ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и НПУА. Сер. ТН. 2015. Т. LXVIII, N 1.

УДК 621.52 + 511.52

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

С.О. СИМОНЯН, М.А. АДАМЯН

# ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОРРЕКТНЫХ СИСТЕМ КОНЕЧНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ МАТРИЦАМИ

Предложены конструктивные декомпозиционные аналитические и численно–аналитические матрично–векторные методы решения линейных однопараметрических корректных систем конечных уравнений с комплексными матрицами. При первом аналитическом методе получено точное выражение для векторных компонентов решения исходной задачи, а при втором методе – приближенное, наилучшее в смысле наименьшей эвклидовой нормы вектора компонентов решение (точнее, эквивалент этого решения). При численно-аналитическом методе получена рекуррентная цепочка определения векторных дискрет для решения исходной задачи на основе применения дифференциальных преобразований. Рассмотрен модельный пример, который решен как известным параллельным методом, так и предложенным численно-аналитическим методом. Как показали вычисления, численно-аналитический метод выгодно отличается от параллельного метода.

***Ключевые слова:*** линейные однопараметрические корректные системы конечных уравнений с комплексными матрицами, декомпозиция, дифференциальные преобразования, конструктивные матрично–векторные методы, численно-аналитические решения.

**Введение**. В работах [1 – 4] для решения линейных однопараметрических систем конечных уравнений на основе дифференциальных преобразований Пухова [5] были предложены параллельные конструктивные численно–аналитические матрично-векторные методы, предназначенные для систем как с действительными, так и комплексными матрицами. В настоящей работе предлагаются конструктивные декомпозиционные аналитические и численно-аналитические матрично–векторные методы решения линейных однопараметрических корректных систем конечных уравнений с комплексными матрицами (естественно, они могут быть применимы и для систем с действительными матрицами). Численно–аналитический метод также основан на дифференциальных преобразованиях.

**Математический аппарат**. Рассмотрим линейные однопараметрические корректные системы конечных уравнений

$$A(t)\cdot X(t)=a(t), rang A(t)=n, \qquad (1)$$

где $A(t)=a_{ij}(t), i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}$ и $a(t)=\left(a_1(t),\dots,a_n(t)\right)^T$ - квадратная матрица и вектор правых частей системы с комплексными элементами, обладающими достаточной гладкостью по параметру $t$; $X(t)=\left(x_1(t),\dots,x_n(t)\right)^T$ - вектор искомых переменных. Решение системы (1) имеет вид

$$X(t) = A^{-1}(t) \cdot a(t), \tag{2}$$

где $A^{-1}(t)$ - однопараметрическая обратная к $A(t)$ матрица [6,7].

Теперь представим исходную матрицу $A(t)$ в виде

$$A(t)_{nxn} = B(t)_{nxn} + j \cdot C(t)_{nxn} \,, \tag{3}$$

а неизвестный вектор–столбец $X(t)$ - в виде

$$X(t) = G(t) + j \cdot H(t) \,, \tag{4}$$

в которых $B(t)$ и $C(t)$ - квадратные матрицы действительной и мнимой частей матрицы $A(t)$; $G(t)$ и $H(t)$ - вектор–столбцы действительной и мнимой частей вектор–столбца $X(t)$, а $j = \sqrt{-1}$ - мнимая единица. Пусть вектор–столбец $a(t)$ правой части системы (1) также можно представить в виде

$$a(t)_{nx1} = b(t)_{nx1} + j \cdot c(t)_{nx1}, \tag{5}$$

где $b(t)$ и $c(t)$ - вектор–столбцы действительной и мнимой частей вектор-столбца $a(t)$.

