

А.Г. АВЕТИСЯН, Л.С. ГЮЛЬЗАДЯН

**МЕТОД РЕШЕНИЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, ОСНОВАННЫЙ НА
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ**

Разработан метод решения задач многопараметрического линейного программирования (ЛП) с параметрическими зависимостями в коэффициентах целевой функции или правых частях ограничений. Метод основан на дифференциально-тейлоровских (ДТ) преобразованиях Г.Е. Пухова и симплекс-преобразованиях ЛП. Предложенный алгоритм проиллюстрирован на примере планировки производства нефтеперерабатывающей компании.

Ключевые слова: многопараметрические задачи линейного программирования, дифференциальные преобразования, интервалы оптимальности и допустимости, условия оптимальности и допустимости, симплекс-преобразования.

Введение. Использование ограниченных ресурсов, минимизация издержек, обеспечение максимальной выгоды, а также требования рынка приводят к необходимости исследования влияния вариации тех или иных параметров конкретной задачи на оптимальное решение. На практике эти изменения наиболее часто представляются в виде многопараметрических зависимостей. Используя изложенный в [1, 2] подход для решения задач ЛП с параметрическими коэффициентами целевой функции и правых частей ограничений, в данной работе на основе симплекс [3] и дифференциальных преобразований Г.Е. Пухова [4-7] предложен метод решения многопараметрических задач ЛП.

Теоретические основы. С целью применения изложенного в [1, 2] подхода для многопараметрического случая сначала рассмотрим многомерные дифференциальные преобразования Пухова [4-7]:

- прямое преобразование:

$$U(K_1, K_2, \dots, K_n) = \frac{H_1^{K_1} H_2^{K_2} \dots H_n^{K_n}}{K_1! K_2! \dots K_n!} \left[\frac{\partial^{K_1+K_2+\dots+K_n} u(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial t_1^{K_1} \partial t_2^{K_2} \dots \partial t_n^{K_n}} \right]_{t=t_v}, \quad K = (K_1, K_2, \dots, K_n) = \overline{0, \infty}; \quad (1)$$

- обратное преобразование:

$$u(t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum_{f=0}^{\infty} \sum_{K_1+K_2+\dots+K_n=f} \left(\frac{t_1-t_v}{H_1} \right)^{K_1} \left(\frac{t_2-t_v}{H_2} \right)^{K_2} \dots \left(\frac{t_n-t_v}{H_n} \right)^{K_n} U(K_1, K_2, \dots, K_n), \quad (2)$$

где $H = (H_1, H_2, \dots, H_n)$ - вектор некоторых положительных масштабных коэффициентов; $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ - вектор координат центра аппроксимации; $U = (K_1, K_2, \dots, K_n)$ - дискретная функция целочисленных аргументов; $K_1, K_2, \dots, K_n$ - дифференциальный спектр оригинала $u(t_1, t_2, \dots, t_n)$.

Математические модели задач ЛП с многопараметрическими зависимостями в коэффициентах целевой функции и правых частях ограничений можно представить следующим образом соответственно:

$$f(X) = c_1(t_1, t_2, \dots, t_l) \cdot x_1 + c_2(t_1, t_2, \dots, t_l) \cdot x_2 + \dots + c_n(t_1, t_2, \dots, t_l) \cdot x_n \rightarrow \underset{x \in D}{extr},$$

$$D: \begin{cases} AX \leq b, \\ x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0; \end{cases} \quad (3)$$

$$f(X) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \rightarrow \underset{x \in D}{extr},$$

$$D: \begin{cases} AX \leq b(t_1, t_2, \dots, t_l), \\ x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Применяя вышеизложенные прямые дифференциальные преобразования (1) по отношению к элементам с функциональными зависимостями в (3)-(4), получаем соотношения для вычисления ДТ-изображений соответствующих симплекс-преобразований, подробно описанных в работах [1,2].

