

Известия НАН Армении, Математика, том 57, н. 6, 2022, стр. 17 – 31.

О L^p -ГРИДИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ ОТНОСИТЕЛЬНО ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ УОЛША

С. А. ЕПИСКОПОСЯН, Т. М. ГРИГОРЯН, Л. С. СИМОНЯН

<https://doi.org/10.54503/0002-3043-2022.57.6-17-31>

Ереванский государственный университет¹

E-mails: *sergoep@ysu.am; t.grigoryan@ysu.am; lusine.simonyan@ysu.am*

Аннотация. В настоящей работе построена функция $U \in L^1[0, 1)$ которая обладает гриди универсальностью относительно обобщенной системе Уолша.

MSC2020 number: 42A65; 42A20.

Ключевые слова: обобщенная система Уолша; коэффициенты Фурье; свойство универсальности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $a \geq 2$ фиксированное целое число и $\omega_a = e^{\frac{2\pi i}{a}}$.

Обобщенную систему Радемахера порядка a определяется следующим образом (см.[1]):

Положим для $n = 0$

$$(1.1) \quad \varphi_0(x) = \omega_a^k \quad x \in \left[\frac{k}{a}, \frac{k+1}{a} \right), \quad k = 0, 1, \dots, a-1,$$

а для любого $n \geq 1$

$$(1.2) \quad \varphi_n(x+1) = \varphi_n(x) = \varphi_0(a^n x).$$

Тогда обобщенная система Уолша порядка a определяется так:

$$\psi_0(x) = 1,$$

и если $n = \alpha_1 a^{n_1} + \dots + \alpha_s a^{n_s}$, где $n_1 > \dots > n_s$, $0 \leq \alpha_j < a$, $j = 1, 2, \dots, s$, тогда

$$(1.3) \quad \psi_n(x) = \varphi_{n_1}^{\alpha_1}(x) \cdot \dots \cdot \varphi_{n_s}^{\alpha_s}(x).$$

Обозначим обобщенную систему Уолша порядка a через Ψ_a . Отметим, что Ψ_2 является классической системой Уолша, а система Ψ_a является частным случаем системы Виленкина.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта N 21AG-1A066.

Основные свойства системы Ψ_a получены Г. Кристенсоном, Р. Пели, Ж. Файном, К. Ватари, Н. Вилениным и другими математиками (см. [1]- [7]).

Отметим некоторые свойства системы Ψ_a , которые будем использовать в дальнейшем:

- Каждая n -ая функция Радемахера имеет период a^{-n} и

$$(1.4) \quad \varphi_n(x) = \text{const} \in \Omega_a = \{1, \omega_a, \omega_a^2, \dots, \omega_a^{a-1}\}, \quad \Omega_a \subset \mathbb{C},$$

если $x \in \Delta_{n+1}^{(k)} = [\frac{k}{a^{n+1}}, \frac{k+1}{a^{n+1}})$, $k = 0, \dots, a^{n+1} - 1$, $n = 1, 2, \dots$, где $\mathbb{C}$ множество комплексных чисел.

- $(\varphi_n(x))^k = (\varphi_n(x))^m$, $\forall n, k \in \mathbb{N}$, и $m = k \pmod{a}$.
- $\psi_n(x)$ является конечным произведением функций Радемахера и принимает значения из Ω_a .
- Для всех $0 \leq i, j < a^s$ имеет место

$$(1.5) \quad \psi_i(x) \cdot \psi_j(a^s x) = \psi_{j \cdot a^s + i}(x).$$

- В частности, если $0 \leq j \leq a^k - 1$, то

$$(1.6) \quad \psi_{a^k + j}(x) = \varphi_k(x) \cdot \psi_j(x).$$

- Для всех $m = 1, 2, \dots$ имеет место

$$(1.7) \quad \int_0^1 \left| \sum_{j=0}^{a^m-1} \psi_j(x) \right| dx = 1.$$

- Ψ_a , $a \geq 2$ является полной ортонормированной системой в $L^2[0, 1)$ (см. [2] стр. 5, 30) и базисом $L^p[0, 1]$ при $p > 1$ (см. [7]).

Обозначим через $\chi_E(x)$ характеристическую функцию множества E , т.е.

$$(1.8) \quad \chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in E, \\ 0, & \text{если } x \notin E. \end{cases}$$

а через $L^p[0, 1)$, $p \geq 1$, класс всех функций $f(x)$ измеримых на $[0, 1)$ и удовлетворяющие условию

$$(1.9) \quad \int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty,$$

а через $\Psi_a = \{\psi_k(x)\}$ - обобщенную систему Уолша порядка a . Для заданной функции $f \in L^p[0, 1)$, $p \geq 1$, обозначим $c_k(f)$ коэффициенты Фурье по системе Ψ_a , т.е.

$$(1.10) \quad c_k(f) = \int_0^1 f(x) \overline{\psi_k(x)} dx,$$

а N -ую частичную сумму ряда Фурье по системе Ψ_a определим следующим образом:

$$(1.11) \quad S_N(x, f) = \sum_{k=0}^N c_k(f) \psi_k(x).$$

Спектром функции $f(x)$ ($\text{spec}(f)$) назовем множество индексов, для которых коэффициенты $c_k(f)$ отличны от нуля, т.е.

