

Г.С. СУКИАСЯН, А.А. ТЕРЗЯН

**О ПОГРЕШНОСТИ ТРЕХТОЧЕЧНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ОПЕРАТОРА
ЛАПЛАСА**

Исследовано приближение оператора Лапласа в треугольнике в виде весовой суммы значений функции в трех вершинах треугольника. Найдены связи весовых коэффициентов с углами треугольника. Изучено влияние наличия в треугольнике тупого угла на погрешность трехточечной аппроксимации оператора Лапласа. Показано, что степень малости погрешности трехточечной аппроксимации надо определять по малости периметра треугольника, а не по площади. Доказано, что из всех треугольников данного периметра наименьшую погрешность трехточечной аппроксимации имеет равносторонний треугольник. Исследована возможность применения предложенного подхода для решения задач вычисления электромагнитного поля. Полученные результаты обосновывают необходимость применения сеток Делоне при конечно-элементном моделировании полевых задач.

Ключевые слова: электромагнитное поле, сеточные задачи, оператор Лапласа, погрешность аппроксимации.

Наиболее популярным методом численного решения задач электромагнитного поля является метод конечных элементов. Метод опирается на вариационный подход к решению классических уравнений Максвелла и основан на минимизации энергетического функционала. При этом энергетический функционал зависит от неизвестной функции A – значений векторного магнитного потенциала во всех точках исследуемой области.

Обычно используется классический способ нахождения экстремума путем приравнивания нулю соответствующих производных. При этом требуется переход от поиска неизвестной функции, определенной в бесконечном множестве точек, к поиску конечного количества неизвестных численных параметров – значений потенциала A в узлах аппроксимационной сетки.

Известным [1,2] примером такого перехода является четырехточечная аппроксимация оператора Лапласа внутри прямоугольника в виде весовой суммы значений функции в четырех вершинах прямоугольника:

$$\nabla A \approx \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} A_i, \quad (1)$$

где A_i – значение функции A в точке i . Отметим, что погрешность этой аппроксимации пропорциональна площади прямоугольника.

Приближение (1) хорошо работает при решении краевых задач методом конечных разностей с помощью прямоугольной сетки. Однако при решении задач электромагнитного поля приходится разделять ферромагнитные участки от воздушной среды. А такие участки могут иметь довольно сложную геометрию, и прямоугольная сетка для них не годится.

Поэтому при решении полевых задач со сложной геометрией применяется метод конечных элементов, требующий построения треугольной сетки. Становится важным получение аналога приближения (1) для треугольников.

Целью настоящей работы является получение трехточечной аппроксимации оператора Лапласа внутри треугольника в виде весовой суммы значений функции в трех вершинах треугольника:

$$\nabla A \approx \sum_{i=1}^3 c_i A_i. \quad (2)$$

В отличие от (1), весовые коэффициенты c_i в (2) зависят от формы треугольника, а точнее - от его внутренних углов. Так как котангенс прямого угла равен единице, то и приближение (1) можно записать в виде, формально зависящем от внутренних углов прямоугольника:

$$\nabla A \approx \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \alpha_i A_i,$$

где α_i - внутренний угол прямоугольника при вершине i . Интересно, что такой же вид имеет и трехточечная аппроксимация оператора Лапласа внутри треугольника:

$$\nabla A \approx \sum_{i=1}^3 \operatorname{ctg} \alpha_i A_i, \quad (3)$$

где α_i - внутренний угол треугольника при вершине i ; A_i - значение функции A в точке i .

Вначале докажем справедливость (3) для равнобедренных треугольников со стороной, параллельной координатной оси, и одной из вершин, лежащей в начале координат. Рассмотрим равнобедренный треугольник с основанием, параллельным оси OX , и вершинами V_i , имеющими декартовы координаты $V_1=(0;0)$, $V_2=(2h_x;0)$ и $V_3=(h_x;h_y)$.

Запишем расчетное уравнение метода конечных элементов для оператора Лапласа во внутренней точке V_0 с координатами (x,y) (см. рис.). Оно имеет вид (см. [2])

$$\sum_e \left(\sum_{i=0}^3 A_i \beta_{i0}^e \right) = 0. \quad (4)$$

Внутреннее суммирование ведется по всем узлам, принадлежащим элементу e , внешнее — по всем элементам, содержащим узел V_0 . Коэффициенты взаимодействия узлов V_i и V_j имеют вид

$$\beta_{ii}^e = \frac{1}{4\Delta} \left[(y_j - y_m)^2 + (x_j - x_m)^2 \right];$$

$$\beta_{ij}^e = \frac{1}{4\Delta} \left[(y_j - y_m)(y_m - y_i) + (x_j - x_m)(x_m - x_i) \right],$$

где Δ - площадь треугольника $V_i V_j V_m$; (x_k, y_k) - декартовы координаты точки V_k , $k=i,j,m$.