1. Параметрическое изменение коэффициентов целевой функции:

$$\Delta_j^{(q)}(K_1, K_2, \dots, K_l) = \Delta_j^{(q-1)}(K_1, K_2, \dots, K_l) - \frac{a_{i_0 j}^{(q-1)}}{a_{i_0 j_0}^{(q-1)}} \Delta_{j_0}^{(q-1)}(K_1, K_2, \dots, K_l), \quad (5)$$

$$j = \overline{1, n+m}, \quad K = (K_1, K_2, \dots, K_l) = \overline{0, \infty}.$$

2. Параметрическое изменение правых частей ограничений:

$$X_{Bi_0}^{(q)}(K_1, K_2, \dots, K_l) = \frac{1}{a_{i_0 j_0}^{(q-1)}} \cdot X_{Bi_0}^{(q-1)}(K_1, K_2, \dots, K_l), \quad (6)$$

$$j = \overline{1, n+m}, \quad K = (K_1, K_2, \dots, K_l) = \overline{0, \infty},$$

$$X_{bi}^{(q)}(K_1, K_2, \dots, K_l) = X_{bi}^{(q-1)}(K_1, K_2, \dots, K_l) - \frac{a_{ij_0}^{(q-1)}}{a_{i_0 j_0}^{(q-1)}} \cdot X_{bi_0}^{(q-1)}(K_1, K_2, \dots, K_l), \quad (7)$$

$$i \neq i_0, \quad j = \overline{1, n+m}, \quad K = (K_1, K_2, \dots, K_l) = \overline{0, \infty}.$$

Интервалы оптимальности и допустимости определяются решением задач математического программирования соответственно:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l \bar{t}_i \rightarrow \max_t & \quad \sum_{i=1}^l \underline{t}_i \rightarrow \min_t \\ -\Lambda_j(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_l) \leq 0, j = 1, \dots, n, & \quad \Lambda_j(\underline{t}_1, \underline{t}_2, \dots, \underline{t}_l) \geq 0, j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l \bar{t} \rightarrow \max_t & \quad \sum_{i=1}^l \bar{t} \rightarrow \min_t \\ -\beta_j(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_l) \leq 0, j = 1, \dots, m, & \quad -\beta_j(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_l) \leq 0, j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (9)$$

Практический пример. Целью нефтеперерабатывающей компании, специализирующейся в производстве и смешивании нефти, является максимизация прибыли и выбор оптимального сочетания сырья, продуктов [8]. Условия эксплуатации приведены в табл. 1.

Таблица 1

Условия эксплуатации НПЗ

Продукты	Сырая нефть 1	Сырая нефть 2	Максимально допустимый объем производства (барр. / день)
Бензин	80	44	$2400 + \theta_1$ ($0 \leq \theta_1 \leq 6000$)
Керосин	5	10	$2000 + \theta_2$ ($0 \leq \theta_2 \leq 500$)
Мазут	10	36	6000
Остаток	5	10	-
Стоимость обработки (долл. США / барр)	0,50	1,00	-

Математическая модель имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} z = 8,1x_1 + 10,8x_2 \rightarrow \max_{x_1, x_2}, \\ \begin{cases} 0,8x_1 + 0,44x_2 \leq 24000 + \theta_1, \\ 0,05x_1 + 0,1x_2 \leq 2000 + \theta_2, \\ 0,1x_1 + 0,36x_2 \leq 6000, \\ 0 \leq \theta_1 \leq 6000, \\ 0 \leq \theta_2 \leq 500, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

где θ_1 и θ_2 - параметры, представляющие дополнительный максимально допустимый объем производства бензина и керосина соответственно; x_1 и x_2 - скорости потоков сырой нефти 1 и 2 (баррелей / день).

Ход решения данной задачи предложенным методом приведен в табл. 2-8 при $K_1 = 2$, $K_2 = 2$ и $H_1 = 1$, $H_2 = 1$. В качестве начального центра аппроксимации выбрана точка $\theta = [\theta_1, \theta_2] = [0, 0]$.

Итерация 1. Определение оптимального решения и интервала допустимости полученного решения, $\theta = [\theta_1, \theta_2] = [0, 0]$; $K_1 = 2$, $K_2 = 2$; $H_1 = 1$, $H_2 = 1$.