$$(1.12) \quad \text{spec}(f) = \{k \in N, c_k(f) \neq 0\}.$$

Определение 1.1. m -тый гриди аппроксимант элемента $f \in L^p[0, 1], p \geq 1$, по системе Ψ_a называется следующая сумма:

$$(1.13) \quad G_m(f, \phi) = \sum_{k \in \Lambda} c_k(f) \phi_k,$$

где $\Lambda \subset \{1, 2, \dots\}$ произвольный набор индексов мощности m удовлетворяющий условию:

$$|c_n(f)| \geq |c_k(f)|, \text{ если } n \in \Lambda, \quad k \notin \Lambda.$$

Скажем, что гриди алгоритм функции $f \in L^p[0, 1], p \geq 0$, сходится относительно Ψ_a , если последовательность $G_m(x, f)$ сходится к $f(t)$ по L^p норме.

Существует много работ о сходимости гриди алгоритм по разным системам (см. [8]-[16]). В частности Т. В. Кернер построил функцию из L^2 (потом и непрерывную) гриди алгоритм которой по тригонометрической системе расходится почти всюду (см. [10]). Далее В. Н. Темляков построил пример функции $f \in L^p$, $p \in [1, 2)$ (соотв. $p > 2$), гриди алгоритм которой по тригонометрической системе расходится по мере (по норме L^p , $p > 2$) (см. [11]). В работах [13] и [14] доказана, что существует функция $f \in L^p[0, 1], p \geq 1$, гриди алгоритма которой по системе Ψ_a , $a \geq 2$, расходится по норме $L^p[0, 1]$.

В работах [15] - [20] рассматривались вопросы сходимости жадного алгоритма по классическим системам с точки зрения знаменитых теорем исправления Н. Н. Лузина [21] и Д. Е. Меньшова [22].

В частности в работе [20] доказано следующее утверждение:

Теорема 1.1. Пусть $p > 2$, тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $f \in L^p[0, 1]$ существует функция $g \in L^p[0, 1]$, $|\{x \in [0, 1] : g \neq f\}| < \varepsilon$ такая, что гриди алгоритм функции g , по системе Ψ_a , $a \geq 2$, сходится в L^p .

В настоящей работе мы усиливаем теорему 1.1, доказав следующую теорему:

Теорема 1.2. *Существует функция $U \in L^1[0, 1)$ обладающая следующим свойством: для любых чисел $0 < \epsilon < 1$, $p > 1$, и для любой функции $f \in L^p[0, 1)$, $p \geq 1$, можно найти функцию $\tilde{f} \in L^p[0, 1)$, $\text{mes}\{x \in [0, 1); \tilde{f} \neq f\} < \epsilon$, такую, что гряды алгоритм функции $\tilde{f}$, по системе Ψ_a , $a \geq 2$, сходится в L^p и $|c_k(\tilde{f})| = c_k(U)$, $\forall k \in \text{spec}(\tilde{f})$.*

Имеет место также следующее утверждение:

Теорема 1.3. *Существует функция $U \in L^1[0, 1)$, обладающая следующим свойством: для любых $0 < \epsilon < 1$ и для любой функции $f \in \bigcap_{p>1} L^p$, можно найти функцию $\tilde{f} \in \bigcap_{p>1} L^p$, $\text{mes}\{x \in [0, 1); \tilde{f} \neq f\} < \epsilon$, такую что гряды алгоритм функции $\tilde{f}$, по системе Ψ_a , $a \geq 2$, сходится по всем L^p нормам одновременно и $|c_k(\tilde{f})| = c_k(U)$, $\forall k \in \text{spec}(\tilde{f})$.*

Функция U обладающая свойствами теорем 1.1 и 1.2 назовем L^p -гряды универсальной относительно системы Ψ_a , $a \geq 2$. Отметим, что существуют много работ посвященные существованию разным типам универсальных функций по разным системам (см. [23] - [31]).

Ответ на следующий вопрос нам не известен:

Вопрос 1. Справедливы ли Теоремы 1.2 и 1.3 для тригонометрической системы?

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ ЛЕММ

Мы воспользуемся Леммой 1, доказанной в [15].

