

О ПРОИЗВЕДЕНИИ ПОДМНОЖЕСТВ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ

В. С. АТАБЕКЯН, В. Г. МИКАЕЛЯН

<https://doi.org/10.54503/0002-3043-2022.57.6-12-16>

Ереванский государственный университет¹
E-mails: *avarujan@ysu.am*, *mikvazgen@gmail.com*

Аннотация. Доказывается, что для любого конечного симметризованного подмножества S свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ имеет место неравенство $|S^t| \geq 4 \cdot 2.9^{t/(400s)^3}$, где s – наименьший нечетный делитель числа n , удовлетворяющий неравенству $s \geq 1003$.

MSC2020 number: 20F50; 20F05.

Ключевые слова: степень подмножеств; произведение множеств; бернсайдова группа; рост группы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть S конечное подмножество некоторой группы. Через S^t обозначим множество всевозможных произведений вида $a_1 \cdots a_t$, где $a_i \in S$. Мей-Чу Чанг (см. [1]) доказала, что для любого конечного подмножества свободной группы, не содержащегося ни в какой циклической подгруппе существуют константы $c, \delta > 0$ такие, что справедлива оценка $|S^3| > c|S|^{1+\delta}$. А. А. Разборов (см. [2]) улучшил эту оценку и показал, что существует константа $c > 0$ такая, что для любого конечного подмножества S свободной группы, не содержащегося ни в какой циклической подгруппе, справедливо неравенство $|S^3| > |S|^2/(\log|S|)^c$. С.Р.Сафин [3] позже усилил этот результат, показав, что существуют такие константы $c_n > 0$, что для любого конечного подмножества S свободной группы, не содержащегося ни в какой циклической подгруппе, справедливо неравенство $|S^t| > c_t|S|^{[(t+1)/2]}$ при всех натуральных t . Другие результаты по аддитивной комбинаторике можно найти в [4].

¹Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21Т-1А213. Исследование второго автора выполнено при финансовой поддержке КН РА и РФФИ (РФ) в рамках совместной научной программы 20RF-152 и 20-51-05010 соответственно.

Мы будем рассматривать степени конечных симметризованных подмножества S свободных бернсайдовых групп нечетного периода $n \geq 1003$. При этом подмножество S называется симметризованной, если из $a \in S$ следует $a^{-1} \in S$.

Нашей целью является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Для любого конечного симметризованного подмножества S свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ имеет место неравенство $|S^t| \geq 4 \cdot 2.9^{t/(400s)^3}$, где s – наименьший нечетный делитель числа n , удовлетворяющий неравенству $s \geq 1003$.*

Напоминаем, что относительно свободная группа ранга m многообразия групп, удовлетворяющих тождеству $x^n = 1$, обозначается через $B(m, n)$ и называется свободной периодической или *свободной бернсайдовой группой* периода n и ранга m . Более просто

$$B(m, n) = \langle a_1, a_2, \dots, a_m; x^n = 1 \rangle.$$

Количество элементов множества S^t принято обозначать также через $\gamma_S(t)$. Число

$$\lambda(G, S) = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_S(t)^{\frac{1}{t}} \leq \gamma_S(1) = |S|$$

называется степенью экспоненциального роста группы G относительно S .

Если $\inf_S \lambda(G, S) > 1$, где инфимум берется по всем конечным порождающим множествам S , то скажем, что группа G имеет *равномерный экспоненциальный рост*. Из теоремы 1.1 вытекает

Следствие 1.1. *(см. [5], [6]) Для любого $m \geq 2$ и нечетного $n \geq 1003$ любая конечно порожденная нециклическая подгруппа H свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ имеет равномерный экспоненциальный рост.*

Отметим, что вопрос имеют ли бесконечные свободные бернсайдовые группы $B(m, n)$ равномерный экспоненциальный рост был поставлен де ля Арпом в [7].

В дальнейшем изложении мы без специальных ссылок будем использовать обозначения и терминологию монографии [8] и статьи [9]. При ссылках на утверждения из [8] мы используем принятые в ней стандартные обозначения. Например, VI.2.4 [8] означает пункт 4 параграфа 2 главы VI монографии [8].

