

С.О. СИМОНЯН, А.Г. АСАТРЯН, Г.А. АСЛАНЯН

**О ПРИМЕНЕНИИ МНОГОТОЧЕЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ЗАДАЧАХ С РАЗРЫВНЫМИ ФУНКЦИЯМИ**

Получены сравнительные характеристики процедур восстановления разрывных функций-оригиналов с помощью однотоочечных и многотоочечных дифференциально-тейлоровских, а также дифференциально-падеевских преобразований. Показаны преимущества многотоочечных дифференциально-тейлоровских преобразований.

Ключевые слова: разрывные функции, однотоочечные и многотоочечные дифференциально-тейлоровские преобразования, дифференциально-падеевские преобразования, сравнительные характеристики.

Однотоочечные дифференциально-тейлоровские (ДТ) преобразования имеют вид [1,2]

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \left[\frac{d^K x(t)}{dt^K} \right]_{t=t_v \neq 0}, K = \overline{0, \infty} \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \sum_{K=0}^{K=\infty} \left(\frac{t-t_v}{H} \right)^K X(K), \quad (1)$$

где $K = \overline{0, \infty}$ – целочисленный аргумент; $X(K)$, $K = \overline{0, \infty}$ – дискреты оригинала $x(t)$; H – масштабный коэффициент; t_v – центр аппроксимации; символ $\Leftrightarrow$ – знак перехода из области оригиналов в область Д-изображений и наоборот [1,2].

При медленной сходимости или даже расходимости ряда (1) отрезок $(0, T)$, на котором ищется оригинал $x(t)$, разделим на отдельные интервалы и на каждом из них представим оригинал в виде локального степенного ряда. Разделяя отрезок $(0, T)$, например, на n равных интервалов $h = T/n$ и выбирая масштабную постоянную $H = h$, получим оригинал $x(t)$ в виде составного ряда, который можно записать следующим образом [1,2]:

$$x(t) = \gamma(t) \sum_{K=0}^{K=\infty} \left(\frac{t}{h} \right)^K X_0(K) + \frac{2h}{h} \gamma(t) \sum_{K=0}^{K=\infty} \left(\frac{t-h}{h} \right)^K X_1(K) + \dots \\ + \frac{T}{(n-1)h} \gamma(t) \sum_{K=0}^{K=\infty} \left(\frac{t-(n-1)h}{h} \right)^K X_{n-1}(K), \quad (2)$$

где

$$\gamma_{ih}^{(i+1)h}(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t < ih, \\ 1/2, \text{ если } t = ih, \\ 1, \text{ если } ih < t < (i+1)h, \\ 1/2, \text{ если } t = (i+1)h, \\ 0, \text{ если } t > (i+1)h \end{cases} \quad (3)$$

функциональные прерыватели Герсеванова; $X_i(K) = \{x(t)\}_{t=ih}$ - дифференциальные спектры оригинала $x(t)$ в точках $t_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Функция $x(t)$ в данном случае будет непрерывной на искомом отрезке.

Дифференциально-падеевские (ДП) преобразования записываются в виде [1,3]

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \left[\frac{d^K x(t)}{dt^K} \right]_{t=t_v=0} \quad \underline{\cdot} \quad x(t) = \frac{a_0 + a_1 \cdot \tau + \dots + a_m \cdot \tau^m}{1 + b_1 \cdot \tau + \dots + b_n \cdot \tau^n} + \rho(\tau), \quad (4)$$

где $\tau = t \cdot H^{-1}$ - относительный аргумент; $a_\mu, \mu = \overline{0, m}$ и $b_\mu, \mu = \overline{1, n}$ - некоторые постоянные (неизвестные коэффициенты алгебраических многочленов числителя и знаменателя оригинала $x(t)$ соответственно); $\rho(\tau)$ - известная функция, которая в частном случае может быть равной нулю; обычно $m \leq n$ [3,4].