Лемма 2.1. *Пусть даны интервал $\Delta = \Delta_m$ ранга a и числа $N_0 \in \mathbb{N}$, $\gamma \neq 0$, $\epsilon \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty)$. Тогда существуют измеримое множество $E \subset \Delta$ и полином Q по системе Ψ_a вида*

$$Q(x) = \sum_{k=N_0}^N a_k \psi_k(x) ,$$

удовлетворяющие условиям:

1) коэффициенты $\{a_k\}_{k=N_0}^N$ равны 0 или $\varkappa \cdot \gamma \cdot |\Delta|$, где $|\varkappa| = 1$, $\varkappa \in \mathbb{C}$,

2) $|E| > (1 - \epsilon)|\Delta|$,

3) $Q(x) = \begin{cases} \gamma : & \text{если } x \in E \\ 0 : & \text{если } x \notin \Delta \end{cases}$,

$$4) \max_{N_0 \leq M \leq N} \|Q(x)\|_p \leq \frac{a^2 |\gamma|}{\epsilon^{\frac{1}{1-\frac{1}{p}}}} |\Delta|^{\frac{1}{p}}.$$

Основным аппаратом для доказательства Теоремы 1.3 служит лемма 2.3, которую докажем с помощью следующей леммы:

Лемма 2.2. Пусть даны интервал $\Delta = \Delta_m$ ранга a и числа $m_0 \in \mathbb{N}$, $\gamma \neq 0$, $\delta \in (0, 1)$, $\theta \in (0, \frac{|\gamma|}{\delta})$, $0 < \theta < \frac{|\gamma|}{\delta}$. Тогда существуют функция $g(x)$, измеримое множество $E \subset \Delta$, полиномы $H(x)$ и $Q(x)$ по системе Ψ_a вида

$$H(x) = \sum_{k=a^{m_0-1}}^{a^m} b_k \psi_k(x),$$

$$Q(x) = \sum_{k=a^{m_0}}^{a^m-1} \varepsilon_k b_k \psi_k(x),$$

удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $0 < b_{k+1} < b_k < \theta$, $\forall k \in [a^{m_0}, a^m]$,
- 2) $\varepsilon_k = 0$ или $\varkappa_k$, где $|\varkappa_k| = 1$, $\forall k \in [a^{m_0}, a^m]$, $\varkappa \in \mathbb{C}$,
- 3) $\int_0^1 |H(x)| dx < \theta$,
- 4) $|E| > (1 - \delta) |\Delta|$,
- 5) $g(x) = \begin{cases} \gamma, & \text{если } x \in E \\ 0, & \text{если } x \notin \Delta \end{cases}$
- 6) $\left\| g(x) - Q(x) \right\|_p < \theta$.

Доказательство. Возьмем такое натуральное число $\nu_0 > 1$, чтобы

$$(2.1) \quad a^{-\nu_0} |\gamma| < \frac{\theta}{4},$$

и представим данный интервал в виде объединения интервалов следующим образом

$$(2.2) \quad \Delta = \bigcup_{\nu=1}^{a^{\nu_0}} \Delta_\nu,$$

где $|\Delta_\nu| = a^{-\nu} |\Delta|$.

Последовательно применяя лемму 1, найдем множества $E_\nu \subset \Delta_\nu$ и полиномов

$$(2.3) \quad Q_\nu(x) = \sum_{j=a^{m_\nu-1}}^{a^{m_\nu}-1} a_j \psi_j(x),$$

где $a_j = 0$ или $\varkappa_\nu \gamma |\Delta_j|$, если $j \in [a^{m_{\nu-1}}, a^{m_\nu})$, $|\varkappa_\nu| = 1$, $\nu \in \{1, \dots, a^{\nu_0}\}$, удовлетворяющие условиям:

$$(2.4) \quad |E_\nu| > (1 - \epsilon) |\Delta_\nu|,$$

$$(2.5) \quad Q_\nu(x) = \begin{cases} \gamma & : \text{ if } x \in \Delta_\nu \\ 0 & : \text{ if } x \notin \Delta_\nu \end{cases},$$

$$(2.6) \quad \left\| Q_\nu(x) \right\|_p < \frac{a^2 |\gamma|}{\delta^{1-\frac{1}{p}}} |\Delta_\nu|^{\frac{1}{p}}.$$

Определим

$$(2.7) \quad E = \bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} E_\nu,$$

$$(2.8) \quad b_k = \frac{|\gamma|}{a^{\nu_0}} |\Delta| + \frac{\theta}{2^{2k}}, \quad k \in [a^{m_0}, a^m), m = m_{\nu_0} - 1,$$

$$(2.9) \quad H(x) = \sum_{k=a^{m_0}}^{a^m-1} b_k \psi_k(x), \quad m = m_{\nu_0} - 1,$$

$$(2.10) \quad g(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \sum_{j=a^{m_{\nu-1}}}^{a^{m_\nu}-1} a_j \psi_j(x) = \sum_{j=a^{m_0}}^{a^m-1} a_j \psi_j(x),$$

$$(2.11) \quad Q(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \sum_{j=a^{m_{\nu-1}}}^{a^{m_\nu}-1} \varepsilon_j b_j \psi_j(x) = \sum_{j=a^{m_0}}^{a^m-1} \varepsilon_j b_j \psi_j(x),$$

где

$$(2.12) \quad \varepsilon_j = \begin{cases} 0, & \text{если } a_j = 0; \\ \varkappa_\nu, & \text{где } |\varkappa_\nu| = 1; \end{cases} \quad \forall j \in [a^{m_{\nu-1}}, a^{m_\nu}), \nu = 1, 2, \dots, a^{\nu_0}.$$