Аналитическое решение. При соотношениях (3) - (5) система (1) принимает вид

$$[B(t) + j \cdot C(t)] \cdot [G(t) + j \cdot H(t)] =$$
$$= [B(t) \cdot G(t) - C(t) \cdot H(t)] + j \cdot [B(t) \cdot H(t) + C(t) \cdot G(t)] = b(t) + j \cdot c(t),$$

откуда получим систему матрично–векторных уравнений

$$\begin{cases} B(t)_{nxn} \cdot G(t)_{nx1} - C(t)_{nxn} \cdot H(t)_{nx1} = b(t)_{nx1}, \\ B(t)_{nxn} \cdot H(t)_{nx1} + C(t)_{nxn} \cdot G(t)_{nx1} = c(t)_{nx1}. \end{cases} \tag{6}$$

Систему (6) можно представить и в виде следующего матрично–блочно-столбцевого эквивалента:

$$\left[\begin{array}{c|c} B(t) & -C(t) \\ \hline C(t) & B(t) \end{array}\right]_{2n\times 2n} \cdot \left(\begin{array}{c} G(t) \\ \hline H(t) \end{array}\right)_{2n\times 1} = D_1(t)_{2n\times 2n} \cdot \left(\begin{array}{c} G(t) \\ \hline H(t) \end{array}\right)_{2n\times 1} = \left(\begin{array}{c} b(t) \\ \hline c(t) \end{array}\right)_{2n\times 1}, \tag{7}$$

откуда составляющие точного декомпозиционного аналитического решения задачи определяются в виде

$$\left(\begin{array}{c} G(t) \\ \hline H(t) \end{array}\right)_{2n\times 1} = \left[\begin{array}{c|c} B(t) & -C(t) \\ \hline C(t) & B(t) \end{array}\right]^{-1}_{2n\times 2n} \cdot \left(\begin{array}{c} b(t) \\ \hline c(t) \end{array}\right)_{2n\times 1} = D_1{}^{-1}(t)_{2n\times 2n} \cdot \left(\begin{array}{c} b(t) \\ \hline c(t) \end{array}\right)_{2n\times 1}. \tag{8}$$

**Замечание 1**. Блочная матрица $D_1(t)$, очевидно, блочно–кососимметрична относительно первой главной диагонали и блочно–симметрична относительно второй главной диагонали. Эти свойства сохраняются и для однопараметрической обратной матрицы $D_1{}^{-1}(t)$.

**Замечание 2**. Нетрудно убедиться, что систему матрично–векторных уравнений (6) можно представить и в виде следующего матрично–блочно-строчного эквивалента**:**

$$[B(t) \,\vdots\, C(t)] \cdot \left[\begin{array}{c:c} G(t) & H(t) \\ \hdashline -H(t) & G(t) \end{array}\right] = D_2(t) \cdot \left[\begin{array}{c:c} G(t) & H(t) \\ \hdashline -H(t) & G(t) \end{array}\right] = [b(t) \,\vdots\, c(t)] \,, \qquad (9)$$

откуда приближенное, наилучшее в смысле наименьшей эвклидовой нормы вектора $(G(t) \,\vdots\, H(t))^T$ решение (точнее, эквивалент этого решения) будет

$$\left[\begin{array}{c:c} G(t) & H(t) \\ \hdashline -H(t) & G(t) \end{array}\right]_{2n\times 2} = [B(t) \,\vdots\, C(t)]^{+}{}_{2n\times n} \cdot [b(t) \,\vdots\, c(t)]_{n\times 2} =$$

$$= D_2{}^{+}(t)_{2n\times n} \cdot [b(t) \,\vdots\, c(t)]_{n\times 2} \,. \qquad (10)$$

Однако из-за использования в этой вычислительной схеме обобщенной обратной матрицы $D_2{}^{+}(t)$ условия блочной кососимметричности относительно первой главной диагонали и блочной симметричности относительно второй главной диагонали левой части решения (10) в общем случае будут нарушены, что обуславливает необходимость отказа от ее дальнейшего использования.

**Замечание 3**. Аналитические представления (2) или (8) практически могут быть использованы лишь при малых размерах $n$ матриц $A(t)$, векторов $a(t)$ и при простых их элементах $a_{ij}(t), a_i(t), i, j = \overline{1, n}$ . При сравнительно больших размерах матриц $A(t)$, векторов $a(t)$ и их сложных элементах, очевидно, использование аналитических представлений (2) или (8) либо нецелесообразно, либо практически невозможно. При таких ситуациях оказываются весьма эффективными численно–аналитические методы, к рассмотрению которых и перейдем далее.