Обозначив $\bar{x}(t) = x(t) - \rho(t)$, из (4) нетрудно получить спектральное уравнение [3,4]

$$\bar{X}(K) + b_1 \cdot \bar{X}(K-1) + b_2 \cdot \bar{X}(K-2) + \dots + b_n \cdot \bar{X}(K-n) = a_0 \bar{B}(K) + a_1 \bar{B}(K-1) + \dots + a_m \bar{B}(K-m)$$

где $\bar{B}(K-i), i = \overline{0, m}$ - тейлоровские единицы [1,2]. Отсюда при $m > K$ имеем линейную относительно коэффициентов b_μ определенную алгебраическую систему уравнений

$$\begin{bmatrix} \bar{X}(m) & \bar{X}(m-1) & \dots & \bar{X}(m-n+1) \\ \bar{X}(m+1) & \bar{X}(m) & \dots & \bar{X}(m-n+2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{X}(m+n-1) & \bar{X}(m+n-2) & \dots & \bar{X}(m) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \bar{X}(m+1) \\ \bar{X}(m+2) \\ \vdots \\ \bar{X}(m+n) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

откуда однозначно могут быть найдены коэффициенты $b_\mu, \mu = \overline{1, n}$.

Коэффициенты $a_\mu, \mu = \overline{0, m}$ рассчитываются согласно матрично-векторному представлению

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & b_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{X}(0) \\ \overline{X}(1) \\ \overline{X}(2) \\ \dots \\ \overline{X}(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Теперь рассмотрим несколько примеров применения приведенных выше дифференциальных преобразований, а также сравним восстановленные на их основе функции-оригиналы $x(t)$.

Пример 1. Пусть задана следующая непрерывная функция:

$$x(t) = \begin{cases} (t+1)^2 - 8 & \text{при } t < -2, \\ t^3 + 1 & \text{при } -2 \leq t < 1, \\ 2/t^2 & \text{при } t \geq 1, \end{cases} \quad (7)$$

имеющая разрывы производных в точках -2 и 1 .

Сначала восстановим функцию с помощью односточечных ДТ-преобразований.

Центр аппроксимации возьмем равным $t_v = -3$, масштабный коэффициент $H = 1$. В соответствии с (1) дискреты в точке t_v будут равны

$$X(0) = -4, X(1) = 2(t+1) = -4, X(2) = \frac{2}{2!} = 1, X(K) = 0; K \geq 3.$$

Восстановив функцию с помощью (1), получим

$$x(t) = -4 - 4(t+3) + (t+3)^2 = -4 - 4t - 12 + t^2 + 6t + 9 = t^2 + 2t - 7 = (t+1)^2 - 8,$$

что и должно быть. Полученная функция полностью совпадает с оригиналом на промежутке $(-\infty, -2)$, но на других отрезках резко отличается от искомой функции.

При $t_v = -1$ дискреты функции $x(t)$ равны

$$X(0) = 0, X(1) = 3, X(2) = -3, X(K) = 0; K \geq 3,$$

а восстановленная функция $x(t) = t^3 + 1$ совпадает с оригиналом только на промежутке $[-2, 1]$.

При $t_v = 1$ дискреты функции $x(t)$ равны

$$X(0) = 2, X(1) = -4, X(2) = 6, X(3) = -8, X(4) = 10,$$

а восстановленная функция будет иметь вид

$$x(t) = 10(t-1)^4 - 8(t-1)^3 + 6(t-1)^2 - 4(t-1) + 2.$$

Как видно из вышеприведенных соотношений, функция, восстановленная с помощью однократных ДТ-преобразований, совпадает с оригиналом только на промежутках, где функция-оригинал представлена в виде степенного многочлена. При этом она совпадает с оригиналом на отдельных отрезках $(-\infty, -2)$, $[-2, 1)$, а после точки $t_v = 1$ резко отклоняется от нее. На отрезке $[1, \infty)$, где оригинал представлен в виде дробно-рациональной функции, восстановленная функция приближается к оригиналу только на небольшом промежутке, близком к точке аппроксимации $t_v = 1$.

Теперь восстановим оригинал с помощью ДП-преобразований при тех же точках аппроксимации $t_v = -3, -1, 1$. Результат представлен на рис. 1 ($m=0, n=2$). Как видно, восстановленная функция близка к оригиналу только на промежутке, где функция-оригинал представлена в виде дробно-рациональной функции.

