

Г.С. СУКИАСЯН

**ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ТРИАНГУЛЯЦИИ ДЕЛОНЕ И ЕГО  
ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ПОЛЕВЫХ ЗАДАЧ**

При решении полевых задач методом конечных элементов применяются треугольные дискретизационные сетки. Сходимость автоматизированного процесса последовательных приближений к решению нелинейных задач сильно зависит от конфигурации сетки. В настоящей работе исследован важный класс треугольных сеток – триангуляции Делоне. Доказано, что триангуляция Делоне минимизирует сумму котангенсов углов всех своих треугольников. Это экстремальное свойство применено при анализе процесса решения систем линейных уравнений, зависящих от сетки. Показано, что для задачи автоматизированного нахождения электромагнитного поля методом конечных элементов при заданном наборе узлов из всех возможных сеток наилучшей (в смысле скорости сходимости процесса последовательных приближений) является триангуляция Делоне.

**Ключевые слова:** электромагнитное поле, метод конечных элементов, треугольные сетки, триангуляция Делоне.

**Введение.** Автоматизированное решение нелинейных полевых задач методом конечных элементов сводится к построению дискретизационной сетки и нахождению минимума энергетического функционала путем приравнивания нулю его производных. В результате получается система уравнений с неизвестными значениями потенциала в узлах сетки, причем количество уравнений равно количеству неизвестных и количеству некраевых узлов сетки.

Сходимость процесса последовательных приближений к решению нелинейных полевых задач сильно зависит от конфигурации сетки. Известно (см. [1, 2]), что на скорость сходимости процесса последовательных приближений к решению нелинейных полевых задач отрицательно влияет наличие в сетке тупоугольных треугольников.

В настоящей работе исследован особый вид треугольных сеток – так называемая триангуляция Делоне (см. [3]). Показано, что триангуляция Делоне минимизирует сумму котангенсов углов всех своих треугольников. Из этого экстремального свойства получено утверждение, что при заданном наборе узлов из всех возможных сеток наилучшей (в смысле скорости сходимости процесса последовательных приближений) является триангуляция Делоне.

**Треугольные сетки.** Пусть  $\{P_i\}_{i=1}^n$  – заданное множество точек (узлов) на плоскости. Множество  $\{D_j\}_{j=1}^m$  выпуклых многоугольников на плоскости называется сеткой с системой узлов  $\{P_i\}_{i=1}^n$ , если выполнены следующие условия:

- внутренности многоугольников попарно не пересекаются;
- вершины всех многоугольников принадлежат системе узлов  $\{P_i\}_{i=1}^n$ ;
- объединение  $\bigcup_{j=1}^m D_j$  заполняет всю выпуклую оболочку точек  $\{P_i\}_{i=1}^n$ .

При решении задачи нахождения электромагнитного поля методом конечных элементов внутри каждого элемента индукция предполагается постоянной, а следовательно, величина векторного магнитного потенциала предполагается линейной. Так как количество неизвестных параметров у линейной функции двух переменных равно трем, то количество узлов в каждом элементе также должно быть равно трем. Следовательно, при решении полевых задач методом конечных элементов дискретизационная сетка  $\{D_j\}_{j=1}^m$  должна состоять исключительно из треугольников. Такие сетки называются треугольными.

**Триангуляция Делоне.** Важным классом треугольных сеток являются триангуляции Делоне. Треугольная сетка  $\{D_j\}_{j=1}^m$  называется триангуляцией Делоне на базе системы узлов  $\{P_i\}_{i=1}^n$ , если выполнено следующее условие: для каждого треугольника  $D_j$  внутри описанного вокруг него круга нет ни одной точки из  $\{P_i\}_{i=1}^n$ .

**Утверждение 1.** Для любой конфигурации узлов  $\{P_i\}_{i=1}^n$  триангуляция Делоне обладает минимальной суммой котангенсов углов всех своих треугольников среди всех возможных треугольных сеток с данным множеством узлов.

Вначале докажем это свойство для четырехугольника ABCD (см. рис.).

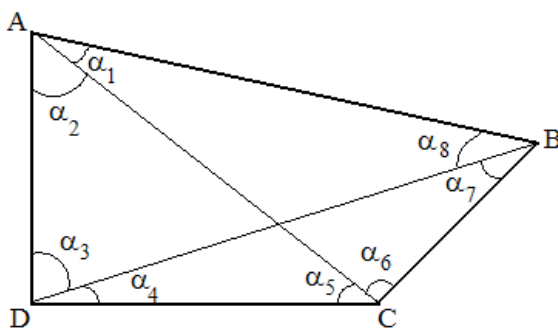


Рис.