<u>Численно–аналитическое решение.</u> Представим численно–аналитические методы решения исходной задачи, предположив, что для матриц $A(t), B(t), C(t)$ и векторов $X(t), G(t), H(t), b(t), c(t)$ с аналитическими элементами имеют место следующие матричные и векторные дифференциальные преобразования:

$$A(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{dA^K(t)}{dt^K} \,|\, t = t_\nu, K = \overline{0, \infty} \risingdotseq A(t) = \varkappa_1(t, t_\nu, H, A(K), K = \overline{0, \infty}), \qquad (11)$$

$$B(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{dB^K(t)}{dt^K} \,|\, t = t_\nu, K = \overline{0, \infty} \risingdotseq B(t) = \varkappa_2(t, t_\nu, H, B(K), K = \overline{0, \infty}), \qquad (12)$$

$$C(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{dC^K(t)}{dt^K} \,|\, t = t_\nu, K = \overline{0, \infty} \risingdotseq C(t) = \varkappa_3(t, t_\nu, H, C(K), K = \overline{0, \infty}), \qquad (13)$$

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{dX^K(t)}{dt^K} \,|\, t = t_\nu, K = \overline{0, \infty} \risingdotseq X(t) = \varkappa_4(t, t_\nu, H, X(K), K = \overline{0, \infty}), \qquad (14)$$

$$G(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{dG^K(t)}{dt^K} \,|\, t = t_\nu, K = \overline{0, \infty} \risingdotseq G(t) = \varkappa_5(t, t_\nu, H, G(K), K = \overline{0, \infty}), \qquad (15)$$

$$H(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{dH^K(t)}{dt^K} \,|\, t = t_\nu, K = \overline{0, \infty} \risingdotseq H(t) = \varkappa_6(t, t_\nu, H, H(K), K = \overline{0, \infty}), \qquad (16)$$

$$b(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d b^K(t)}{dt^K}\mid t=t_\nu,K=\overline{0,\infty}\risingdotseq b(t)=\varkappa_7(t,t_\nu,H,b(K),K=\overline{0,\infty}),\qquad(17)$$

$$c(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d c^K(t)}{dt^K}\mid t=t_\nu,K=\overline{0,\infty}\risingdotseq c(t)=\varkappa_8(t,t_\nu,H,c(K),K=\overline{0,\infty}),\qquad(18)$$

где $A(K)$, $B(K)$, $C(K)$ - матричные дискреты матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ соответственно, а $X(K)$, $G(K)$, $H(K)$ и $b(K)$, $c(K)$ - векторные дискреты векторов $X(t)$, $G(t)$, $H(t)$ и $b(t)$, $c(t)$ соответственно; $K=\overline{0,\infty}$ - целочисленный аргумент; $H$ - масштабный коэффициент; $t_\nu$ - центр аппроксимации; символ $\risingdotseq$ - знак перехода из области оригиналов в область изображений и наоборот; $\varkappa_1(\cdot),\dots,\varkappa_8(\cdot)$ - некоторые аппроксимирующие функции, восстанавливающие оригиналы-матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и оригиналы–векторы $X(t)$, $G(t)$, $H(t)$ и $b(t)$, $c(t)$ соответственно.

а) Для решения рассматриваемого класса задач в работе [2] был предложен матрично-векторный параллельный метод, основанный на дифференциальных преобразованиях. Метод применим для линейных систем конечных уравнений как с однопараметрическими действительными, так и комплексными матрицами. В частности, для определения составного вектора неизвестных матричных дискрет $X(\bullet)$ получено представление

$$X(\bullet)=\begin{pmatrix}X(0)\\ \hline X(1)\\ \hline X(2)\\ \hline \vdots\\ \hline X(K)\end{pmatrix}_{n(K+1)\times 1}=$$

$$=\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}A_0&0&0&\cdots&0\\ \hline A_1&A_0&0&\cdots&0\\ \hline A_2&A_1&A_0&\cdots&0\\ \hline \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \hline A_K&A_{K-1}&A_{K-2}&\cdots&A_0\end{array}\right]_{n(K+1)\times n(K+1)}\cdot\begin{pmatrix}a(0)\\ \hline a(1)\\ \hline a(2)\\ \hline \vdots\\ \hline a(K)\end{pmatrix}_{n(K+1)\times 1},\qquad(19)$$