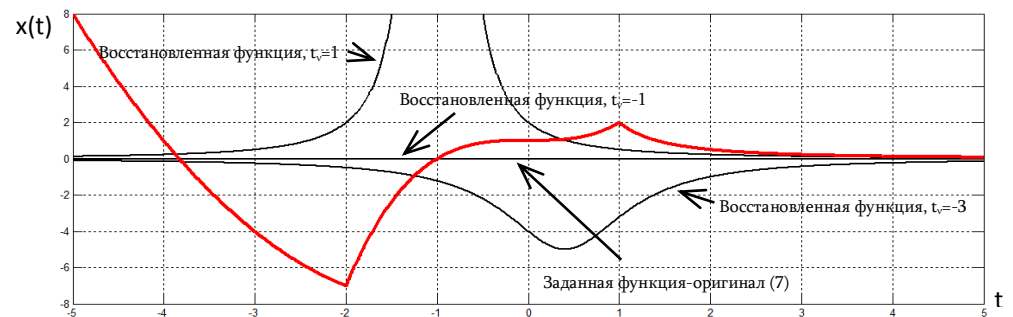


Рис. 1. Функция-оригинал (7) и функция, восстановленная с помощью ДП-преобразований при центрах аппроксимации $t_v = -3, t_v = -1, t_v = 1$

И, наконец, восстановим оригинал с помощью многоточечных ДТ-преобразований. Разделим интервал $[-3, 1]$ на равные подынтервалы с шагом $H = h = 0.3$. При этом центры аппроксимации равны $t_v = \{-3; -2.7; \dots; 0.7; 1\}$, $n = 10$. Восстановленная функция при $K = 4$ будет иметь вид

$$x(t) = \gamma_{-3}^{(t)} \sum_{K=0}^{K=4} \left(\frac{t+3}{0.3} \right)^K X_0(K) + \gamma_{-2.7}^{(t)} \sum_{K=0}^{K=4} \left(\frac{t+2.7}{0.3} \right)^K X_1(K) + \dots + \gamma_{0.7}^{(t)} \sum_{K=0}^{K=4} \left(\frac{t-0.7}{0.3} \right)^K X_{n-1}(K).$$

Для сравнения построим график этой и разыскиваемой функций (рис. 2).

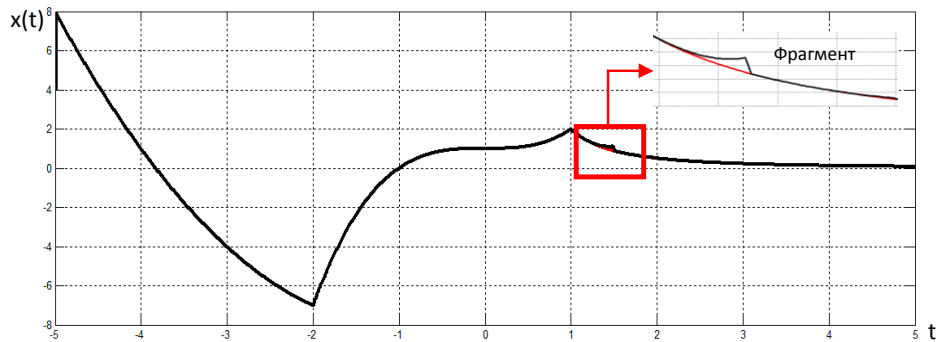


Рис. 2. Функция-оригинал (7) и функция, восстановленная с помощью многоточечных ДТ-преобразований, $h=0.3$, $K=4$

Как видно из рис. 2, функция, восстановленная с помощью многоточечных ДТ-преобразований, полностью совпадает с оригиналом на интервалах $(-\infty, -2]$, $[-2, 1]$ и лишь на участке, где разыскиваемая функция представлена в виде дробно-рациональной функции, имеет небольшие (максимум ≈ 0.225) отклонения от оригинала.

Пример 2. Пусть задана функция

$$x(t) = \begin{cases} t^2 & \text{при } t \leq -1, \\ -t + 2 & \text{при } t > -1. \end{cases} \quad (8)$$

Конечной точкой разрыва функции является $t = 1$. Восстановим функцию с помощью односточечных ДТ-преобразований на отдельных интервалах $(-\infty, -1]$ и $(-1, \infty)$. Центрами аппроксимации будут $t_v = 1$, $t_v = 0$ соответственно.