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

Пусть S – произвольное множество, порождающее нециклическую подгруппу $\langle S \rangle_{B(2, s)}$ группы $B(2, s)$, где $s \geq 1003$ фиксированное нечетное число. Согласно

теореме С. И. Адяна VI.3.3[8], каждая абелевая подгруппа группы $B(m, s)$ - циклическая, следовательно подгруппа $\langle S \rangle_{B(2, s)}$ неабелева. Поэтому можно выбрать пару не перестановочных элементов X и Y из множества S .

Отправной точкой для нас служит следующее утверждение доказанное В. Атабекяном в работе [10].

Лемма 2.1. (Теорема 2[10]). Пусть коммутатор $[A^d, Z^{-1}B^dZ]$ в группе $B(2, s, \alpha - 1)$ равен элементарному периоду C ранга α , где A - элементарный период ранга γ , B - элементарный период ранга β , $Z \in \mathcal{M}_{\alpha-1}$ ($\gamma \leq \beta \leq \alpha - 1$), $d = 191$, $s \geq 1003$ - произвольное нечетное число и слова A^q и B^q входят в некоторые слова из множеств $\mathcal{M}_{\gamma-1}$ и $\mathcal{M}_{\beta-1}$ соответственно. Тогда слова

$$u \Rightarrow C^{200}AC^{200}A^2 \cdot \dots \cdot A^{s-1}C^{200}, \quad v \Rightarrow C^{300}AC^{300}A^2 \cdot \dots \cdot A^{s-1}C^{300}$$

являются базисом свободной бернсайдовой подгруппы ранга 2 группы $B(2, s)$.

Чтобы пользоваться леммой 2.1 докажем, что произвольная нециклическая подгруппа $\Delta \Rightarrow \langle X, Y \rangle$ группы $B(2, s)$ содержит такую нециклическую подгруппу вида $U \langle A, C \rangle U^{-1}$, что C - элементарный период некоторого ранга α и $C \stackrel{B(m, s, \alpha-1)}{=} [A^d, Z^{-1}B^dZ]$, где A и B - минимизированные элементарные периоды некоторых рангов γ и β , $Z \in \mathcal{M}_{\alpha-1}$, $\gamma \leq \beta \leq \alpha - 1$, $d = 191$ и длины слов UAU^{-1} и UCU^{-1} относительно порождающих X и Y удовлетворяют неравенствам

$$|UAU^{-1}|_{\{X, Y\}} < (450s)^2 \text{ и } |UCU^{-1}|_{\{X, Y\}} < (450s)^2.$$

Заметим, что леммы 2.8, 3.2, 6.6 и 7.2 из работы [9] остаются справедливыми, если в их формулировках и доказательствах эквивалентность в ранге α заменить на эквивалентность в ранге α в смысле монографии [8], а равенство слов в группе Γ_α заменить на равенство в группе $B(2, s, \alpha)$.

В силу VI.2.4[8] и VI.1.2[8] для некоторых слов T , Z и минимизированных элементарных периодов F и E , имеющих ранги σ и ρ соответственно, имеют место равенства $X \stackrel{B(2, s)}{=} T F^i T^{-1}$ и $T^{-1}Y T \stackrel{B(2, s)}{=} Z^{-1}E^j Z$. Без ограничения общности, можем предположить, что $\sigma \leq \rho$, а в силу VI.2.4[8] и IV.1.13[8] можем считать, что $Z \in \mathcal{M}_\xi \cap \mathcal{A}_{\xi+1}$ для некоторого $\xi \geq \rho$. Пусть $\text{НОД}(i, s) = k$ и r такое целое число, что $|r| < s$ и $F^{ir} = F^k$. Выбрав число $s \Rightarrow [s/3k]$, получим $s/5 < sk < s/3$. Таким образом $X^{rs} = T F^{irs} T^{-1} = T F^{ks} T^{-1}$ и $186 < ks < \frac{s+1}{2} - 148$, поскольку $s \geq 1003$. Итак, для слова $X_1 \Rightarrow X^{rs}$ имеем $X_1 = T F^{ks} T^{-1}$ и $|X_1|_{\{X, Y\}} \leq |rs||X|_{\{X, Y\}} < s^2/3$. Аналогично можно найти такой $Y_1 \in \langle Y \rangle_{B(2, s)}$

и такие числа t и l , что $186 < tl < \frac{s+1}{2} - 148$, $T^{-1}Y_1 T = Z^{-1} E^{tl} Z$ и $|Y_1|_{\{X, Y\}} < s^2/3$.

