

ՀՏԴ 004:504.5:681.51

ԱՎՏՈՄԱՏԱՑՈՒՄ ԵՎ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ
ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

Լ.Գ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

ՕՊՏԻՄԱԼ ՎԱՐԿԱՅԻՆ ՊՈՐՏՖԵԼԻ ՁևԱՎՈՐՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Արժեթղթերի համար ձևակերպված Մարկովիցի հայտնի մոդելի հիման վրա մշակված է օպտիմալ վարկային պորտֆելի ձևավորման մաթեմատիկական մոդել, որը ներկայացնում է ամբողջաթիվ ծրագրավորման խնդիր: Խնդրի լուծման գործընթացն ավտոմատացված է:

Առանցքային բառեր. վարկային ռիսկ, վարկային պորտֆել, եկամտաբերության դիսպերսիա, դեֆոլտի հավանականություն:

Ներածություն: Պորտֆելային մակարդակում վարկային ռիսկի կառավարման կարևոր փուլերից է վարկային պորտֆելի նպատակաուղղված ձևավորումն այնպես, որ հաշվի առնվեն նպատակային եկամտաբերությունը և դիվերսիֆիկացիան, ինչպես նաև վարկային ռիսկի վրա դրված սահմանափակումները [1]:

Վարկային պորտֆելի կառուցվածքի օպտիմալացումը և նպատակաուղղված ձևավորումը, ի տարբերություն արժեթղթերի պորտֆելի օպտիմալացման, համեմատաբար նոր ուղղություն է և արժանի է հատուկ ուշադրության:

Վարկային պորտֆելի հատկությունների վերլուծությունը և արժեթղթերի պորտֆելի հետ դրանց համեմատումը թույլ է տալիս առանձնացնել երկու առավել կարևոր գործոններ, որոնք որոշում են դրանց կառավարումների միջև եղած տարբերությունը: Նախ՝ վարկերը, ի տարբերություն արժեթղթերի, չունեն որոշակի շուկայական գին, երկրորդ՝ ներդրում կատարողը, այսինքն՝ բանկը, չի կարող նախօրոք որոշված ծավալով վարկեր ձեռք բերել: Վարկի ծավալը որոշվում է վարկառուի կողմից վարկային հայտով՝ կախված վարկային ռեսուրսների պահանջարկից: Այդ պատճառով բանկի ղեկավարության որոշումը հանգեցվում է վարկից եկամտաբերության դրույքի որոշմանը և ունի բինար բնույթ՝ տրամադրել (1) կամ չտրամադրել (0) հարցվող ծավալի վարկ [2]:

Վարկի տրամադրման վճռի կայացման բինար բնույթը թույլ է տալիս, հաշվի առնելով փոփոխականների ամբողջաթիվ լինելը, առաջարկել վարկային պորտֆելի օպտիմալացման մոդել՝ հիմնված արժեթղթերի պորտֆելի համար ձևակերպված Մարկովիցի հայտնի մոդելի վրա [3]:

Խնդրի դրվածքը: Ենթադրենք՝ անհրաժեշտ է ձևավորել վարկային պորտֆել՝ ըստ $i = 1, N$ պարտատերերի կողմից ներկայացված $V_1, \dots, V_N$ ծավալներով վարկային հայտերի: Ենթադրենք նաև, որ բանկի ընդհանուր վարկային ռեսուրսների գումարը V է: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր վարկի կշռային գործակիցը՝ w_i -ն կորոշվի

$$w_i = V_i / V$$

առնչությամբ:

n_i - ով նշանակենք վարկ տրամադրելու վերաբերյալ բանկի վճիռն արտացոլող երկուական փոփոխականները, այսինքն՝ $n_i = 1$, եթե i -րդ վարկատուին վարկ է տրամադրվել, և $n_i = 0$ ՝ հակառակ դեպքում: Այն փաստը, որ բանկի կողմից տրամադրվող վարկերի գումարը չպետք է գերազանցի բանկի վարկային ռեսուրսների ընդհանուր ծավալը, արտահայտվում է կշռային գործակիցների գումարի վրա դրված սահմանափակմամբ [4]՝