При центре аппроксимации $t_v = -1$ и масштабном коэффициенте $H = 1$ в соответствии с (1) дискреты будут равны

$$X(0) = 1, X(1) = 2t = -2, X(2) = \frac{2}{2!} = 1, X(K) = 0; K \geq 3,$$

а восстановленной функцией будет

$$x(t) = 1 - 2(t + 1) + (t + 1)^2 = t^2.$$

Последняя совпадает с оригиналом на интервале $(-\infty, -1]$, но резко отличается при $t > -1$.

При $t_v = 0$ дискреты функции равны

$$X(0) = 2, X(1) = -1, X(K) = 0; K \geq 2,$$

а восстановленная функция $x(t) = 2 - 1 \cdot t = -t + 2$ совпадает с оригиналом только на интервале $(-1, \infty)$ и резко отличается при $t \leq -1$.

Теперь восстановим функцию $x(t)$ с помощью ДП-преобразований при центрах аппроксимации $t_v = -1, t_v = 0$. При значениях $m=1, n=1,2,3$ и центре аппроксимации $t_v = 0$ восстановленная функция совпадает с оригиналом, но только на промежутке $(-1, \infty)$. В остальных случаях восстановленная функция далека от оригинала (рис. 3).

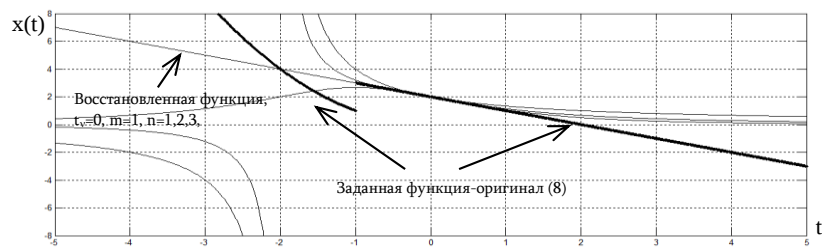


Рис. 3. Функция-оригинал (8) и функция, восстановленная с помощью ДП-преобразований при центрах аппроксимации $t_v = -1, t_v = 0$

Следуя вычислительным процедурам, представленным выше, восстановим оригинал с помощью многоточечных ДТ-преобразований, разделив интервал $[-3, 1]$ на равные подынтервалы с шагом $H = h = 0.5$. Следовательно $n = 8$, и восстановленная функция при $K = 4$ будет иметь вид

$$x(t) = \gamma_{-2.5}^{-3}(t) \sum_{K=0}^{K=4} \left(\frac{t+3}{0.5} \right)^K X_0(K) + \gamma_{-2}^{-2.5}(t) \sum_{K=0}^{K=4} \left(\frac{t+2.5}{0.5} \right)^K X_1(K) + \dots + \gamma_{0.5}^{1}(t) \sum_{K=0}^{K=4} \left(\frac{t-0.5}{0.5} \right)^K X_{n-1}(K).$$

Функция-оригинал (8) и функция, восстановленная с помощью многоточечных ДТ-преобразований, показаны на рис. 4.



Рис. 4. Функция-оригинал (8) и функция, восстановленная с помощью многоточечных ДТ-преобразований, $h=0.5, K=4$

Как видно из графика, ДТ-преобразование точно восстанавливает оригинал и лишь на промежутке $(-1, 1.5)$ дает неправильные результаты, поскольку центром аппроксимации все еще служит точка -1 , где функция задана в виде параболы.

Пример 3. Пусть задана функция

$$x(t) = \frac{1}{(t+1)(t+5)(t-3)}, \quad (9)$$

которая, очевидно, имеет разрывы при точках $t = -5, t = -1, t = 3$.