где

$$\begin{aligned}&A_0=A^{-1}(0),\\&A_1=A^{-1}(0)\cdot A(1)\cdot A^{-1}(0),\\&A_2=-A^{-1}(0)\cdot[-A(1)\cdot A^{-1}(0)\cdot A(1)+A(2)]\cdot A^{-1}(0),\qquad(20)\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&A_K=-A^{-1}(0)\cdot\sum^{K}A(P)\cdot A_{K-P},\end{aligned}$$

причем $A(K)$, $K=\overline{0,\infty}$ - матричные дискреты матрицы системы $A(t)$, а $a(K)$, $K=\overline{0,\infty}$ - векторные дискреты вектора правой части системы $a(t)$. Далее для нахождения решения $X(t)$ используются какие-либо восстанавливающие соотношения $\varkappa_4(\bullet)$ в соответствии с [4,5].

б) Теперь перейдем к рассмотрению точного декомпозиционного метода, при котором с учетом соотношений (11) - (18) матрично–блочно–столбцевое уравнение (7) из области оригиналов переведем в область дифференциальных изображений в соответствии с правилами алгебры дифференциальных преобразований [5]. Получим следующее представление:

$$\sum_{l=0}^{K}\left[\begin{array}{c:c} B(l) & -C(l) \\ \hdashline C(l) & B(l) \end{array}\right]\cdot\left(\begin{array}{c} G(K-l) \\ \hdashline H(K-l) \end{array}\right)=\sum_{l=0}^{K} D_1(l)\cdot\left(\begin{array}{c} G(K-l) \\ \hdashline H(K-l) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} b(K) \\ \hdashline c(K) \end{array}\right). \tag{21}$$

Из последнего соотношения имеем:

<u>при $K=0$</u>:

$$\left[\begin{array}{c:c} B(0) & -C(0) \\ \hdashline C(0) & B(0) \end{array}\right]\cdot\left(\begin{array}{c} G(0) \\ \hdashline H(0) \end{array}\right)=D_1(0)\cdot\left(\begin{array}{c} G(0) \\ \hdashline H(0) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} b(0) \\ \hdashline c(0) \end{array}\right),$$

откуда

$$\left(\begin{array}{c} G(0) \\ \hdashline H(0) \end{array}\right)_{2n\times 1}=\left[\begin{array}{c:c} B(0) & -C(0) \\ \hdashline C(0) & B(0) \end{array}\right]^{-1}_{2n\times 2n}\cdot\left(\begin{array}{c} b(0) \\ \hdashline c(0) \end{array}\right)_{2n\times 1}=D_1^{-1}(0)\cdot\left(\begin{array}{c} b(0) \\ \hdashline c(0) \end{array}\right); \tag{22}$$

<u>при $K=1$</u>:

$$\left[\begin{array}{c:c} B(0) & -C(0) \\ \hdashline C(0) & B(0) \end{array}\right]\cdot\left(\begin{array}{c} G(1) \\ \hdashline H(1) \end{array}\right)+\left[\begin{array}{c:c} B(1) & -C(1) \\ \hdashline C(1) & B(1) \end{array}\right]\cdot\left(\begin{array}{c} G(0) \\ \hdashline H(0) \end{array}\right)=D_1(0)\left(\begin{array}{c} G(1) \\ \hdashline H(1) \end{array}\right)+D_1(1)\left(\begin{array}{c} G(0) \\ \hdashline H(0) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} b(1) \\ \hdashline c(1) \end{array}\right),$$

