\ x_{21}(2) \\ x_{22}(2) \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & -1 & & & & & & & & & & \\ & -1 & 2j & & & & & & & & & \\ \hline & 1 & 0 & -2j & -1 & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & -1 & 0 & & & & & & \\ \hline 0 & -1 & & & 0 & & 0 & -1 & & & 0 & \\ & 0 & 2j & & -1 & 2j & & & & & 0 & \\ \hline & 1 & 0 & -2j & -1 & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & 0 & 0 & & 0 & 1 & & -1 & 0 \\ \hline & & & & 0 & -1 & & 0 & & & 0 & \\ & & & & 0 & 2j & & -1 & 2j & & & \\ \hline & & & & 1 & 0 & -2j & -1 & & 1 & 0 & -2j & -1 \\ & & & & 0 & 1 & & 0 & 0 & & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right]^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ (-1+j) \\ (-1+j) \\ 1 \\ -2 \\ 4j \\ (-2+j) \\ 2 \\ -1 \\ 2j \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -2j & -1 & & & & & & & & & & \\ & -1 & 0 & & & & & & & & & \\ \hline & -1 & 0 & 0 & -1 & & & & & & & \\ & 0 & -1 & & -1 & 2j & & & & & & \\ \hline 0 & 0 & & & -2j & -1 & & 0 & & & & \\ & 1 & 0 & & -1 & 0 & & 0 & -1 & & & \\ & & & & 0 & 0 & & & & & 0 & \\ & & & & 0 & 1 & & & & & & \\ \hline 0 & & & & 0 & 0 & & & -2j & -1 & & 0 \\ & & & & 0 & 0 & & 0 & & & & \\ & & & & 1 & 0 & & & -1 & 0 & & 0 \\ & & & & 0 & & & 0 & 0 & & & -1 \\ & & & & 0 & & & 1 & 0 & & 0 & -1 & 2j \end{array} \right] \begin{pmatrix} -1 \\ (-1+j) \\ (-1+j) \\ 1 \\ -2 \\ 4j \\ (-2+j) \\ 2 \\ -1 \\ 2j \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+j) \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда с учетом (3) имеем

$$X(0) = \begin{bmatrix} x_{11}(0) & x_{12}(0) \\ x_{21}(0) & x_{22}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+j) & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad X(1) = \begin{bmatrix} x_{11}(1) & x_{12}(1) \\ x_{21}(1) & x_{22}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$X(2) = \begin{bmatrix} x_{11}(2) & x_{12}(2) \\ x_{21}(2) & x_{22}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, при этих матричных дискретах получим такое же тейлоровское решение задачи, какое было приведено выше.

Заключение. Предложенные последовательный и параллельный численно-аналитические методы решения однопараметрических матричных непрерывных уравнений типа Сильвестра, очевидно, оперируют численными вычислительными процедурами, что дает возможность эффективно использовать возможности сов-

ременных средств информационных технологий [17] на первом этапе вычислений. Второй этап вычислений, т.е. восстановление непрерывного решения на основе использования некоторого обратного дифференциального преобразования, не представляет особой трудности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976. – 351 с.
2. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. – М.: Наука, 2010. – 560 с.
3. **Квакернаак Х., Сиван Р.** Линейные оптимальные системы управления. – М.: Мир, 1977. – 650 с.
4. **Ланкастер П.** Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
5. **Икрамов Х.Д.** Численное решение матричных уравнений. – М.: Наука, 1984. – 190 с.
6. **Икрамов Х.Д.** Об условиях однозначной разрешимости матричного уравнения $A \cdot X + X^T \cdot B = C$ // Докл. РАН. - 2010. - 430:4. – С. 444-447.
7. **Икрамов Х.Д.** Условия нормальности матричных уравнений типа Сильвестра // ДАН РФ. - 2014. - 459:4. – С. 403-405.
8. **Воронцов Ю.О., Икрамов Х.Д.** Об условиях однозначной разрешимости матричного уравнения $A \cdot X + X^* \cdot B = C$ // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2012. - 52:5. – С. 775-783.
9. **Мамонов С.С.** Матричное уравнение Риккати // Дифференциальные уравнения (качественная теория): Межвуз. сб. научн. трудов. – Рязань: Изд-во РГПУ, 1996. – С. 99-103.
10. **Мамонов С.С.** Матричное уравнение Ляпунова // Вестник Ряз. гос. пед. ун-та. – Рязань: Горизонт, 1996. – № 4. – С. 79-82.
11. **Мамонов С.С.** Решение матричных уравнений // Вестник Ряз. гос. ун-та им. С.А. Есенина. – Рязань, 2009. – Вып. 21, № 1 – С. 115-136.
12. **Helmke U., Moore J.B.** Optimization and Dynamical Systems.- Springer-Verlag, London Limited, 1994. – 389 p.
13. **Vorontsov Yu.O., Ikramov Kh.D.** Numerical solution of the matrix equations $A \cdot X + X^T \cdot B = C$ and $A \cdot X + X^* \cdot B = C$ in the self-adjoint case // Comput. Math. Math. Phys.- 2014.- 54:2. – P. 191-194.
14. **Симонян С.О.** К вычислительным методам решения матричных уравнений // Сб. статей “Вопросы повышения эффективности систем управления технологическими процессами”/ Международная федерация по автоматическому управлению. - Ереван, 1994. – С. 8-14.
15. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Киев: Наукова думка, 1984. – 420 с.
16. **Симонян С.О., Аветисян А.Г.** Прикладная теория дифференциальных преобразований. -Ереван: Изд-во ГИУА “Чартарагет”, 2010. - 361 с.
17. **Stroustrup B.** The C++ Programming Language. 4th edition.- Boston: Addison-Wesley Professional, 2013. - 1368 p.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 25.03.2015.