Таблица 2

Шаг 1

I_B	X_B	a_1	$j_0 \rightarrow a_2$	a_3	a_4	a_5
3	$x_3(k_1 k_2) = \begin{bmatrix} 24000 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0,8	0,44	1	0	0
4	$x_4(k_1 k_2) = \begin{bmatrix} 2000 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0,05	0,1	0	1	0
$i_0 \rightarrow 5$	$x_5(k_1 k_2) = \begin{bmatrix} 6000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0,1	0,36	0	0	1
	Δ	-8,1	-10,8	0	0	0

Таблица 3

Шаг 2

I_B	X_B	$j_0 \rightarrow a_1$	a_2	a_3	a_4	a_5
3	$x_3(k_1 k_2) = \begin{bmatrix} 16666,666 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0,677777	0	1	0	-1,222222
$i_0 \rightarrow 4$	$x_4(k_1 k_2) = \begin{bmatrix} 333,333 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0,022222	0	0	1	-0,277777
2	$x_2(k_1 k_2) = \begin{bmatrix} 16666,666 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0,277777	1	0	0	2,777777
	Δ	-5,1	0	0	0	30

Таблица 4

Шаг 3

I_B	X_B	a_1	a_2	a_3	a_4	$j_0 \rightarrow a_5$
$i_0 \rightarrow 3$	$x_3(k_1 k_2) = \begin{bmatrix} 6500 & -30,5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0	0	1	-30,5	7,25
1	$x_1(k_1 k_2) = \begin{bmatrix} 15000 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	1	0	0	45	-12,5
2	$x_2(k_1 k_2) = \begin{bmatrix} 12500 & -12,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0	1	0	-12,5	6,25
	Δ	0	0	0	229,5	-33,75

Таблица 5

Шаг 4

I_B	X_B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
5	$x_5(k_1 k_2) = \begin{bmatrix} 896,551 & -4,206896 & 0 \\ 0,132793 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0	0	0,137931	-4,2069	1
1	$x_1(k_1 k_2) = \begin{bmatrix} 26206,896 & -7,5862 & 0 \\ 1,724138 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	1	0	1,72414	-7,58621	0
2	$x_2(k_1 k_2) = \begin{bmatrix} 6896,551 & 13,793 & 0 \\ -0,862068 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0	1	-0,86207	13,7931	0
	Δ	0	0	4,655172	87,5	0

Шаг 5. Восстановление оригиналов согласно обратному ДТ-преобразованию (2):

$$x_1(\theta_1, \theta_2) = 26206,896 \cdot (\theta_1 - 0)^0 (\theta_2 - 0)^0 + 1,724138 \cdot (\theta_1 - 0)^1 (\theta_2 - 0)^0 - 7,5862 \cdot (\theta_1 - 0)^0 (\theta_2 - 0)^1 + 0 \cdot (\theta_1 - 0)^1 (\theta_2 - 0)^1 = 1,724138\theta_1 - 7,5862\theta_2 + 26206,896;$$

$$x_2(\theta_1, \theta_2) = 6896,551 \cdot (\theta_1 - 0)^0 (\theta_2 - 0)^0 - 0,862068 \cdot (\theta_1 - 0)^1 (\theta_2 - 0)^0 + 13,793 \cdot (\theta_1 - 0)^0 (\theta_2 - 0)^1 + 0 \cdot (\theta_1 - 0)^1 (\theta_2 - 0)^1 = -0,862068\theta_1 + 13,793\theta_2 + 6896,551;$$

$$x_5(\theta_1, \theta_2) = 896,551 \cdot (\theta_1 - 0)^0 (\theta_2 - 0)^0 + 0,13793 \cdot (\theta_1 - 0)^1 (\theta_2 - 0)^0 - 4,206896 \cdot (\theta_1 - 0)^0 (\theta_2 - 0)^1 + 0 \cdot (\theta_1 - 0)^1 (\theta_2 - 0)^1 = 0,13793\theta_1 - 4,206896\theta_2 + 896,551;$$

$$z(\theta_1, \theta_2) = 4,655172\theta_1 + 87,5\theta_2 + 286758,6.$$

Шаг 6. Определение значений параметров θ_1 и θ_2 по (9), при которых полученное решение остается допустимым:

$$\begin{cases} -\theta_1 - \theta_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} -0,13793\theta_1 + 4,206896\theta_2 \leq 896,551 \\ -1,724138\theta_1 + 7,5862\theta_2 \leq 26206,896 \\ 0,862068\theta_1 - 13,793\theta_2 \leq 6896,551 \\ \theta_1 \leq 6000, \\ \theta_2 \leq 500 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = 6000; \theta_2 = 409,8.$$

Итерация 2. Определение оптимального решения и интервала допустимости полученного решения при $\theta = [\theta_1, \theta_2] = [6000, 410]$.