откуда

$$\left(\begin{array}{c} G(1) \\ \hdashline H(1) \end{array}\right)_{2n\times 1}=D_1^{-1}(0)_{2n\times 2n}\cdot\left[\left(\begin{array}{c} b(1) \\ \hdashline c(1) \end{array}\right)_{2n\times 1}-D_1(1)_{2n\times 2n}\cdot\left(\begin{array}{c} G(0) \\ \hdashline H(0) \end{array}\right)_{2n\times 1}\right]; \tag{23}$$

…

<u>при $K=K$</u>:

$$\left[\begin{array}{c:c} B(0) & -C(0) \\ \hdashline C(0) & B(0) \end{array}\right]\cdot\left(\begin{array}{c} G(K) \\ \hdashline H(K) \end{array}\right)+\sum_{l=1}^{K}\left[\begin{array}{c:c} B(l) & -C(l) \\ \hdashline C(l) & B(l) \end{array}\right]\cdot\left(\begin{array}{c} G(K-l) \\ \hdashline H(K-l) \end{array}\right)=$$

$$=D_1(0)\cdot\left(\begin{array}{c} G(K) \\ \hdashline H(K) \end{array}\right)+\sum_{l=1}^{K} D_1(l)\cdot\left(\begin{array}{c} G(K-l) \\ \hdashline H(K-l) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} b(K) \\ \hdashline c(K) \end{array}\right),$$

откуда

$$\left(\begin{array}{c} G(K) \\ \hdashline H(K) \end{array}\right)_{2n\times 1}=D_1^{-1}(0)_{2n\times 2n}\times$$

$$\times\left[\left(\begin{array}{c} b(K) \\ \hdashline c(K) \end{array}\right)_{2n\times 1}-\sum_{l=1}^{K} D_1(1)_{2n\times 2n}\cdot\left(\begin{array}{c} G(K-l) \\ \hdashline H(K-l) \end{array}\right)_{2n\times 1}\right]. \tag{24}$$

Далее для нахождения решения $X(t)$ можно использовать какое-либо восстанавливающее соотношение $\varkappa_4(\bullet)$.

**Замечание 4**. Свойства блочной кососимметричности относительно первой главной диагонали и блочной симметричности относительно второй главной диагонали сохраняются и при блочных матричных дискретах $D_1(0)$ и ${D_1}^{-1}(0)$, а также при $D_1(K)$ и ${D_1}^{-1}(K)$, $K \geq 1$.

Теперь для выявления сравнительных характеристик известного матрично-векторного параллельного метода [1-3] и предложенного в настоящей работе точного декомпозиционного метода рассмотрим решение одного модельного примера этими обоими методами.

***Модельный пример***. Пусть задана линейная однопараметрическая корректная система конечных уравнений

$$\begin{bmatrix} (1+t+j\cdot t^2) & 0 & (2+t^2+j\cdot t) \\ (-1+j\cdot t) & (2+j) & 0 \\ 0 & j\cdot t^3 & (1+j\cdot t^2) \end{bmatrix}_{3\times 3} \cdot \big(G(t)+j\cdot H(t)\big)_{3\times 1} =$$

$$= \begin{pmatrix} (3+t+t^2-t^3)+j\cdot 2t\cdot(1+t) \\ (1+t-t^2)+j\cdot(1-2t) \\ (1+t^4)+j\cdot t^2\cdot(1+t) \end{pmatrix}_{3\times 1}.$$

а) Сначала рассмотрим применение матрично-векторного параллельного метода. При маклореновском центре аппроксимации $t_\nu = 0$ и масштабном коэффициенте $H = 1$ будем иметь

$$A(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & (2+j) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & j \\ j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A(2) = \begin{bmatrix} j & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j \end{bmatrix},$$

$$A(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \end{bmatrix}, A(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, K \geq 4;$$

$$a(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1+j \\ 1 \end{pmatrix}, a(1) = \begin{pmatrix} 1+2\cdot j \\ 1-2\cdot j \\ 0 \end{pmatrix}, a(2) = \begin{pmatrix} 1+2\cdot j \\ -1 \\ j \end{pmatrix},$$

$$a(3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ j \end{pmatrix}, a(4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a(K) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, K \geq 5;$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ \frac{1}{2+j} & \frac{1}{2+j} & -\frac{2}{2+j} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2-j \\ \frac{-1-j}{2+j} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1-j & 0 & -3+5\cdot j \\ \frac{1}{2+j} & 0 & \frac{-4+3\cdot j}{2+j} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и т.д.