Մ.Հ. ՄԻՄՈՆՅԱՆ

ՄԻԼՎԵՍՏԵՐԻ ՏԻՊԻ $A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot B(t) = C(t)$ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՀԱՎԱՍԱՐԱՌԻՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

Դիտարկվում են Միլվեստրի տիպի միապարամետրական մատրիցային հավասարումների անընդհատ լուծումների փնտրման երեք մեթոդներ՝ ուղղակի անալիտիկ մեթոդը, հաջորդական և զուգահեռ թվաանալիտիկ մեթոդները: Անալիտիկ մեթոդը գործնականորեն կարող է օգտագործվել փոքր չափերով պարզ խնդիրների լուծման ժամանակ, հաջորդական թվաանալիտիկ մեթոդը՝ անալիտիկ տարրերով ցանկացած խնդիրների լուծման ժամանակ և հեշտ իրականացնելի է ժամանակակից տեղեկատվական տեխնոլոգիաների միջոցներով, զուգահեռ թվաանալիտիկ մեթոդը՝ ցանկացած խնդիրների լուծման ժամանակ՝ ապահովելով հաշվողական ընթացակարգերի բարձր արտադրողականություն: Վերջին երկու մեթոդների դեպքում որպես հիմնական մաթեմատիկական ապարատ հանդես են գալիս դիֆերենցիալ ձևափոխությունները: Երկրորդ մեթոդի դեպքում նախնական խնդրի լուծումը հանգեցվում է հանրահաշվական հավասարումների որոշ գծային հիպերհամակարգերի անդրադարձ շղթայի լուծմանը և խնդրի համապատասխան մատրիցային դիսկրետների որոշմանը, իսկ այնուհետև՝ նաև նրա անընդհատ լուծման վերականգնմանը և որոշ գծային անհամասեռ հանրահաշվական հիպերհամակարգի լուծմանը, իսկ հետագայում՝ նշված անընդհատ լուծման վերականգնմանը զուգահեռ թվաանալիտիկ մեթոդի դեպքում: Դիտարկված է մոդելային օրինակ, որը ցուցադրում է վերջին երկու մեթոդների հաշվողական արդյունավետությունը:

Առանցքային բառեր. Միլվեստրի տիպի միապարամետրական մատրիցային անընդհատ հավասարում, կրոնեկերյան արտադրյալ, թվաանալիտիկ լուծում, անդրադարձ հաշվողական ընթացակարգեր, հաջորդական և զուգահեռ թվաանալիտիկ մեթոդներ, մոդելային օրինակ:

S.H. SIMONYAN

METHODS FOR SOLVING ONE-PARAMETRIC MATRIX CONTINUOUS SILVESTER-TYPE $A(T) \cdot X(T) + X(T) \cdot B(T) = C(T)$ EQUATIONS

Three methods of finding solutions for one-parametric matrix continuous Sylvester-type equations-the direct analytical, sequential and parallel numerical-analytical, methods are considered. The analytical method can be practically used at solving small simple problems, the sequential numerical-analytical method -at solving any problem with analytical elements easily implemented by the facilities of up-to-date information technologies, the parallel numerical-analytical method-at solving any problem ensuring the high productivity of calculation procedures. In the last two methods, the main mathematical apparatus are the differential transformations. In the second method, the solution to the initial problem comes to the solution of recurrent chain of some linear hypersystems of algebraic equations and finding the corresponding matrix discrete problem, and then the restoration of its continuous solution, and the solution of some nonuniform linear algebraic hypersystem with further restoration of the mentioned continuous solution at the parallel numerical-analytical method. A model example illustrating the calculating efficiency of the last two methods is considered .

Keywords: one-parametric matrix continuous Sylvester-type equation, Cronecker's derivative, analytical solution, differential transformations, recurrent calculating procedures, sequential and parallel numerical – analytical methods, a model example.