Таблица 6

Шаг 1

I_B	X_B	a_1	$j_0 \rightarrow a_2$	a_3	a_4	a_5
3	$x_3(k_1, k_2) = \begin{bmatrix} 30000 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0,8	0,44	1	0	0
4	$x_4(k_1, k_2) = \begin{bmatrix} 2410 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0,05	0,1	0	1	0
$i_0 \rightarrow 5$	$x_5(k_1, k_2) = \begin{bmatrix} 6000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0,1	0,36	0	0	1
	Δ	-8,1	-10,8	0	0	0

Таблица 7

Шаг 2

I_B	X_B	$j_0 \rightarrow a_1$	a_2	a_3	a_4	a_5
$i_0 \rightarrow 3$	$x_3(k_1 k_2) = \begin{bmatrix} 22666,666 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0,677777	0	1	0	-1,222222
4	$x_4(k_1 k_2) = \begin{bmatrix} 743,333 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0,022222	0	0	1	-0,277777
2	$x_2(k_1 k_2) = \begin{bmatrix} 16666,666 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0,277777	1	0	0	2,777777
	Δ	-5,1	0	0	0	30

Таблица 8

Шаг 3

I_B	X_B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	$x_1(k_1 k_2) = \begin{bmatrix} 33442,625 & 0 & 0 \\ 1,4754 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	1	0	1,475579	0	-1,8032
4	$x_4(k_1 k_2) = \begin{bmatrix} 0,164615 & 1 & 0 \\ -0,0327868 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0		-0,0327868	1	-0,2377
2	$x_2(k_1 k_2) = \begin{bmatrix} 7344,05 & 0 & 0 \\ -0,409836 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0		-0,409836	0	3,27868
	Δ	0		7,5245	0	20,8032

Шаг 4. Восстановление оригиналов согласно обратному ДТ-преобразованию (2) в центре аппроксимации $\theta = [\theta_1, \theta_2] = [6000, 410]$:

$$x_1(\theta_1, \theta_2) = 33442,625 \cdot (\theta_1 - 6000)^0 (\theta_2 - 410)^0 + 0 \cdot (\theta_1 - 6000)^1 (\theta_2 - 410)^0 + \\ + 1,4754 \cdot (\theta_1 - 6000)^0 (\theta_2 - 410)^1 + 0 \cdot (\theta_1 - 0)^1 (\theta_2 - 0)^1 = 1,4754\theta_1 + 24590,225;$$

$$x_2(\theta_1, \theta_2) = 7377,05 \cdot (\theta_1 - 6000)^0 (\theta_2 - 410)^0 + 0 \cdot (\theta_1 - 6000)^1 (\theta_2 - 410)^0 - \\ - 0,409836 \cdot (\theta_1 - 6000)^0 (\theta_2 - 410)^1 + 0 \cdot (\theta_1 - 6000)^1 (\theta_2 - 410)^1 = -0,409836\theta_1 + 9836,066;$$

$$x_4(\theta_1, \theta_2) = 0,164615 \cdot (\theta_1 - 6000)^0 (\theta_2 - 410)^0 + 1 \cdot (\theta_1 - 6000)^1 (\theta_2 - 410)^0 - \\ - 0,0327868 \cdot (\theta_1 - 6000)^0 (\theta_2 - 410)^1 + 0 \cdot (\theta_1 - 6000)^1 (\theta_2 - 410)^1 = -0,0327868\theta_1 + \theta_2 - 213,114585 ; \\ z(\theta_1, \theta_2) = 7,5245\theta_1 + 305409,84.$$

Окончательное решение приведено в табл. 9.