Возможны две сетки: триангуляция  $T_{BD}$  с диагональю BD и треугольниками ABD и BDC, а также триангуляция  $T_{AC}$  с диагональю AC и треугольниками ABC и ADC. У триангуляции  $T_{BD}$  сумма  $S_{BD}$  котангенсов всех углов обоих своих треугольников равна

$$S_{BD} = \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha_2) + \operatorname{ctg} \alpha_3 + \operatorname{ctg} \alpha_8 + \operatorname{ctg}(\alpha_5 + \alpha_6) + \operatorname{ctg} \alpha_4 + \operatorname{ctg} \alpha_7. \quad (1)$$

У триангуляции  $T_{AC}$  сумма  $S_{AC}$  котангенсов всех углов обоих своих треугольников равна

$$S_{AC} = \operatorname{ctg}(\alpha_3 + \alpha_4) + \operatorname{ctg} \alpha_2 + \operatorname{ctg} \alpha_5 + \operatorname{ctg}(\alpha_7 + \alpha_8) + \operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_6. \quad (2)$$

Если

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_6 > \pi,$$

то точка D лежит вне окружности, описанной вокруг треугольника ABC, триангуляция  $T_{AC}$  является триангуляцией Делоне и  $S_{AC} < S_{BD}$ .

Если же

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_6 < \pi,$$

то точка C лежит вне окружности, описанной вокруг треугольника ABD, триангуляция  $T_{BD}$  является триангуляцией Делоне и  $S_{AC} > S_{BD}$ . Следовательно, в обоих случаях триангуляция Делоне обладает меньшей суммой котангенсов углов.

Теперь докажем это свойство для большого количества узлов. Так как количество возможных сеток конечно, то существует сетка T с минимальной суммой котангенсов углов всех своих треугольников среди всех возможных триангуляций с данным множеством узлов. Предположим, что T не является триангуляцией Делоне. Тогда существует треугольник ABD, внутри описанной окружности которого лежит узел C. Заменяя в четырехугольнике ABCD диагональ BD на AC, получим  $S_{AC} < S_{BD}$ , что противоречит условию минимальности сетки T. Итак, утверждение 1 доказано.

**Приложение к решению систем уравнений.** Вышеприведенное утверждение можно применить при анализе процесса решения одного класса систем линейных уравнений, зависящих от сетки. Пусть на плоскости задана треугольная сетка  $T = \{D_j\}_{j=1}^m$  с системой узлов  $\{P_i\}_{i=1}^n$ . Если узел принадлежит выпуклой оболочке сетки, то он называется граничным, в противном случае – внутренним. Обозначим через  $I(T)$  множество внутренних узлов сетки T, а их количество – через N. Введем также обозначения:  $V(D_j)$  – множество вершин треугольника  $D_j$  и  $E_i$  – совокупность треугольников сетки T, содержащих вершину  $P_i$ , т.е.

$$E_i = \{D_j \in T : P_i \in V(D_j)\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Рассмотрим следующую систему линейных уравнений относительно неизвестных  $x_1, \dots, x_N$ , их количество равно числу внутренних узлов  $N$ :

$$\sum_{D \in E_i} \sum_{v \in V(D) \cap I(T)} \operatorname{ctg} \alpha(v, D) x_k = b_i, \quad P_i \in I(T), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Здесь  $\alpha(v, D)$  - внутренний угол треугольника  $D$  при вершине  $v$ , имеющей номер  $k$ , т.е.  $v = P_k$ . Отметим, что система линейных уравнений (3) зависит от геометрии сетки  $T$ . Предположим, что мы собираемся численно решать систему уравнений (3) методом последовательных итераций. Тогда сходимость процесса последовательных приближений к решению системы (3) зависит от конфигурации сетки. Согласно известному принципу доминирования диагонали, скорость сходимости процесса последовательных итераций увеличивается при уменьшении недиагональных элементов матрицы системы линейных уравнений. Отсюда, используя Утверждение 1, приходим к следующему результату.

**Утверждение 2.** Для любой конфигурации узлов  $\{P_i\}_{i=1}^n$  при решении системы линейных уравнений (3) методом последовательных итераций триангуляция Делоне является наилучшей среди всех возможных треугольных сеток с данным множеством узлов.