Из условий (14), (15), (17)-(21) следует

$$(2.13) \quad |E| > (1 - \delta) |\Delta|,$$

$$(2.14) \quad 0 < b_{k+1} < b_k < \theta, \forall k \in [a^{m_0}, a^m),$$

$$\varepsilon_k = 0, \text{ или } \varkappa_\nu, \text{ где } |\varkappa_\nu| = 1, k \in [a^{m_0}, a^m),$$

$$g(x) = \begin{cases} \gamma & : \text{ если } x \in E \\ 0 & : \text{ если } x \notin \Delta \end{cases},$$

$$\left\| g(x) - Q(x) \right\|_p < \theta.$$

Из (21), (22) имеем

$$H(x) = \frac{|\gamma|}{a^{\nu_0}} |\Delta| \left(\sum_{j=0}^{a^m-1} \psi_j(x) - \sum_{j=0}^{a^{m_0}-1} \psi_j(x) \right) + \theta \sum_{j=a^{m_0}}^{a^m-1} \frac{1}{2^{2j}} \psi_j(x) ,$$

Отсюда и из соотношений (7), (14) получим

$$\int_0^1 |H(x)| dx \leq \frac{2|\gamma|}{a^{\nu_0}} |\Delta| + \frac{\theta}{2} \leq \theta .$$

Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. Пусть даны числа $m_0 > 1$, $\theta, \delta \in (0, 1)$, и полином $f(x)$ по системе Ψ_a . Тогда существуют функция $g(x)$, измеримое множество $E \subset \Delta$ и полиномы $H(x)$, $Q(x)$ по системе Ψ_a вида

$$H(x) = \sum_{k=a^{m_0}}^{a^m-1} b_k \psi_k(x) ,$$

$$Q(x) = \sum_{k=a^{m_0}}^{a^m-1} \varepsilon_k b_k \psi_k(x),$$

удовлетворяющие условиям:

$$1) \quad 0 < b_{k+1} < b_k < \theta, \quad \forall k \in [a^{m_0}, a^m),$$

$$2) \quad |\varepsilon_k| = 0 \text{ или } 1, \quad \forall k \in [a^{m_0}, a^m),$$

$$3) \quad |E| > (1 - \delta) |\Delta|,$$

$$4) \quad \int_0^1 |H(x)| dx < \theta,$$

$$5) \quad g(x) = f(x), \quad \text{для всех } x \in E,$$

$$6) \quad \|g(x)\|_p < \frac{4\|f\|_p}{\delta^{1-\frac{1}{p}}},$$

$$7) \quad \left\| g(x) - Q(x) \right\|_p < \theta.$$

Доказательство. Пусть

$$(2.15) \quad f(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu}(x), \quad \sum_{\nu=1}^{\nu_0} |\Delta_\nu| = 1 ,$$

где Δ_ν интервал ранга a .

Последовательно применяя лемму 2.2, найдем множества $E_\nu \subset \Delta_\nu$, функции $g_\nu(x)$ и полиномы

$$(2.16) \quad H_\nu(x) = \sum_{k=a^{m_{\nu-1}}}^{a^{m_\nu}-1} b_k^{(\nu)} \psi_k(x) , 1 \leq \nu \leq \nu_0 ,$$

$$(2.17) \quad Q_\nu(x) = \sum_{k=a^{m_{\nu-1}}}^{a^{m_\nu}-1} \varepsilon_k b_k^{(\nu)} \psi_k(x) ,$$

где $\varepsilon_k^{(\nu)} = 0$, или $\varkappa_k \in \mathbb{C}, |\varkappa_k| = 1$, которые, для всех $1 \leq \nu \leq \nu_0$ и $k \in [a^{m_{\nu-1}}, a^{m_\nu})$, удовлетворяют следующим условиям:

$$(2.18) \quad 0 < b_1^{(\nu+1)} < b_{k+1}^{(\nu)} < b_k^{(\nu)} < b_{k+1}^{(\nu)} < b_{a^{m_{\nu-1}-1}}^{(\nu)-1} < \theta, \quad \forall k \in [a^{m_{\nu-1}}, a^{m_\nu}) ,$$

$$(2.19) \quad |\varepsilon_k^{(\nu)}| = 0 \quad \text{или} \quad 1, \forall k \in [a^{m_{\nu-1}}, a^{m_\nu}) ,$$

$$(2.20) \quad \int_0^1 |H_\nu(x)| dx < \frac{\theta}{2^\nu} ,$$

$$(2.21) \quad |E_\nu| > (1 - \delta) |\Delta_\nu| ,$$

$$(2.22) \quad g_\nu(x) = \begin{cases} \gamma_\nu & : \quad \text{if } x \in E_\nu \\ 0 & : \quad \text{if } x \notin \Delta_\nu \end{cases} ,$$

$$(2.23) \quad \left\| g_\nu(x) - Q_\nu(x) \right\|_p < \frac{\min\{\theta, \|f\|_p\}}{2^\nu} ,$$

$$(2.24) \quad \left\| Q_\nu(x) \right\|_p < \frac{3|\gamma_\nu|}{\delta^{1-\frac{1}{p}}} .$$