По теореме VI.3.1[8] $[X_1, Y_1] \neq 1$. В силу лемм 3.2[9], 7.2[9] и 2.8[9] коммутатор

$$[X_1, Y_1] = T [F^{ks}, Z^{-1} E^{tl} Z] T^{-1}$$

сопряжен в $B(m, s)$ некоторому минимизированному элементарному периоду D некоторого ранга $\delta \geq \rho + 1$. Пусть $T^{-1} [X_1, Y_1] T = Z_1^{-1} D Z_1$, где $Z_1 \in \mathcal{M}_\lambda \cap \mathcal{A}_{\lambda+1}$ для некоторого $\lambda \geq \delta$. Тогда вновь применив леммы 3.2[9], 7.2[9] и 2.8[9], получим, что коммутатор $[X_1, [X_1, Y_1]^d] = T [F^{ks}, Z_1^{-1} D^d Z_1] T^{-1}$ сопряжен в $B(2, s)$ некоторому минимизированному элементарному периоду B некоторого ранга $\mu \geq \delta + 1$. Допустим $T^{-1} [X_1, [X_1, Y_1]^d] T = Z_2^{-1} B Z_2$. Таким образом, в подгруппе $\Delta \triangleq \langle X, Y \rangle_{B(2, s)}$ содержатся элементы $[X_1, Y_1] = T Z_1^{-1} D Z_1 T^{-1}$ и $[X_1, [X_1, Y_1]^d] = T Z_2^{-1} B Z_2 T^{-1}$. Можно считать, что $Z_3^{-1} \triangleq Z_1 Z_2^{-1} \in \mathcal{M}_\nu \cap \mathcal{A}_{\nu+1}$, где $\nu \geq \mu$. По лемме 3.2[9] найдем приведенную форму C коммутатора $[D^d, Z_3^{-1} B^d Z_3]$. Согласно лемме 7.2[9] C - элементарный период некоторого ранга $\tau \geq \mu + 1$. В силу (3.6)[9] $C \stackrel{B(2, s, \mu)}{=} w [D^d, Z_3^{-1} B^d Z_3] w^{-1}$, где $w \in \Theta(D, D_1)$.

Рассмотрим элементарные периоды $A \triangleq w D w^{-1}$ и $C = w [D^d, Z_3^{-1} B^d Z_3] w^{-1}$. Из определений следует, что

$$A = w Z_1 T^{-1} [X_1, Y_1] T Z_1^{-1} w^{-1}$$

и

$$C = w Z_1 T^{-1} \left[[X_1, Y_1]^d, [X_1, [X_1, Y_1]^d]^d \right] T Z_1^{-1} w.$$

Значит, если $U \triangleq T Z_1^{-1} w^{-1}$, то $U A U^{-1} \in \Delta$, $U C U^{-1} \in \Delta$ и

$$(2.1) \quad |U A U^{-1}|_{\{X, Y\}} = |[X_1, Y_1]|_{\{X, Y\}} < \frac{s^2}{3} |X, Y|_{\{X, Y\}} = \frac{4}{3} s^2,$$

$$(2.2) \quad |U C U^{-1}|_{\{X, Y\}} = |[X_1, Y_1]^d, [X_1, [X_1, Y_1]^d]^d|_{\{X, Y\}} < \frac{s^2}{3} (8d + 2d(8d + 2)).$$

Остается заметить, что $\frac{s^2}{3} (8d + 2d(8d + 2)) < (450s)^2$.