Следовательно, векторные дискреты в соответствии с представлением (19) имеют вид

$$X(0) = A_0 \cdot a(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, X(1) = A_1 \cdot a(0) + A_0 \cdot a(1) = \begin{pmatrix} j \\ -j \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$X(2) = A_2 \cdot a(0) + A_1 \cdot a(1) + A_0 \cdot a(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X(K) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, K \geq 3,$$

а решение $X(t)$ имеет вид

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + j \cdot t \\ 1 - j \cdot t \\ 1 \end{pmatrix},$$

в абсолютной точности которого можно легко убедиться его подстановкой в исходную математическую модель.

б) Теперь рассмотрим решение модельного примера предложенным в настоящей работе точным декомпозиционным методом. Очевидно, имеем

$$B(t) = \begin{bmatrix} (1+t) & 0 & (2+t^2) \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C(t) = \begin{bmatrix} t^2 & 0 & t \\ t & 1 & 0 \\ 0 & t^3 & t^2 \end{bmatrix},$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} 3 + t + t^2 - t^3 \\ 1 + t - t^2 \\ 1 + t^4 \end{pmatrix}, c(t) = \begin{pmatrix} 2t \cdot (1+t) \\ 1 - 2t \\ t^2 \cdot (1+t) \end{pmatrix},$$

откуда при маклореновском центре аппроксимации $t_\nu = 0$ и масштабном коэффициенте $H = 1$ получаем следующие матричные и векторные дискреты:

$$B(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, K \geq 3;$$

$$C(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, K \geq 4;$$

$$b(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b(3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b(4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b(K) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, K \geq 5;$$

$$c(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, c(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c(3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c(K) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, K \geq 4\,.$$

Тогда

$$D_1(0) = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$D_1^{-1}(0) = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & -0.8 & 0.2 & 0.2 & -0.4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ -0.2 & -0.2 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & -0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Поэтому:

<u>при $K = 0$</u>:

$$\left(\frac{G(0)}{H(0)}\right) = D_1^{-1}(0) \cdot \left(\frac{b(0)}{c(0)}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \underline{1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ откуда } G(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, H(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

<u>при $K = 1$</u>:

$$\left(\frac{G(1)}{H(1)}\right) = D_1^{-1}(0) \cdot \left[\left(\frac{b(1)}{c(1)}\right) - D_1(1) \cdot \left(\frac{G(0)}{H(0)}\right)\right] =$$

$$= D_1^{-1}(0) \cdot \left[\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \hdashline 2 \\ -2 \\ 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right)\right] = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 1 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right),$$

откуда $G(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, H(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$

<u>при $K = 2$</u>:

$$\begin{pmatrix} G(2) \\ \hdashline H(2) \end{pmatrix} = {D_1}^{-1}(0) \cdot \left[ \begin{pmatrix} b(2) \\ \hdashline c(2) \end{pmatrix} - D_1(2) \cdot \begin{pmatrix} G(0) \\ \hdashline H(0) \end{pmatrix} - D_1(1) \cdot \begin{pmatrix} G(1) \\ \hdashline H(1) \end{pmatrix} \right] =$$

$$= {D_1}^{-1}(0) \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \hdashline 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \hdashline 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ откуда } G(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, H(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

<u>при $K = 3$</u>:

$$\begin{pmatrix} G(3) \\ \hdashline H(3) \end{pmatrix} = D_1^{-1}(0) \times \left[ \begin{pmatrix} b(3) \\ \hdashline c(3) \end{pmatrix} - D_1(3) \cdot \begin{pmatrix} G(0) \\ \hdashline H(0) \end{pmatrix} - D_1(2) \cdot \begin{pmatrix} G(1) \\ \hdashline H(1) \end{pmatrix} - D_1(1) \cdot \cancelto{0}{\begin{pmatrix} G(2) \\ \hdashline H(2) \end{pmatrix}} \right] =$$

$$= {D_1}^{-1}(0) \cdot \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ откуда } G(3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, H(3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