Определим

$$(2.25) \quad g(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} g_\nu(x) ,$$

$$(2.26) \quad E = \bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} E_\nu .$$

$$(2.27) \quad H(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} H_\nu(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \sum_{k=a^{m_{\nu-1}}}^{a^{m_\nu}-1} b_k^{(\nu)} \psi_k(x) = \sum_{k=a^{m_0}}^{a^m-1} b_k \psi_k(x) ,$$

$$(2.28) \quad Q(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_{\nu}(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \sum_{k=a^{m_{\nu-1}}}^{a^{m_{\nu}}-1} \varepsilon_k^{(\nu)} b_k^{(\nu)} \psi_k(x) = \sum_{k=a^{m_0}}^{a^m-1} \varepsilon_k b_k \psi_k(x),$$

где

$$(2.29) \quad m = m_{\nu_0}, \quad \varepsilon_k = \varepsilon_k^{(\nu)} \quad \text{и} \quad b_k = b_k^{(\nu)} \quad \text{при} \quad k \in [a^{m_{\nu-1}}, a^{m_{\nu}}), \quad 1 \leq \nu \leq \nu_0.$$

Из условий (28), (31), (32), (34), (35), (38), (41) и (31) имеем

$$g(x) = f(x) \quad \text{для} \quad x \in E,$$

$$|E| > 1 - \delta,$$

$$0 < b_{k+1} < b_k < \theta, |\varepsilon_k| = 0 \quad \text{или} \quad 1, \forall k \in [a^{m_0}, a^m).$$

Учитывая (35) и (36) для всех $\nu \in \{1, \dots, \nu_0\}$ получим

$$(2.30) \quad \|Q_{\nu}(x)\|_p \leq \frac{\|f\|_p}{2^{\nu}}, \quad x \notin \Delta_{\nu}.$$

Из условий (29), (33), (36) - (38) и (43) имеем

$$\int_0^1 |H(x)| dx \leq \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \int_0^1 |H_{\nu}(x)| dx < \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \frac{\theta}{2^{\nu}} \leq \theta.$$

$$\left\| g(x) - Q(x) \right\|_p < \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \left\| g_{\nu}(x) - Q_{\nu}(x) \right\|_p \leq \min\{\theta, \|f\|_p\}.$$

$$\|Q(x)\|_p < \frac{4\|f\|_{\infty}}{\delta^{1-\frac{1}{p}}}.$$

Учитывая (36) - (38) получим

$$\|g(x)\|_p < \frac{5\|f\|_p}{\delta^{1-\frac{1}{p}}}.$$

Лемма 2.3 доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Обозначим последовательность всех полиномов по системе Ψ_a с рациональными коэффициентами следующим образом:

$$(3.1) \quad \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Пусть дана последовательность

$$(3.2) \quad \{p_n\}, \quad p_n \uparrow \infty.$$

Последовательно применяя лемму 3, для любого $n \geq 1$ можем определить последовательности функций $\{g_n^{(j)}(x)\}_{j=1}^n$, множеств $\{E_n^{(j)}\}_{j=1}^n$ и полиномов по системе Ψ_a вида

$$(3.3) \quad H_n^{(j)}(x) = \sum_{k=M_n^{(j-1)}}^{M_n^{(j)}-1} b_k^{(n,j)} \psi_k(x), \quad 1 \leq j \leq n, \quad b_k^{(n,j)} \searrow,$$

$$(3.4) \quad Q_n^{(j)}(x) = \sum_{k=M_n^{(j-1)}}^{M_n^{(j)}-1} \varepsilon_k^{(n,j)} b_k^{(n,j)} \psi_k(x), \quad 1 \leq j \leq n, \quad (|\varepsilon_k^{(n,j)}| = 1 \text{ или } 0),$$

где

$$(3.5) \quad \begin{aligned} M_n^{(j)} &= a^{m_n^{(j)}}, 0 \leq M_1^{(0)} < M_1^{(1)} = M_2^{(0)} < M_2^{(1)} < M_2^{(2)} < \\ &< M_{n-1}^{(n-1)} = M_n^{(0)} < M_n^{(1)} < \dots < M_n^{(n)} = M_{n+1}^{(0)} < M_{n+1}^{(1)} \dots, \end{aligned}$$

удовлетворяющие условиям:

$$(3.6) \quad g_n^{(j)}(x) = f_n(x) \quad \text{при} \quad x \in E_n^{(j)},$$

$$(3.7) \quad |E_n^{(j)}| = 1 - 2^{-j},$$

$$(3.8) \quad \|g_n^{(j)}(x) - Q_n^{(j)}(x)\|_{p_n} < 2^{-4n}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

$$(3.9) \quad \|g_n^{(j)}(x)\|_{p_n} < 5 \cdot 2^j \|f_n\|_{p_n}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

$$(3.10) \quad \left(\int_0^1 |H_n^{(j)}(x)| dx \right) < 4^{-(n+j)}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Определим функцию $U(x)$ последовательность чисел b_k следующим образом:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} U(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n \left(H_n^{(j)}(x) \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=M_n^{(j-1)}}^{M_n^{(j)}-1} b_k^{(n,j)} \psi_k(x) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \psi_k(x), \end{aligned}$$