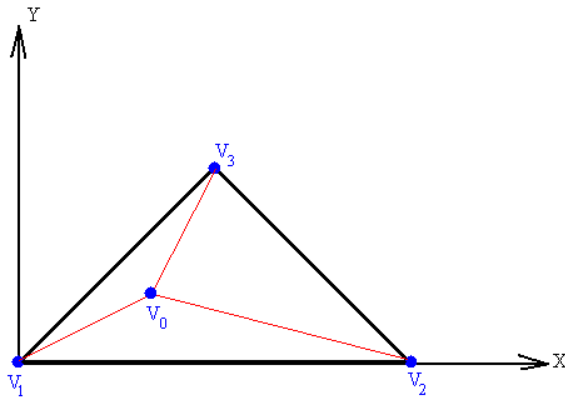


Рис.

Для треугольника $V_0V_3V_1$, подставляя значения координат, получим

$$\beta_{00} = (h_y^2 + h_x^2) / 4\Delta_{013};$$

$$\beta_{01} = [-h_y(h_y - y) - h_x(h_x - x)] / 4\Delta_{013};$$

$$\beta_{03} = (-h_y y - h_x x) / 4\Delta_{013};$$

Для треугольника $V_0V_1V_2$ получим

$$\Delta_{012} = y h_x,$$

$$\beta_{00} = 4h_x^2 / 4\Delta_{012} = h_x / y;$$

$$\beta_{01} = -2h_x(2h_x - x) / 4\Delta_{012} = -(2h_x - x) / (2y);$$

$$\beta_{02} = -2h_x x / 4\Delta_{012} = -x / (2y).$$

Для треугольника $V_0V_2V_3$ получим

$$\beta_{00} = (h_y^2 + h_x^2) / 4\Delta_{023};$$

$$\beta_{02} = [-h_y(h_y - y) + h_x(h_x - x)] / 4\Delta_{023};$$

$$\beta_{03} = [-yh_y - h_x(2h_x - x)] / 4\Delta_{023}.$$

Итак, расчетное уравнение метода конечных элементов имеет вид

$$\begin{aligned} & A_0[(h_y^2 + h_x^2) / 4\Delta_{013} + h_x / y + (h_y^2 + h_x^2) / 4\Delta_{023}] = \\ & = A_1[h_y(h_y - y) + h_x(h_x - x)] / 4\Delta_{013} + A_1(2h_x - x) / (2y) + \\ & + A_2[h_y(h_y - y) - h_x(h_x - x)] / 4\Delta_{023} + A_2[x / (2y)] + \\ & + A_3[(h_y y + h_x x) / 4\Delta_{013}] + A_3[yh_y + h_x(2h_x - x)] / 4\Delta_{023}. \end{aligned}$$

Возьмем точку V_0 в центре треугольника, приняв $x = h_x$. Тогда площади треугольников $V_0V_3V_1$ и $V_0V_2V_3$ окажутся равными

$$2\Delta_{013} = 2\Delta_{023} = (h_y - y)h_x.$$

Расчетное уравнение при $x = h_x$ имеет вид

$$\begin{aligned} & A_0[(h_y^2 + h_x^2) / (h_y - y)h_x + h_x / y] = \\ & = A_1[h_y / (2h_x) + h_x / (2y)] + A_2[h_y / (2h_x) + h_x / (2y)] + A_3(yh_y + h_x^2) / ((h_y - y)h_x). \end{aligned}$$

Устремим величину y к нулю. Приняв $A_0 \approx \frac{1}{2}(A_1 + A_2)$, можем избавиться от бесконечно больших членов порядка h_x / y . Получаем

$$A_0(h_y^2 + h_x^2) / (h_y h_x) = A_1 h_y / (2h_x) + A_2 h_y / (2h_x) + A_3(h_x^2) / (h_y h_x),$$

откуда следует

$$\nabla A \approx \frac{1}{2}(A_1 + A_2) h_x / h_y + A_3 \left(\frac{h_y}{2h_x} - \frac{h_x}{2h_y} \right).$$

Заметив, что выражение h_x / h_y равно котангенсу угла при вершинах V_1 и V_2 , а $\frac{h_y}{2h_x} - \frac{h_x}{2h_y}$ - котангенсу угла при вершине V_3 , получаем аппроксимацию (3) для равнобедренных треугольников с основанием на оси OX и вершиной V_1 в начале координат. Справедливость (3) для общих треугольников следует из известной инвариантности оператора Лапласа относительно параллельных переносов, поворотов и линейных преобразований декартовой системы координат.

При численном решении задач электромагнитного поля методом конечных элементов получаются расчетные уравнения, аналогичные (4), но с добавлением множителей, зависящих от магнитной проницаемости среды. Следовательно, в однородной среде погрешность аппроксимации уравнений Максвелла расчетными уравнениями метода конечных элементов пропорциональна котангенсам углов.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - внутренние углы произвольного треугольника, причем $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$. Сумма котангенсов внутренних углов треугольника обладает следующими свойствами:

1) она всегда положительна: $ctg \alpha_1 + ctg \alpha_2 + ctg \alpha_3 > 0$.