<u>при $K = 4$</u>:

$$\begin{pmatrix} G(4) \\ \hdashline H(4) \end{pmatrix} = D_1^{-1}(0) \times \left[ \begin{pmatrix} b(4) \\ \hdashline c(4) \end{pmatrix} - D_1(4) \cdot \cancelto{0}{\begin{pmatrix} G(0) \\ \hdashline H(0) \end{pmatrix}} - D_1(3) \cdot \begin{pmatrix} G(1) \\ \hdashline H(1) \end{pmatrix} - D_1(2) \cdot \cancelto{0}{\begin{pmatrix} G(2) \\ \hdashline H(2) \end{pmatrix}} - D_1(1) \cdot \cancelto{0}{\begin{pmatrix} G(3) \\ \hdashline H(3) \end{pmatrix}} \right] =$$

$$= {D_1}^{-1}(0) \cdot \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ откуда } G(4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, H(4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Дальнейшие вычисления также приводят к нулевым векторным дискретам, т.е.

$$G(K) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, H(K) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, K \geq 5 .$$

Следовательно, с учетом того, что при маклореновской аппроксимации

$$G(t) = \sum_{K=0}^{\infty} G(K) \cdot t^K = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, H(t) = \sum_{K=0}^{\infty} H(K) \cdot t^K = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix},$$

окончательным решением задачи будет

$$X(t) = G(t) + j \cdot H(t) = \begin{pmatrix} 1 + j \cdot t \\ 1 - j \cdot t \\ 1 \end{pmatrix},$$

что точно совпадает с решением, полученным выше применением матрично–векторного параллельного метода.

**Замечание 5**. При некорректных линейных однопараметрических системах конечных уравнений

$$A(t) \cdot X(t) = a(t),$$

где $A(t) = \left(a_{ij}(t)\right), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n},\ m \neq n$ и $a(t) = \left(a_1(t), \dots, a_m(t)\right)^T$, для нахождения вектора $X(t) = \left(x_1(t), \dots, x_n(t)\right)^T$ можно использовать аналогичные соотношениям (2) – (8) аналитические решения с обобщенными обратными матрицами $A^+(t)_{n\times m}$ и ${D_1}^+(t)_{2n\times 2m}$ вместо $A^{-1}(t)$ и ${D_1}^{-1}(t)$ соответственно. При численно–аналитическом решении, аналогичном (19), (20), можно воспользоваться псевдообратной матрицей $A^+(0)_{n\times m}$ вместо $A^{-1}(0)$ (что и сделано в работе [1] при использовании дополнительных корректирующих векторов дискрет), а при численно–аналитическом решении, аналогичном (21) – (24),– псевдообратной матрицей ${D_1}^+(0)_{2n\times 2m}$ вместо обратной ${D_1}^{-1}(0)$. Естественно, при использовании обобщенных обратных матриц $A^+(t)$, ${D_1}^+(t)$или псевдообратных матриц $A^+(0)$, ${D_1}^+(0)$ в этих вычислительных схемах речь может идти лишь только о приближенных наилучших в соответствующих смыслах решениях [6,7].

**Заключение.** Предложенный декомпозиционный численно-аналитический метод и проведенные расчеты по решению модельного примера показывают, что декомпозиционный метод намного более прост, нежели аналитический или матрично-векторный параллельный метод. Это важное свойство обуславливает возможность эффективного использования средств современных информационных технологий [8] с целью решения рассмотренного класса задач применением точных декомпозиционных методов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Симонян С.О., Аветисян А.Г.** Способ решения линейных неавтономных систем конечных уравнений на основе ДТ–преобразований // Электронное моделирование. -1997.- Том 19, № 4. -С. 19-30.
2. **Симонян С.О., Аветисян А.Г., Асланян Л.М.** Дифференциально – падеевская матрично–векторная модель решения систем линейных неавтономных уравнений // Моделирование, оптимизация, управление: Сб. научн. трудов/ ГИУА.- Ереван, 1998.-Вып.1.- С. 65 -71.