**Приложение к решению полевых задач.** При решении задачи нахождения электромагнитного поля методом конечных элементов возникает следующая система линейных уравнений относительно неизвестных значений векторного магнитного потенциала  $A_k$  в узле  $k$ :

$$\sum_{D \in E_i} \sum_{v \in V(D) \cap I(T)} \operatorname{ctg} \alpha(v, D) \frac{A_k}{\mu(D)} = b_i(\delta), \quad P_i \in I(T), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Здесь  $\mu(D)$  - величина магнитной проницаемости, принимаемая постоянной внутри треугольника  $D$ , правая часть  $b_i(\delta)$  зависит от плотности тока  $\delta$ . Количество уравнений в системе (4) равно числу внутренних узлов  $N$ .

Сравнивая системы (3), (4) и используя Утверждение 2, приходим к следующему результату.

**Утверждение 3.** Для любой конфигурации узлов  $\{P_i\}_{i=1}^n$  при решении задачи нахождения электромагнитного поля методом конечных элементов и последующем решении возникающей системы линейных уравнений (4) методом последовательных итераций триангуляция Делоне является наилучшей среди всех возможных треугольных сеток с данным множеством узлов.

**Заключение.** Сходимость автоматизированного процесса последовательных приближений к решению нелинейных задач сильно зависит от конфигурации

сетки. Триангуляция Делоне минимизирует сумму котангенсов углов всех своих треугольников. Это экстремальное свойство применено при анализе процесса решения систем линейных уравнений, зависящих от сетки. Для задачи автоматизированного нахождения электромагнитного поля методом конечных элементов при заданном наборе узлов из всех возможных сеток наилучшей (в смысле скорости сходимости процесса последовательных приближений) является триангуляция Делоне.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Пароникян А.Е. Об углах треугольной сетки для расчета магнитных полей методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2007. - Т. 60, №3. – С. 523-532.
2. Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Акопян А.Э., Об оптимизации тетраэдральной сетки для расчета трехмерных магнитных полей методом конечных элементов. // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2008. - Т. 61, №2. – С. 305-317.
3. Делоне Б.Н., О пустоте сферы // Изв. АН СССР. ОМОН. - 1934.- №4. - С.793–800.

ГИУА (ПОЛИТЕХНИК). Материал поступил в редакцию 20.09.2014.

#### Հ.Ս. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ

#### ԴԵԼՈՆԵԻ ԵՌԱՆԿՈՒՆԱՊԱՏՄԱՆ ԷՔՍՏՐԵՄԱԼ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ՆՐԱ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԴԱՇՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Վերջավոր տարրերի մեթոդով էլեկտրամագնիսական դաշտի ավտոմատացված որոշման համար կիրառվում են եռանկյունային դիսկրետացիոն ցանցեր: Ոչ գծային դաշտային խնդիրների համար հաջորդական մոտարկումների զուգամիտման գործընթացը կախված է ցանցի երկրաչափական հատկություններից: Ուսումնասիրված է եռանկյունային ցանցերի մի կարևոր դաս՝ Դելոնեի եռանկյունապատումները: Ապացուցված է, որ Դելոնեի եռանկյունապատումը մինիմալացնում է իր բոլոր եռանկյունների բոլոր անկյունների կոտանգենսների գումարը: Այդ էքստրեմալ հատկությունը կիրառված է ցանցից կախված գծային հավասարումների համակարգերի լուծման գործընթացի վերլուծության համար: Ցույց է տված, որ վերջավոր տարրերի մեթոդով էլեկտրամագնիսական դաշտի որոշման խնդրի դեպքում հանգույցների տվյալ բազմության համար բոլոր հնարավոր ցանցերից Դելոնեի եռանկյունապատումն է ամենալավը՝ հաջորդական մոտարկումների զուգամիտման գործընթացի արագության իմաստով:

**Առանցքային բառեր.** էլեկտրամագնիսական դաշտ, վերջավոր տարրերի մեթոդ, եռանկյունային ցանցեր, Դելոնեի եռանկյունապատում:

H. S. SUKIASYAN

**THE EXTREMAL PROPERTY OF DELAUNAY TRIANGULATION AND ITS  
APPLICATIONS IN FIELD PROBLEMS**

At solving field problems by the finite-elements method, the triangular digitized meshes are applied. The convergence of the automated process of successive approximation aimed at solving nonlinear problems strongly depends on the mesh configuration. In this paper, an important class of triangular meshes is investigated - the Delaunay triangulation. It is proved that the Delaunay triangulation minimizes the sum of the cotangent angles of all its triangles. This extremal property is applied at analyzing the solving process for systems of linear equations depending on the mesh. It is shown that for the problem of numerical determination of the electromagnetic field by the finite-elements method at the given set of knots, the optimal mesh is the Delaunay triangulation (in respect of the speed of successive approximation process).

**Keywords:** electromagnetic field, finite-elements method, triangular meshes, Delaunay triangulation