Поскольку подгруппы $\langle u, v \rangle_{B(2, s)}$ и $\langle U u U^{-1}, U v U^{-1} \rangle_{B(2, s)}$ изоморфны, то в силу леммы 2.1 элементы $U u U^{-1}$, $U v U^{-1}$ являются базисом свободной бернсайдовой подгруппы ранга 2 группы $B(2, s)$. Очевидно,

$$U u U^{-1} = (U C U^{-1})^{200} (U A U^{-1}) \cdot \dots \cdot (U A U^{-1})^{s-1} (U C U^{-1})^{200},$$

$$U v U^{-1} = (U C U^{-1})^{300} (U A U^{-1}) \cdot \dots \cdot (U A U^{-1})^{s-1} (U C U^{-1})^{300}.$$

По выбору имеем $UuU^{-1}, UvU^{-1} \in \langle X, Y \rangle_{B(m,s)}$. Используя неравенства (1) и (2), получаем

$$\begin{aligned} |UuU^{-1}|_{\{X,Y\}} &< \frac{s(s-1)}{2}4s^2 + 200s(450s)^2; \\ |UvU^{-1}|_{\{X,Y\}} &< \frac{s(s-1)}{2}4s^2 + 300s(450s)^2. \end{aligned}$$

Заметим, что $|UuU^{-1}|_S \leq |UuU^{-1}|_{\{X,Y\}}$, $|UvU^{-1}|_S \leq |UvU^{-1}|_{\{X,Y\}}$, поскольку $\{X, Y\} \subseteq S$. В качестве L можно взять число $2s^2(s-1) + 300s(450s)^2 < (400s)^3$.

Перейдем к доказательству теоремы 1.1. В силу доказанных выше неравенств в группе $\langle X, Y \rangle$ содержатся два элемента u, v длины $< L = (400s)^3$, порождающих свободную бернсайдову группу ранга 2. По известной теореме С. И. Адяна группы $B(2, s)$ имеют экспоненциальный рост. Точнее, согласно теореме 2.15, гл. VI[8] в $\{u, v\}^k$ содержатся $\gamma(k) > 4 \cdot 2.9^{k-1}$ попарно различных элемента. Значит в множестве S^t , где $t \geq L$, содержатся $\gamma([t/L])$ попарно различных элемента, поскольку в шаре радиуса L содержатся два элемента порождающие подгруппу содержащую $\gamma([t/L])$ попарно различных элементов из S^t . Таким образом, $|S^t| \geq 4 \cdot 2.9^{[t/(400s)^3]}$. Чтобы завершить доказательство остается заметить, что свободная бернсайдова группа $B(m, n)$ гомоморфно отображается на $B(m, s)$, если s делит n .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Mei-Chu Chang, “Product theorems in SL_2 and SL_3 ”, J. Inst. Math. Jussieu, **7**(1): 1 — 25 (2008).
- [2] A. A. Razborov. “A product theorem in free groups”, Ann. of Math. (2), **179**(2), 405 — 429 (2014).
- [3] S. R. Safin, “Powers of subsets of free groups”, Mat. Sb., **202**(11), 97 — 102 (2011).
- [4] Terence Tao and Van Vu, Additive Combinatorics, **105** of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge (2006).
- [5] V. S. Atabekyan, “Uniform nonamenability of subgroups of free Burnside groups of odd period”, Mat. Zametki, **85**:4, 516 — 523 (2009); Math. Notes, **85**:4, 496 — 502 (2009).
- [6] V. S. Atabekyan, “Monomorphisms of free Burnside groups”, Math. Notes, **86**(4), 457 — 462 (2009).
- [7] P. de la Harpe, “Uniform growth in groups of exponential growth”, Geom. Dedicata, **95**, 1 — 17 (2002).
- [8] S. I. Adian, The Burnside Problem and Identities in Groups, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **95**, Springer-Verlag, Berlin (1979).
- [9] S. I. Adian, I. G. Lysenok, “On groups all of whose proper subgroups of which are finite cyclic”, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **55**:5, 933 — 990 (1991); Izv. Math., **39**:2, 905 — 957 (1992).
- [10] V. S. Atabekyan, “On subgroups of free Burnside groups of odd period $n \geq 1003$ ”, Izv. Math., **73**(5), 861 — 892 (2009).

Поступила 31 марта 2022

После доработки 25 августа 2022

Принята к публикации 30 августа 2022