$$\sum_{i=1}^N V_i n_i \leq V \Rightarrow \sum_{i=1}^N w_i n_i \leq 1:$$

r_i - ով նշանակենք i -րդ վարկից ստացվելիք եկամտաբերությունը, σ^2_i - ով՝ i -րդ վարկից սպասվելիք եկամտաբերության դիսպերսիան: Ենթադրենք նաև, որ երկու կամայական i և j եկամտաբերությունների միջև կորելյացիայի գործակիցը նույնն է, և այն նշանակենք ρ - ով: Այսպիսով, վարկային պորտֆելի օպտիմալացման խնդիրը, հաշվի առնելով փնտրվող փոփոխականների ամբողջաթիվ լինելը, կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ՝

$$L = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 n_i^2 w_i^2 + 2 \sum_{i>j, j=1}^N (\sigma_i \sigma_j \rho) (n_i w_i) (n_j w_j) \rightarrow \min_{n_i}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^N r_i n_i w_i \geq \bar{r}, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i n_i \leq 1, \quad (3)$$

$$E = \sum_{i=1}^N n_i P D_i C_i (1 - R_i) \leq A, \quad (4)$$

$$n_i \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (5)$$

որտեղ L - ը վարկային պորտֆելի եկամտաբերության դիսպերսիան է, σ_i - ն՝ i -րդ վարկի եկամտաբերության միջին քառակուսային շեղումը, w_i - ն՝ i -րդ վարկի կշռային գործակիցը, n_i - ն՝ փնտրվող բինար փոփոխականները, ρ - ն՝ երկու կամայական վարկերի եկամտաբերությունների միջև կորելյացիայի գործակիցը, r_i - ն՝ i -րդ վարկի

եկամտաբերությունը, $\bar{r}$ -ն՝ վարկային պորտֆելի նվազագույն եկամտաբերությունը (որը սահմանվում է բանկի կողմից), E -ն՝ վարկային պորտֆելի սպասելի կորուստները [5], PD_i -ն՝ i -րդ վարկի դեֆոլտի հավանականությունը (որը որոշվում է սքորինգային եղանակով) [6], C_i -ն՝ դեֆոլտի դեպքում ռիսկի ենթարկված ակտիվների արժեքը, R_i -ն՝ կորուստների փոխհատուցման մակարդակը, A -ն՝ բանկի կողմից ընդունված թույլատրելի ռիսկի մակարդակը, N -ը՝ վարկային պորտֆելում վարկերի (հաճախորդների) քանակը:

Ձևակերպված խնդիրը ներկայացնում է (1) եկամտաբերության դիսպերսիայի մինիմալացման խնդիր՝ վարկային պորտֆելի նվազագույն եկամտաբերության (2), կշռային գործակիցների գումարի (3), պորտֆելի սպասելի կորուստների (4) և փնտրվող փոփոխականների բուլյան լինելու (5) վրա դրված սահմանափակումների դեպքում:

Վարկային պորտֆելի եկամտաբերության դիսպերսիան կազմված է վարկային պորտֆելը ձևավորող առանձին վարկերի եկամտաբերությունների σ_i^2 դիսպերսիաների գումարից և վարկերի եկամտաբերության կովարիացիայից՝ $\sigma_i \sigma_j \rho$, հաշվի առնելով w_i կշռային գործակիցները և վարկի տրամադրման երկուական նշիչները՝ n_i [7]:

Հաշվի առնելով ՀՀ բանկային համակարգի առանձնահատկությունները և այն փաստը, որ դիտարկվում է ֆիզիկական անձ հանդիսացող հաճախորդների վարկային պորտֆելը, վարկառուների եկամտաբերության կովարիացիան կարող ենք հաշվի չառնել: Արդյունքում՝ (1) առնչությունը կընդունի է հետևյալ տեսքը՝

$$L = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 n_i^2 w_i^2 \rightarrow \min_{n_i} : \quad (6)$$