где

$$(3.12) \quad b_k = b_k^{(n,j)} \quad \text{при} \quad k = M_n^{(j-1)}, \dots, M_n^{(j)} - 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Нетрудно заметить, что

$$(3.13) \quad \int_0^1 |U(x)| dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 |H_n^{(j)}(x)| dx \right) < \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n 4^{-(n+j)} < 1.$$

$$(3.14) \quad \left\| U - \sum_{k=0}^{M_n^{(n)}-1} b_k^{(n,j)} \psi_k(x) \right\|_1 = \left\| U - \sum_{n=q}^{\infty} \sum_{j=0}^n H_n^{(j)} \right\|_1 < 2^{-q}$$

Отсюда и из (54) имеем

$$(3.15) \quad c_k(U) > 0, \quad c_k(U) \downarrow 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$(3.16) \quad b_k = c_k(U), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть $f(x) \in \bigcap_{p>1} L^p[0, 1]$. Нетрудно заметить, что можно выбрать последовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ из (44) так, что

$$(3.17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^n f_{k_j}(x) - f(x) \right\|_{p_n} = 0,$$

$$(3.18) \quad \|f_{k_n}(x)\|_{p_n} \leq 4^{-2n}, \quad n > 1,$$

где

$$(3.19) \quad k_1 > j_0 = [\log_{\frac{1}{2}} \delta] + 1$$

($[a]$ - целая часть числа a).

Положим

$$Q_1(x) = Q_{k_1}^{(j_0+1)}, \quad E_1 = E_{k_1}^{(j_0+1)}, \quad g_1 = g_{k_1}^{(j_0+1)}.$$

Предположим, что числа $k_1 = \nu_1 < \dots < \nu_{q-1}$, функции $f_{\nu_n}(x)$, $g_n(x)$, $1 \leq n \leq q-1$, множества E_n , $1 \leq n \leq q-1$ и полиномы

$$Q_n(x) = Q_{\nu_n}^{(n+j_0)}(x) = \sum_{k=M_{\nu_n}^{(n+j_0-1)}}^{M_{\nu_n}^{(n+j_0)}-1} \delta_k^{(\nu_n, n+j_0)} b_k \psi_k(x)$$

уже определены и для всех $1 \leq n \leq q-1$ удовлетворяют условиям:

$$(3.20) \quad g_n(x) = f_{k_n}(x), \quad x \in E_n,$$

$$(3.21) \quad \left\| \sum_{k=1}^n [Q_k(x) - g_k(x)] \right\|_{p_n} < 4^{-(n-1)},$$

$$(3.22) \quad |E_n| > 1 - \delta 2^{-n},$$

$$(3.23) \quad \|g_n(x)\|_{p_n} < 5\delta^{-1} 2^{-(n-8)}.$$

Нетрудно заметить, что можно выбрать функцию $f_{\nu_q}(x)$ ($\nu_q > \nu_{q-1}$) из последовательности (44) так, что

$$(3.24) \quad \left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [Q_i(x) - g_i(x)] \right) \right\|_{p_q} < 4^{-2q}.$$

Из условий (61), (64) и (67) имеем

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \|f_{\nu_q}\|_{p_q} &\leq \left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [Q_i(x) - g_i(x)] \right) \right\|_{p_q} + \\ &+ \|f_{k_q}\|_{p_q} + \left\| \sum_{i=1}^{q-1} [Q_i(x) - g_i(x)] \right\|_{p_q} < \lambda \cdot 4^{-(q-3)}. \end{aligned}$$

Положим

$$(3.26) \quad g_q(x) = f_{k_q}(x) + [g_{\nu_q}^{(q+j_0)}(x) - f_{\nu_q}(x)],$$

$$(3.27) \quad Q_q(x) = Q_{\nu_q}^{(q+j_0)}(x) = \sum_{k=M_{\nu_q}^{(q+j_0-1)}}^{M_{\nu_q}^{(q+j_0)}-1} \delta_k^{(\nu_q, n+j_0)} b_k \psi_k(x),$$

$$(3.28) \quad E_q(x) = E_{\nu_q}^{(q+j_0)}.$$

Учитывая соотношения (49) и (63) получим

$$(3.29) \quad g_q(x) = f_{k_q}(x), \quad x \in E_q.$$

Из (51), (64) и (67) имеем

$$(3.30) \quad \begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^q [Q_j(x) - g_j(x)] \right\|_{p_q} &= \left\| \sum_{j=1}^{q-1} [Q_j(x) - g_j(x)] + Q_q(x) - g_q(x) \right\|_{p_q} \leq \\ &\leq \left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [Q_i(x) - g_i(x)] \right) \right\|_{p_q} + \\ &+ \|g_{\nu_q}^{(q+j_0)} - Q_{\nu_q}^{(q+j_0)}\|_{p_q} < 4^{-(q-1)}. \end{aligned}$$