3. **Simonyan S.O., Avetisyan A.G.** The Method of Linear Non – Autonomous Finite Equation Set Solution on the Basis of Differential Taylor Transforms // Engineering Simulation. – 1998.- Vol. 15, №2.- P. 407-421.
4. **Симонян С.О., Аветисян А.Г.** Прикладная теория дифференциальных преобразований.- Ереван: ГИУА “Чартарагет”, 2010.-364 с.
5. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений.- Киев: Наукова думка. 1984.- 420 с.
6. **Гантмахер Ф.Р**. Теория матриц.- М.: Физматлит, 2010.- 560 с.
7. **Ben–Israel A., Greville T.N.E.** Generalized Inverses. Theory and Applications - A. Wiley – Interscience Publication, 2002. – 371 p.
8. **Макс Шлее.** Qt 9.8 Профессиональное программирование на С++. СПб.: БХВ – Петербург, 2012.- 912 с.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 02.10.2014.

Ս.Հ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Մ.Ա. ԱԴԱՄՅԱՆ

## ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԿՈՌԵԿՏ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԴԵԿՈՄՊՈԶԻՑԻՈՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

Առաջարկվել են կոմպլեքս մատրիցներով գծային միապարամետրական կոռեկտ վերջավոր հավասարումների համակարգերի լուծման կոնստրուկտիվ դեկոմպոզիցիոն անալիտիկ և թվա-անալիտիկ մատրիցա-վեկտորային մեթոդներ: Առաջին անալիտիկ մեթոդի դեպքում նախնական խնդրի լուծման վեկտորային բաղադրիչների համար ստացվել է ճշգրիտ լուծում, իսկ երկրորդ մեթոդի դեպքում՝ մոտավոր (վեկտորային բաղադրիչների նվազագույն էվկլիդյան նորմի իմաստով) լավագույն լուծումը (ավելի ճիշտ՝ այդ լուծման համարժեքը): Թվա-անալիտիկ մեթոդի դեպքում ստացվել է նախնական խնդրի լուծման վեկտորային դիսկրետների որոշման անդրադարձ շղթա՝ հիմնվելով դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա: Դիտարկվել է մոդելային օրինակ, որը լուծվել է ինչպես հայտնի զուգահեռ մեթոդով, այնպես էլ առաջարկված թվա-անալիտիկ մեթոդով: Ինչպես ցույց են տվել հաշվարկները, թվա-անալիտիկ մեթոդը շահեկանորեն տարբերվում է զուգահեռ մեթոդից:

***Առանցքային բառեր***. կոմպլեքս մատրիցներով գծային միապարամետրական վերջավոր հավասարումների կոռեկտ համակարգեր, դեկոմպոզիցիա, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, կոնստրուկտիվ մատրիցա-վեկտորային մեթոդներ, թվա-անալիտիկ լուծումներ:

**S.H. SIMONYAN, M.A. ADAMYAN**

## DECOMPOSITION METHODS FOR SOLVING LINEAR ONE-PARAMETRIC FINITE EQUATION SETS WITH COMPLEX MATRICES

Constructive, decomposition, analytical and numerical-analytical matrix-vector methods are proposed for solving linear one-parametric finite equation sets by complex matrices. In the case of the first analytical method, an exact expression for vector components of the initial problem solution is obtained, whereas in the second method - an approximate solution which is the best in the sense of the least Euclidean norm's of the vector component (more precisely, the equivalent of that solution) is obtained. In the case of the numerical – analytical method, for the solution of the initial problem, a recurrent chain of defining the vector discretes on the basis of the application of differential transformations is received. A model example is examined, which has been solved both with the known parallel method and the proposed numerical-analytical one. The computations denote that the numerical-analytical method advantageously differs from the parallel method.

***Keywords:*** one-parametric finite equation sets with complex matrices, decomposition, differential transformations, constructive matrix-vectorial methods, numerical-analytical solutions.