Таблица 9

Решение примера

$\theta = [\theta_1, \theta_2]$	$X = (x_1, x_2)$	z
$0 \leq \theta_1 < 6000$ $0 \leq \theta_2 \leq 409,8$	$x_1(\theta_1, \theta_2) = 1,724138\theta_1 - 7,5862\theta_2 + 26206,896$ $x_2(\theta_1, \theta_2) = -0,862068\theta_1 + 13,793\theta_2 + 6896,551$	$z(\theta_1, \theta_2) = 4,655172\theta_1 +$ $+87,5\theta_2 + 286758,6$
$\theta_1 = 6000$ $410 \leq \theta_2 \leq 500$	$x_1(\theta_1, \theta_2) = 1,4754\theta_1 + 24590,225$ $x_2(\theta_1, \theta_2) = -0,409836\theta_1 + 9836,066$	$z(\theta_1, \theta_2) = 7,5245\theta_1 + 305409,84$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гюльзаян Л.С. К решению одного класса параметрических задач линейного программирования // Вестник ГИУА. Серия “Моделирование, оптимизация, управление”. - Ереван, 2011. - Вып. 14, том 2. - С 130-137.
2. Գրուցադյան Լ.Ս. Նպատակային ֆունկցիայի պարամետրական գործակիցներով գծային ծրագրավորման խնդիրների լուծման եղանակ՝ հիմնված դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա // ՀՊՃՀ ԼԴԱԲԵԴ. Գիտական հոդվածների ժողովածու. - Երևան, 2012. - Մաս 1. - Էջ. 341-347:
3. Таха Х. Введение в исследование операций. - М.: Мир, 2005. - 912 с.
4. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. - Киев: Наукова думка, 1980. - 419 с.
5. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – Киев: Наукова думка, 1986. - 158 с.
6. Пухов Г.Е. Дифференциальные спектры и модели. – Киев: Наукова думка, 1990. – 230 с.
7. Симонян С.О., Аветисян А.Г. Прикладная теория дифференциальных преобразований: Монография. - Ереван: Издательство ГИУА “Չարտարետ”, 2010. - 361с.
8. Faisca N.P., Dua V., Pistikopoulos E.N. Multiparametric Linear and Quadratic Programming. - Weinheim, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co, 2007. - 23p.

ГИУА (ПОЛИТЕХНИК). Материал поступил в редакцию 10.04.2014.

Ա.Գ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ, Լ.Ս. ԳՅՈՒԼԶԱԴՅԱՆ

**ԲԱԶՄԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԳԾԱՅԻՆ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ
ՄԵԹՈԴ՝ ՀԻՄՆՎԱԾ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԶԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎՐԱ**

Առաջարկված է մեթոդ՝ նպատակային ֆունկցիայի գործակիցների կամ սահմանափակումների ազատ անդամների բազմապարամետրական կախվածություններով գծային ծրագրավորման խնդիրների լուծման համար: Մեթոդը հիմնված է գծային ծրագրավորման սիմպլեքս և Գ. Ե. Պուխովի դիֆերենցիալ-թելոյրյան ձևափոխությունների վրա: Առաջարկված ալգորիթմը լուսաբանված է նավթամշակման ընկերության արտադրության պլանավորման գործնական օրինակով:

Առանցքային բառեր. բազմապարամետրական գծային ծրագրավորման խնդիրներ, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, օպտիմալության և թույլատրելիության միջակայքեր, օպտիմալության և թույլատրելիության պայմաններ, սիմպլեքս ձևափոխություններ:

A.G. AVETISYAN, L.S. GYULZADYAN

**A METHOD FOR SOLVING MULTIPARAMETRIC LINEAR PROGRAMMING
PROBLEMS BASED ON DIFFERENTIAL TRANSFORMS**

A method for solving multiparametric linear programming (LP) problems with dependencies in coefficients of objective function or right-hand sides of constraints is developed. The method is based on differential Taylor transforms (DT) of G.E.Pukhov and the LP simplex transforms. The proposed algorithm is shown on the example of planning the production of an oil-processing company.

Keywords: multiparametric linear programming problems, differential transforms, optimality and feasibility conditions, optimality and feasibility intervals, simplex transforms.