Из соотношений (67) - (69), (73) следует, что

$$\begin{aligned} \|g_q(x)\|_{p_q} &\leq \left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [Q_i(x) - g_i(x)] \right) \right\|_{p_q} + \\ &+ \left\| \sum_{j=1}^{q-1} [Q_j(x) - g_j(x)] \right\|_{p_q} + \|g_{\nu_q}^{(q+j_0)}\|_{p_q} < \end{aligned}$$

$$(3.31) \quad < 4^{-2q} + 4^{-q+2} + B \cdot 2^{q+j_0} \|f_{\nu_q}(x)\|_{p_q} < \frac{B\lambda}{\varepsilon} \cdot 2^{-q+8}.$$

Таким образом, по индукции определяются последовательности функций $\{g_q(x)\}_{q=1}^{\infty}$, множеств $\{E_q\}_{q=1}^{\infty}$ и полиномов $\{Q_q(x)\}$, которые удовлетворяют (63) - (66) для всех $q \geq 1$.

Положим

$$(3.32) \quad E = \bigcap_{q=1}^{\infty} E_q.$$

Из (65) следует, что

$$|E| > 1 - \delta.$$

Пусть $p > 1$ любое число из (45), тогда существует q_0 такое, что $p < p_q$ для всех $q \geq q_0$. Тогда, учитывая (66), имеем

$$(3.33) \quad \left\| \sum_{q=q_0}^{\infty} g_q(x) \right\|_p \leq \sum_{q=1}^{\infty} \|g_q\|_{p_q} < \infty.$$

Определим функцию $\tilde{f}(x)$ и последовательность чисел $\{\varepsilon_k\}$ следующим образом:

$$(3.34) \quad \tilde{f}(x) = \sum_{q=1}^{\infty} g_q(x),$$

$$(3.35) \quad \varepsilon_k = \begin{cases} \varepsilon_k^{(\nu_q, q+j_0)}, k \in [M_{\nu_q}^{(q+j_0-1)}, M_{\nu_q}^{(q+j_0)}], & q = 1, 2, \dots \\ 0, & k \notin \bigcup_{q=1}^{\infty} [M_{\nu_q}^{(q+j_0-1)}, M_{\nu_q}^{(q+j_0)}] \end{cases},$$

$$\tilde{f}(x) \in \bigcap_{p>1} L^p[0, 1], \quad \tilde{f}(x) = f(x), \quad x \in E,$$

Из (63), (64), (68), (69) - (71), (75) - (77) для всех $q \geq q_0$ имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k=0}^{M_{\nu_{q-1}}^{(q-1+j_0)}-1} \varepsilon_k b_k \psi_k(x) - \tilde{f}(x) \right\|_p \leq \\ & \leq \left\| \sum_{k=0}^{M_{\nu_{q-1}}^{(q-1+j_0)}-1} \varepsilon_k b_k \psi_k(x) - \tilde{f}(x) \right\|_{p_q} = \left\| \sum_{n=1}^{q-1} \left(\sum_{k=M_{\nu_n}^{(n+j_0-1)}}^{M_{\nu_n}^{(n+j_0)}-1} \varepsilon_k^{(\nu_n, n+j_0)} b_k \psi_k(x) \right) - \tilde{f}(x) \right\|_{p_q} = \\ & = \left\| \sum_{n=1}^{q-1} Q_n(x) - \tilde{f}(x) \right\|_{p_q} \leq \left\| \sum_{n=1}^{q-1} (Q_n(x) - g_n(x)) \right\|_{p_q} + \sum_{n=q}^{\infty} \|g_n(x)\|_{p_q} \leq 5\delta^{-1} \cdot 2^{-(q-10)}, \end{aligned}$$

Учитывая (59), (74) и (77) получим

$$c_k(\tilde{f}) = \int_0^1 \tilde{f}(x) \overline{\psi_k(x)} dx = \varepsilon_k b_k = \varepsilon_k c_k(U), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда и из (59), (78) следует, что

$$|c_k(\tilde{f})| = c_k(U), \quad k \in \text{spec}(\tilde{f})$$

и следовательно, ненулевые коэффициенты Фурье исправленной функции $\tilde{f}$ по модулю убывают на $\text{spec}(\tilde{f})$. Учитывая определения гриди аппроксиманта для любого $n \in \mathbb{N}$ можно найти подпоследовательность M_n такую, что $S_{M_n}(\tilde{f}) = G_n(\tilde{f})$ и поскольку система Ψ_a является базисом во всех L^p , то получаем, что $G_n(\tilde{f})$ сходится к $\tilde{f}$ по всем нормам L^p .