Առանձին վարկերի եկամտաբերությունների դիսպերսիաները որոշվում են վիճակագրության տեսությունից հայտնի Դելտա մեթոդով [8]՝

$$\sigma_i^2 = (1 + r_f)^2 \frac{[(LGD \cdot PD_i)^2 (1 - PD_i) + (LGD \cdot (PD_i - 1))^2 PD_i]}{[(1 - LGD \cdot PD_i)]^2}, \quad (7)$$

որտեղ r_f -ը առանց ռիսկայնության տոկոսադրույքն է, LGD-ը՝ վարկառուի դեֆոլտի դեպքում կորուստները (վարկառուին տրամադրված ընդհանուր գումարից տոկոսաբաժինը) [9]:

Վարկի եկամտաբերությունը որոշվում է

$$r_i = \frac{V_i}{P_i} - 1 \quad (8)$$

առնչությամբ [10], որտեղ P_i -ն վարկի ընթացիկ դիսկոնտային արժեքն է, այսինքն՝

$$P_i = \frac{PD_i(1-LGD) + (1-PD_i)V_i}{1+r_f} \quad (9)$$

Վարկային պորտֆելի նվազագույն եկամտաբերությունը կամ առանց ռիսկայնության տոկոսադրույքը՝ r_f -ը, և պորտֆելի սպասելի կորուստների վրա դրված սահմանափակումը՝ A -ն, տրվում են բանկի կողմից [11]:

Այսպիսով, ֆիզիկական անձ հանդիսացող վարկառուների համար օպտիմալ վարկային պորտֆելի ձևավորման խնդրի մաթեմատիկական մոդելը վերջնականապես կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$L = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 n_i^2 w_i^2 \rightarrow \min_{n_i}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^N r_i n_i w_i \geq \bar{r}, \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i n_i \leq 1, \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^N n_i PD_i C_i (1-R_i) \leq A, \quad (13)$$

$$n_i \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, N}: \quad (14)$$

Ձևակերպված խնդիրը ներկայացնում է բուլյան փոփոխականներով ամբողջաթիվ ծրագրավորման խնդիր, որը լուծված է հայտնի լրիվ ընտրանքների եղանակով:

Ներկայացնենք խնդրի լուծման մեքենայական արդյունքները մոդելային օրինակով:

Հետազոտության արդյունքները: Դիտարկենք օպտիմալ վարկային պորտֆելի ձևավորման օրինակ, որը հիմնված է Standard&Poor's գործակալության կողմից առաջարկված վարկային ռեյթինգների իրական տվյալների վրա: Դեֆոլտի հավանականությունները, դրանց համապատասխան R1-R9 ագրեգացված վարկային ռեյթինգները, ըստ (7) և (8) առնչությունների հաշվարկված վարկերից եկամուտները և եկամուտների դիսպերսիաները ներկայացված են աղ.1-ում: Հաշվարկներն իրականացված են LGD=0,5 և $r_f=0,05$ արժեքների համար:

Դեֆոլտի հավանականությունները, վարկից նվազագույն եկամուտները և եկամուտների դիսպերսիաները

Ռեյթինգը	Դեֆոլտի հավանականությունը (PD_i), %	Վարկից պահանջվող նվազագույն եկամտա- բերությունը (r)	Եկամտաբերության ստանդարտ շեղում- ները (σ^2)
R1	0	0,0500	0,0000
R2	0,015	0,0501	0,0061
R3	0,035	0,0502	0,0094
R4	0,085	0,0504	0,0146
R5	0,285	0,0514	0,0267
R6	0,69	0,0535	0,0417
R7	2,12	0,0607	0,0736
R8	9,35	0,0990	0,1602
R9	21,94	0,1732	0,2611