Восстановим функцию $x(t)$ с помощью однотоочечных ДТ-преобразований. Центры аппроксимации $t_v = -6, -3, 1, 4$, количество дискрет $K = 4$. При центре аппроксимации $t_v = -6$ дискреты функции равны

$$X(0) = -0.022, X(1) = -0.029, X(2) = -0.031, X(3) = -0.031, X(4) = -0.031,$$

а восстановленная функция имеет вид

$$x(t) = -0.022 - 0.029(t+6) - 0.031(t+6)^2 - 0.031(t+6)^3 - 0.031(t+6)^4.$$

При $t_v = -3$ дискреты функции равны

$$X(0) = 0.042, X(1) = 0.07, X(2) = 0.012, X(3) = 0.002, X(4) = 0.003,$$

а восстановленная функция имеет вид

$$x(t) = 0.042 + 0.07(t+3) + 0.012(t+3)^2 + 0.002(t+3)^3 + 0.003(t+3)^4.$$

При $t_v = 1$ дискреты функции равны

$$X(0) = -0.042, X(1) = 0.07, X(2) = -0.012, X(3) = 0.002, X(4) = -0.003,$$

а восстановленная функция имеет вид

$$x(t) = -0.042 + 0.07(t-1) - 0.012(t-1)^2 + 0.002(t-1)^3 - 0.003(t-1)^4.$$

При $t_v = 4$ дискреты функции равны

$$X(0) = 0.022, X(1) = -0.029, X(2) = 0.031, X(3) = -0.031, X(4) = 0.031,$$

а восстановленная функция имеет вид

$$x(t) = 0.022 - 0.029(t-4) + 0.031(t-4)^2 - 0.031(t-4)^3 + 0.031(t-4)^4.$$

В данном случае функции, восстановленные с помощью однотоочечных ДТ-преобразований, приближаются к оригиналу лишь на небольших отрезках, а при всех остальных значениях далеки от оригинала.

Восстановим функцию с помощью ДП-преобразований при центре аппроксимации $t_v = 1$. При значениях $m = 0, 1, 2, 3$; $n = 3$ восстановленная функция полностью совпадает с оригиналом (рис. 5).

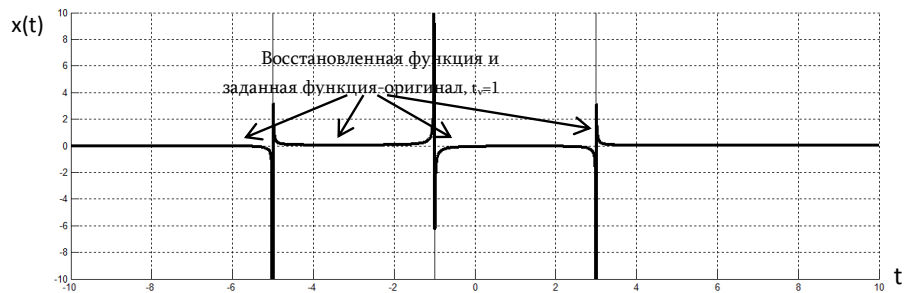


Рис. 5. Функция-оригинал (9) и функция, восстановленная с помощью ДП-преобразований при центре аппроксимации $t_v=1$, $m=0,1,2,3$, $n=3$

Однако, как показывают исследования, при некоторых значениях m и n (например, $m = 1$ и $n = 1, 2$) восстановленные функции на некоторых промежутках резко отличаются от оригинала.

Теперь представим результат восстановления оригинала (9) с помощью многотоочечных ДТ-преобразований. Выберем шаг h деления интервала $[-10, 10]$ равным 0.1 , а количество дискрет $K = 4$.

Следовательно, $n = 200$, и восстановленная функция при $K = 4$ будет иметь вид

$$x(t) = \frac{-9.9}{-10} \gamma(t) \sum_{K=0}^{K=4} \left(\frac{t+10}{0.1} \right)^K X_0(K) + \frac{-9.8}{-9.9} \gamma(t) \sum_{K=0}^{K=4} \left(\frac{t+9.9}{0.1} \right)^K X_1(K) + \dots + \frac{10}{9.9} \gamma(t) \sum_{K=0}^{K=4} \left(\frac{t-9.9}{0.1} \right)^K X_{n-1}(K).$$

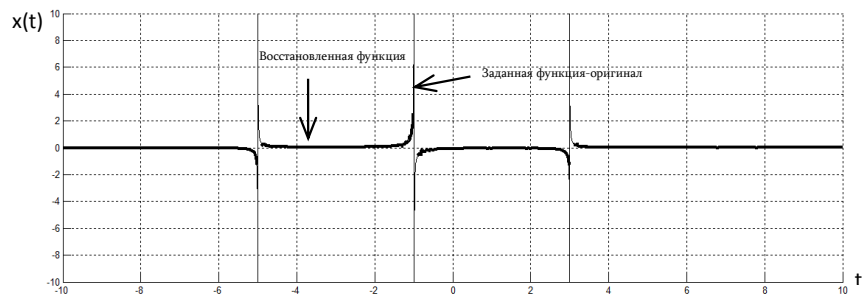


Рис. 6. Функция-оригинал (9) и функция, восстановленная с помощью многотоочечных ДТ-преобразований, $h=0.1$, $K=4$

Как видно из рис. 6, восстановленная функция почти полностью совпадает с функцией-оригиналом и лишь на небольших отрезках дает малые отклонения.