Если $f \in L^p$, при фиксированном $p > 1$, то подобными рассуждениями доказывается, что гриди алгоритм исправленной функции $\tilde{f}$ сходится к $\tilde{f}$ по норме L^p . Теоремы 1.2 и 1.3 доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. H. E. Chrestenson, "A class of generalized Walsh functions", Pacific J. Math., **45**, 17 – 31 (1955).
2. B. I. Golubov, A. Efimov, V. Skvortsov, Walsh Series and Transforms, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1991).
3. R. E. A. C. Paley, "A remarkable set of orthogonal functions", Proc. London Math. Soc., **34**, 241 – 279 (1932).
4. J. Fine, "The generalized Walsh functions", Trans. Amer. Math. Soc., **69**, 66 – 77 (1950).
5. C. Watari, "On generalized Walsh-Fourier series", Tohoku Math. J., **10**, 211 – 241 (1958).
6. N. Vilenkii, "On a class of complete orthonormal systems", AMS Transl., **28**, 1 – 35 (1963).
7. W. Young, "Mean convergence of generalized Walsh - Fourier series", Trans. Amer. Math. Soc., **218**, 311 – 320 (1976).
8. R. A. DeVore, V. N. Temlyakov, "Some remarks on greedy algorithms", Advances in Computational Math., **5**, 173 – 187 (1996).
9. S. V. Konyagin and V. N. Temlyakov, "A remark on Greedy approximation in Banach spaces", East Journal on Approximations, **5:1**, 1 – 15 (1999).
10. T. W. Körner, "Divergence of decreasing rearranged Fourier series", Ann. of Math., **144**, 167 – 180 (1996).
11. V. N. Temlyakov, "Nonlinear methods of approximation", Found. Comput. Math., **3**, 33 – 107 (2003).
12. P. Wojtaszczyk, "Greedy algorithm for general biorthogonal systems", Journal of Approximation Theory, **107**, 293 – 314 (2000).
13. R. Gribonval, M. Nielsen, "On the quasi-greedy property and uniformly bounded orthonormal systems", <http://www.math.auc.dk/research/reports/R-2003-09.pdf>.
14. S. A. Episkoposian, "On greedy algorithms with respect to generalized Walsh system", Global Journal of Pure and Applied Mathematics, **3**, 77 – 86 (2007).
15. М. Г. Григорян, "Модификации функций, коэффициенты Фурье и нелинейная аппроксимация", Мат. сб., no. 3, 49 – 78 (2012).
16. M. G. Grigorian and R. E. Zink, "Greedy approx. with respect to certain subsystems of the Walsh orthonormal system", Proc. of the Amer. Mat. Soc., **134:12**, 3495 – 3505 (2006).
17. M. G. Grigorian, "Uniform convergence of the greedy algorithm with respect to the Walsh system", Studia. Math., **198(2)**, 197 – 206 (2010).
18. М. Г. Григорян, А. А. Саргсян, "Нелинейная аппроксимация непрерывных функций по системе Фабера-Шаудера", Матем. сб., **199:5**, 3 – 26 (2008).
19. М. Г. Григорян, С. Л. Гогян, "Нелинейная аппроксимация по системе Хаара и модификации функций", Analysis Mathematica, **32**, 49 – 80 (2006).

20. S. A. Episkoposian, M. G. Grigorian, " L^p -convergence of greedy algorithm by generalized Walsh system", Journal of Mathematical Analysis and Applications, **389**, Is. 2, 1374 – 1379 (2012).
21. N. N. Luzin, "On the fundamental theorem of the integral calculus", Mat. Sb. 28, 266 – 294 (1912).
22. D. E. Men'shov, "Sur la representation des fonctions mesurables des series trigonometriques", Mat. Sbornik, **9**, 667 – 692 (1941).
23. M. Fekete, "Untersuchungen über absolut Reihen, mit Anwendung auf dirichletsche und Fouriersche Reihen", Math. És. Termész. Ért., **32**, 389 – 425 (1914).
24. J. Pál, "Zwei kleine Bemerkungen", Tôhoku Math. J., 42 – 43 (1914).
25. G. D. Birkhoff, "Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières", C. R. Acad. Sci. Paris, **189**, 473 – 475 (1929).
26. J. Marcinkiewicz, "Sur les nombres dérivés", Fund. Math., **24**, 305 – 308 (1935).
27. G. R. MacLane, "Sequences of derivatives and normal families", J. Analyse Math., **2**, 2 – 87 (1952).
28. K.-G. Grosse-Erdmann, "Holomorphe Monster und universelle Funktionen", Mitt.Math. Sem. Giessen, **176**, 1 – 81 (1987).
29. М. Г. Григорян, К. А.Навасардян, "Универсальные функции в задачах "исправления" функций, обеспечивающего сходимость рядов Фурье - Уолша", Изв. РАН. Сер. матем., **80**:6, 65 – 91 (2016).
30. M. G. Grigoryan, T. M. Grigoryan, A. A. Sargsyan, "On the universal function for weighted spaces $L^p_\mu[0, 1]$, $p \geq 1$, и $L^0[0, 1]$ ", Banach J. Math. Anal., **12**, no. 1, 104 – 125 (2018).
31. М. Г. Григорян, Л. С. Симонян, "Двойные универсальные ряды Фурье", Известия НАН РА, Математика, **54**, но. 6, 42 – 53 (2019).

Поступила 18 апреля 2022

После доработки 18 июля 2022

Принята к публикации 24 августа 2022