Վարկային պորտֆելի ձևավորման համար դիտարկենք 18 վարկային հայտեր: Համարենք, որ յուրաքանչյուր վարկային ռեյթինգին համապատասխանում է երկու-ական հայտ՝ վարկային պորտֆելի ընդհանուր ծավալի 10% ($w_i = 0,1$, մանր հայտեր) և 20% ($w_i = 0,2$, խոշոր հայտեր) ծավալներով: Պահանջվում է որոշել $n_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, 18$ փոփոխականների օպտիմալ արժեքները ($n_i = 1$ վարկը տրամադրելու կամ $n_i = 0$ վարկը մերժելու դեպքում):

Դիտարկենք բանկի երկու հավանական ռազմավարություն՝ պորտֆելի $\bar{r} = 9\%$ նպատակային եկամտաբերությամբ՝ բարձր ռիսկայնությամբ վարկերը և պորտֆելի $\bar{r} = 6\%$ նպատակային եկամտաբերությամբ՝ ցածր ռիսկայնությամբ վարկերը: Դեֆոլտի դեպքում ռիսկի ենթարկված ակտիվների արժեքը՝ C_i -ն, այն գումարն է, որը բանկը կկորցնի հաճախորդի դեֆոլտի դեպքում: Փաստացի կորուստների մեծությունը որոշվում է վարկը պրոբլեմատիկ ճանաչելու պահի դրությամբ՝ վարկի մայր գումարի և հաշվեգրված տոկոսագումարների հանրագումարով: Որպես C_i ընդունենք i -րդ հաճախորդի ընթացիկ վարկային պարտքը, այսինքն՝ հաճախորդի վարկային պարտավորությունը պորտֆելի ձևավորման պահին, որն էլ հավասար է տրամադրվող վարկի գումարի չափին՝ V_i -ին: R_i -ն i -րդ վարկատուի դեֆոլտի դեպքում կորուստների հնարավոր փոխհատուցման մակարդակն է: Գրավի իրացման հնարավորության փորձագիտական գնահատման ճանապարհով դիտարկվող օրինակի դեպքում բանկում ֆիզիկական անձանց տրամադրվող բոլոր վարկերը բաժանված են ապահովվածության երեք խմբի՝ անշարժ գույքի գրավով ապահովված վարկեր (դրանք են՝ հիփոթեքային, վերանորոգման, անշարժ գույքի գրավով սպառողական

վարկեր), որոնց համար $R_i = 0,7C_i$, ավտոմեքենայի գրավով ապահովված վարկեր (ավտոմեքենայի ձեռքբերման վարկ, որի համար գրավի առարկա է հանդիսանում ձեռք բերվող ավտոմեքենան)՝ $R_i = 0,6C_i$, և առանց գրավի վարկեր (սպառողական վարկ, օվերդրաֆտ, կրեդիտ քարտ)՝ $R_i = 0$: Բանկի կողմից ընդունված թույլատրելի ռիսկի մակարդակը՝ A -ն կընդունենք 8%:

Օպտիմալ վարկային պորտֆելի ձևավորման գործընթացն իրականացված է ըստ (10)-(14) մաթեմատիկական մոդելի: Մեքենայական փորձարկումների արդյունքները ցածր և բարձր ռիսկայնությամբ վարկերի համար ներկայացված են աղ. 2-ում:

Այսպիսով, $\bar{r} = 6\%$ դեպքում վարկային պորտֆելի եկամտաբերությունը 0,0624 է, պորտֆելի եկամտաբերության ստանդարտ շեղումը՝ 0,0272, իսկ $\bar{r} = 9\%$ դեպքում վարկային պորտֆելի եկամտաբերությունը՝ 0,0919, պորտֆելի եկամտաբերության ստանդարտ շեղումը՝ 0,0692:

Աղյուսակ 2

Օպտիմալ վարկային պորտֆելի ձևավորումը

NN	R	C_i	r_i	σ_i	w_i	$\bar{r} = 6\%$		$\bar{r} = 9\%$	
						n_i	Ընդամենը եկամտաբ.	n_i	Ընդամենը եկամտաբ.
1	2	3	4	5	6	7	8=(4)*(6)*(7)	9	10=(4)*(6)*(9)
1	R1	0,7	0,05	0,00	0,1	1	0,005	1	0,005
2	R1	0	0,05	0	0,2	1	0,01	1	0,01
3	R2	0,6	0,0501	0,0061	0,1	1	0,005	1	0,005
4	R2	0,7	0,0501	0,0061	0,2	1	0,01	1	0,01
5	R3	0	0,0502	0,0094	0,1	0	0,00	0	0
6	R3	0,6	0,0502	0,0094	0,2	1	0,01	0	0
7	R4	0,6	0,0504	0,0146	0,1	1	0,00504	0	0
8	R4	0,7	0,0504	0,0146	0,2	0	0	0	0
9	R5	0,7	0,0514	0,0267	0,1	0	0	0	0
10	R5	0,6	0,0514	0,0267	0,2	0	0	0	0
11	R6	0	0,0535	0,0417	0,1	0	0	0	0
12	R6	0,6	0,0535	0,0417	0,2	0	0	0	0
13	R7	0,6	0,0607	0,0736	0,1	0	0	0	0
14	R7	0.	0,0607	0,0736	0,2	0	0	0	0
15	R8	0,7	0,099	0,1602	0,1	0	0	1	0,0099
16	R8	0,7	0,099	0,1602	0,2	0	0	0	0
17	R9	0,7	0,1732	0,2611	0,1	1	0,0173	1	0,0173
18	R9	0,6	0,1732	0,2611	0,2	0	0	1	0,0346

Ինչպես երևում է ստացված արդյունքներից, վարկային պորտֆելի նվազագույն $\bar{r} = 6\%$ նպատակային եկամտաբերությանը հասնելու համար անհրաժեշտ է վարկեր տրամադրել համեմատաբար վստահելի վարկառուներին՝ առավել փոքր եկամտաբերության դիսպերսիայով, մասնավորապես՝ 1-4, 6 և 7 վարկառուներին: Այդ վարկերի համար գումարային եկամտաբերությունը կազմում է մոտ 5%, իսկ նպատակային 6% եկամտաբերությանը հասնելու համար հարմար է տրամադրել նաև 17-րդ վարկը, որը պորտֆելի արդյունարար եկամտաբերությունը կբարձրացնի մինչև 6,24%: Այսպիսով, միայն վարկային պորտֆելի 10% ն է բնութագրվում բարձր ռիսկայնությամբ, և այդ դեպքում եկամտաբերության ստանդարտ շեղումը կազմում է 2,72%:

Բարձր ռիսկայնության ռազմավարությանը համապատասխան՝ 9% նվազագույն նպատակային եկամտաբերությանը հասնելու համար անհրաժեշտ է վարկեր տրամադրել 1-4, 15 և 17-18-րդ վարկառուներին: 1-4 վարկերը կազմում են վարկային պորտֆելի հիմնական եկամտաբերությունը՝ մոտ 5%-ը: Եկամտաբերության մնացորդային բաժինն ընկնում է ռիսկային 15 և 17-18-րդ վարկերի վրա այնպես, որ արդյունարար եկամտաբերությունն այդ դեպքում կազմում է 9,19%: Այս դեպքում ռիսկային ներդրումների մասնաբաժինը վարկային պորտֆելի 40% -ն է, որը նշանակալիորեն բարձր է ցածր ռիսկայնությամբ ռազմավարության դեպքում ռիսկային ներդրումների մասնաբաժնից: Ձևավորված ռիսկային պորտֆելի եկամտաբերության ստանդարտ շեղումը կազմում է 6,92%, որն ավելի քան երեք անգամ գերազանցում է ցածր ռիսկայնության ռազմավարության օպտիմալ լուծման եկամտաբերության ստանդարտ շեղումը:

Եզրակացություն: Մշակված է օպտիմալ վարկային պորտֆելի ձևավորման մաթեմատիկական մոդել, որը ներկայացնում է եկամտաբերության դիսպերսիայի մինիմալացման խնդիր՝ վարկային պորտֆելի նվազագույն եկամտաբերության, կշռային գործակիցների գումարի և վարկային պորտֆելի սպասելի կորուստների վրա դրված սահմանափակումներով: Մշակված մոդելը հնարավորություն է տալիս ձևավորել օպտիմալ վարկային պորտֆել՝ ընտրելով այն վարկառուներին, որոնք նվազագույնի կհասցնեն վարկային ռիսկերը: Ձևակերպված խնդիրը ներկայացնում է ամբողջաթիվ ծրագրավորման խնդիր: Խնդրի լուծման գործընթացն ավտոմատացված է: Լուծված է մոդելային օրինակ: Մեքենայական փորձարկումների արդյունքները ներկայացված են աղյուսակի տեսքով: Կատարված է ստացված արդյունքների վերլուծություն:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. **Кабушкин С.Н.** Управление банковским кредитным риском. - М.: Новое знание, 2006. - 336 с.
2. **Боди З., Кейн А., Маркус А.Д.** Принципы инвестиций. - 4-е изд. /Пер. с англ. - М.: Вильямс, 2002. - 97 с.

3. **Мищенко А.В., Виноградова Е.В.** Оптимизация портфеля финансовых активов при ограничении на их целочисленность // Финансовый менеджмент.- 2006.- №5. - С. 67-77.
4. Банковские риски / Под ред. **О.И. Лаврушина и Н.И. Валенцевой**.- М.: Кнорус, 2007. - 232 с.
5. **Пустовалова Т.А.** Построение модели оценки кредитного риска кредитного портфеля коммерческого банка (на основе методологии VAR) // Научные доклады.- 2010.- № 2.- С.11 – 38.
6. **Ավետիսյան Լ.Գ., Չիլինգիրյան Մ.Գ.** Ֆիզիկական անձանց վարկունակության գնահատման ավտոմատացված համակարգի մշակումը // ՀՀԱ Լրաբեր էկոնոմիկա և Կառավարում.- 2013. – Հտտ. 10, №1. – էջ 16-23:
7. **Соколов Г.А., Гладких И.М.** Математическая статистика. - М.: Экзамен, 2004. – 432 с.
8. **Галимова А.М.** Базель II: осторожное движение в будущее // Банковские услуги. - 2007. - №5. - С. 7-11.
9. **Ван Грюнинг Х., Братанович Б.С.** Анализ банковских рисков. Система оценки корпоративного управления и управление финансовым риском / Пер. с англ. - М.: Весь мир, 2003. - 304 с.
10. **Alexander J. McNeil** Rudiger Frey, Paul Embrechts Quantitative risk management: concepts, techniques and tools // Princeton series in finance. - Princeton University Press, 2005. – 25 p.
11. **Чижова А.С.** Математические модели оценки банковского кредитного риска с учетом динамики кредитных рейтингов заемщиков: Дис. ... канд. эконом. наук.- М., 2008. 174 с.

ГИУА (ПОЛИТЕХНИК). Материал поступил в редакцию 10.01.2013.

Լ.Գ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

ЗАДАЧА ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО КРЕДИТНОГО ПОРТФЕЛЯ

На основе известной модели Марковица, сформированной для ценных бумаг, разработана математическая модель формирования оптимального кредитного портфеля, которая представляется в виде задачи целочисленного программирования. Процесс решения задачи автоматизирован.

Ключевые слова: кредитный риск, кредитный портфель, дисперсия доходности, вероятность дефолта.

L.G. AVETISYAN

THE TASK OF FORMING AN OPTIMUM CREDIT PORTFOLIO

Based on the well-known model of Markowitz developed for securities, a mathematical model for the optimal credit portfolio is worked out introduced as a problem of integer programming: The process of solving the problem is automated.

Keywords: credit risk, credit portfolio, variance of profitability, the default probability.