Заметим, что наибольший угол α_1 может быть тупым, тогда $ctg \alpha_1 < 0$, но при этом два других острых угла сильнее влияют на сумму котангенсов;

2) если α_3 стремится к нулю, то $ctg \alpha_1 + ctg \alpha_2 + ctg \alpha_3$ стремится к бесконечности;

3) если угол α_1 тупой и стремится к π , то $ctg \alpha_1 + ctg \alpha_2 + ctg \alpha_3$ стремится к бесконечности;

4) во множестве всевозможных треугольников сумма котангенсов $ctg \alpha_1 + ctg \alpha_2 + ctg \alpha_3$ достигает своего минимума для равностороннего треугольника.

Эти свойства делают математически более обоснованным известный из вычислительной практики принцип, согласно которому при численном решении задач электромагнитного поля методом конечных элементов наличие в треугольной сетке тупоугольных элементов отрицательно влияет на сходимость процесса последовательных приближений.

Из свойства 3 следует, что когда один из углов треугольника стремится к π то погрешность аппроксимации бесконечно возрастает, хотя площадь треугольника при этом стремится к нулю. Следовательно, степень малости элементов треугольной сетки надо определять по малости периметра треугольника, а не по площади.

Из свойства 4 также следует, что в однородной среде оптимальной является треугольная сетка, состоящая из равносторонних треугольников равного размера (пчелиные соты).

В [3] показано, что при заданном наборе узлов триангуляция Делоне минимизирует сумму котангенсов углов всех своих треугольников. Следовательно, триангуляция Делоне минимизирует и погрешность трехточечной аппроксимации оператора Лапласа. Отсюда вытекает, что для задачи автоматизированного нахождения электромагнитного поля методом конечных элементов при заданном наборе узлов из всех возможных сеток наилучшей (в смысле скорости сходимости процесса последовательных приближений) является триангуляция Делоне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Пароникян А.Е. Об углах треугольной сетки для расчета магнитных полей методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2007. - Т. 60, №3. – С. 523-532.
2. Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Акопян А.Э. Об оптимизации тетраэдральной сетки для расчета трехмерных магнитных полей методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2008. - Т. 61, №2. – С. 305-317.
3. Сукиасян Г.С. Экстремальное свойство триангуляции Делоне и его применение при решении полевых задач // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2014. - Т. 67, № 4. - С.452-457.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 10.04.2015.

Հ.Ս. ՍՈՒԲԻԱՍՅԱՆ, Հ.Ա. ԹԵՐԶՅԱՆ

ԼԱՊԼԱՍԻ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ԵՐԵՔԿԵՏԱՅԻՆ ՄՈՏԱՐԿՄԱՆ ՍԽԱԼԱՆՔԻ ՄԱՍԻՆ

Հետազոտվել է եռանկյան մեջ Լապլասի օպերատորի մոտարկումը՝ եռանկյան երեք գագաթներում ֆունկցիայի արժեքների կշիռային գումարի տեսքով: Գտնված են կշիռային գործակիցների կապերը եռանկյան անկյունների հետ: Ուսումնասիրված է բութ անկյան առկայության ազդեցությունը Լապլասի օպերատորի երեքկետային մոտարկման սխալանքի վրա: Ցույց է տրված, որ երեքկետային մոտարկման սխալանքի փոքրության աստիճանը անհրաժեշտ է որոշել եռանկյան ոչ թե մակերեսի, այլ պարագծի փոքրությամբ: Ապացուցված է, որ տրված պարագծով եռանկյունների մեջ երեքկետային մոտարկման ամենափոքր սխալանքն ունի հավասարակողմ եռանկյունը: Հետազոտվել են առաջարկված մոտեցման կիրառման հնարավորությունները էլեկտրամագնիսական դաշտի խնդիրների լուծման դեպքում: Ստացված արդյունքները հիմնավորում են Դելոնեի ցանցերի օգտագործման անհրաժեշտությունը դաշտային խնդիրների վերջավոր տարրերով մոդելավորման համար:

Առանցքային բառեր. էլեկտրամագնիսական դաշտ, ցանցային խնդիրներ, Լապլասի օպերատոր, մոտարկման սխալանք:

H.S. SUKIASYAN, H.A. TERZYAN

ON THE ERROR OF THREE-POINT APPROXIMATION OF THE LAPLACE OPERATOR

The approximation of the Laplace operator in a triangle as a weighted sum of function values at three vertices of the triangle is investigated. The connections of the weight coefficients with the angles of the triangle are found. The influence of the obtuse angle on the error of the three-point approximation of the Laplace operator is studied. It is shown that the smallness degree of a three-point approximation error should be determined by the smallness of the triangle perimeter. It is proved, that among triangles with fixed perimeter, the equilateral triangle has the minimal error. The possibility of applying the proposed method for solving the problems of the electromagnetic field is investigated. The obtained results substantiate the necessity for using the Delaunay mesh for the finite-element modeling of field problems.

Keywords: electromagnetic field, mesh problems, Laplace operator, approximation error.