Таким образом, можно однозначно утверждать, что:

- многоточечные ДТ-преобразования точнее восстанавливают разыскиваемую функцию по сравнению с однотоочечными ДТ-преобразованиями;
- многоточечные ДТ-преобразования требуют меньшего количества вычислительных процедур по сравнению с ДП-преобразованиями ввиду отсутствия необходимости перебора значений m и n , а также решения систем уравнений (5) и (6) для нахождения коэффициентов a и b ;
- размер шага для разделения интервала, на котором разыскивается оригинал, при многоточечных ДТ-преобразованиях выбирается в зависимости от степени желаемой точности. Чем меньше шаг, тем точнее восстановленная функция. При этом отмечается, что наибольшая погрешность восстановленных значений возникает при совпадении переменной t с центрами аппроксимации.

Заключение. Установлено, что многоточечные ДТ-преобразования дают наилучший результат в задачах с разрывными функциями, поскольку центры аппроксимации динамично меняются в зависимости от расположения текущей точки.

Для выполнения вычислений и построения соответствующих графиков создана программа с помощью программной среды MATLAB [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пухов Г.Е. Дифференциальные спектры и модели. – Киев: Наукова думка, 1990.–184 с.
2. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – Киев: Наукова думка. 1986. – 157 с.
3. Симонян С.О., Аветисян А.Г. Прикладная теория дифференциальных преобразований. - Ереван: Изд-во ГИУА “Чартарагет”, 2010. – 360 с.
4. Симонян С.О., Аветисян А.Г., Кюрегян А.Л. Обобщенные дифференциально-падаевские преобразования // Моделирование, оптимизация, управление: Сб. науч. трудов ГИУА. - Ереван, 2002. - Вып. 5. - С. 5-9.
5. The MathWorks, Inc., MATLAB The language of technical programming. Using MATLAB Graphics, Version 7.

ГИУА (ПОЛИТЕХНИК). Материал поступил в редакцию 02.12.2013.

Մ.Հ. ՄԻՄՈՆՅԱՆ, Ա.Հ. ԱՍԱՏՐՅԱՆ, Հ.Ա. ԱՍԼԱՆՅԱՆ
**ԽԶՎՈՂ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐՈՎ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ԲԱԶՄԱԿԵՏ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ
ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՕԳՏԱԳՈՐԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ**

Ստացվել են միակետ և բազմակետ դիֆերենցիալ-թեյլորյան, ինչպես նաև դիֆերենցիալ-պադեյան ձևափոխությունների միջոցով խզման կետեր ունեցող ֆունկցիաների բնօրինակների վերականգնման գործընթացների համեմատական բնութագրերը: Ներկայացված են բազմակետ դիֆերենցիալ-թեյլորյան ձևափոխությունների առավելությունները:

Առանցքային բառեր. խզվող ֆունկցիաներ, միակետ և բազմակետ դիֆերենցիալ-թեյլորյան ձևափոխություններ, դիֆերենցիալ-պադեյան ձևափոխություններ, համեմատական բնութագրեր:

S.H. SIMONYAN, A.H. ASATRYAN, H.A. ASLANYAN
**ON APPLICATION OF MULTIPOINT DIFFERENTIAL TRANSFORMATIONS IN
THE PROBLEMS WITH DISCONTINUOUS FUNCTIONS**

The comparative characteristics of discontinuous original function restoration procedures by single-point and multipoint differential-Taylor, as well as differential-Pade transformations are obtained. The advantages of multipoint differential-Taylor transformations are shown.

Keywords: discontinuous functions, single-point and multipoint differential-Taylor transformations, differential-Pade transformations, comparative characteristics.