

УДК 621.3

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ
УПРАВЛЕНИЯ

Г.С. СУКИАСЯН

**ОБ ОЦЕНКЕ КАЧЕСТВА ТЕТРАЭДРИЧЕСКОЙ СЕТКИ ПРИ РЕШЕНИИ
ТРЕХМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ**

Предложен быстрый нетрудоемкий алгоритм оценивания качества тетраэдрической сетки, применяемый при решении трехмерных краевых задач методом конечных элементов. Алгоритм основан на оценке частоты появления треугольников и четырехугольников при сечении сетки случайными плоскостями. Развитый подход реализован на модельной задаче вычисления электромагнитного поля. Показана эффективность предложенного алгоритма.

Ключевые слова: электромагнитное поле, сеточные задачи, тетраэдрическая сетка, алгоритм оценки качества.

Введение. Магнитное поле, созданное электрическим током, подчиняется классическому уравнению Максвелла:

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} (\operatorname{rot} \vec{A}) = \delta,$$

где $\vec{A}$ - вектор магнитного потенциала; δ - плотность тока; μ - величина магнитной проницаемости.

Из-за нелинейности поля возникает обратная связь между искомым значением векторного магнитного потенциала $\vec{A}$ и неизвестным значением магнитной проницаемости μ , что приводит к необходимости численного решения задачи методом последовательных приближений.

Скорость сходимости процесса последовательных приближений к решению сильно зависит от геометрической конфигурации аппроксимирующей сетки. В [1] приведены примеры решения задач электромагнитного поля методом конечных элементов при помощи разных сеток. Хотя задачи решались при прочих (кроме геометрии сетки) равных условиях: одинаковые начальные приближения, краевые условия, равное количество узлов дискретизации, результаты были разными. Для одной сетки процесс последовательных приближений сходил, для другой – расходился.

Таким образом, при численном решении нелинейных задач электромагнитного поля методом конечных элементов на сходимость процесса последовательных приближений сильное влияние оказывает качество тетраэдрической сетки.

В [2] было предложено применять в качестве двумерной треугольной сетки триангуляцию Делоне. В [3] отмечено, что для фиксированного набора узлов оптимальной сеткой является триангуляция Делоне (в смысле сходимости процесса последовательных приближений). В [4] показано, что на процесс последовательных приближений к численному решению двумерной задачи нахождения векторного магнитного потенциала отрицательно влияет наличие тупых углов у треугольников сетки. В [5] показано, что и в трехмерной полевой задаче на сходимость процесса последовательных приближений отрицательно влияет наличие тупых углов у тетраэдрической сетки. В [1] и [5] даны оценки критического угла в сетке, при превышении которого процесс последовательных приближений к решению полевой задачи заведомо расходится. Для двумерной треугольной сетки критический угол равен 156° , а для трехмерной тетраэдрической сетки - 163° .

Главным критерием качества сетки до сих пор было наличие тупых углов. Однако вычисление всех углов тетраэдров трехмерной сетки - весьма трудоемкая и громоздкая задача. Целью настоящей работы является создание быстрого нетрудоемкого метода оценивания качества тетраэдрической сетки.

Необходимые сведения из стохастической геометрии. Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве треугольную пирамиду (тетраэдр) T , которую пересекает плоскость e . Плоскость будем задавать нормальными координатами (r, φ, ψ) , где r – расстояние от начала координат до плоскости, (φ, ψ) - сферические координаты (долгота и широта) направления нормали к плоскости e . Если координаты (r, φ, ψ) являются случайными величинами с плотностью распределения

$$de = \sin \varphi dr d\varphi d\psi,$$

то вероятностное распределение сечения $e \cap T$ инвариантно относительно группы движений пространства, т.е. не зависит от местоположения пирамиды T и ее пространственной ориентации. Вероятность того, что случайная плоскость проходит через какую-либо вершину пирамиды, равна нулю. Следовательно, сечение $e \cap T$ является либо треугольником, либо четырехугольником. Обозначим через P_3 (соотв. P_4) вероятность события, что сечение $e \cap T$ является треугольником (соотв. четырехугольником). В [6] доказана следующая теорема: для любой треугольной пирамиды имеют место неравенства

$$P_3 > P_4, P_3 > 0,71, P_4 < 0,29.$$

Величина P_3 достигает своего минимума, а P_4 - своего максимума для правильного тетраэдра, у которого все ребра равны.

Алгоритм оценивания качества тетраэдрической сетки. На основании вышеприведенной теоремы можно построить следующий алгоритм оценивания качества тетраэдрической сетки. Пересечем сетку несколькими независимыми плоскостями и рассчитаем количество N_3 треугольников и N_4 четырехугольников, образованных в сечении плоскости с тетраэдрами сетки. Затем вычислим соответствующие частоты:

$$m_3 = \frac{N_3}{N_3 + N_4}, \quad m_4 = \frac{N_4}{N_3 + N_4}.$$

Здесь m_3 – частота появления треугольников в сечении плоскости с тетраэдрами сетки; m_4 – частота появления четырехугольников.

Критерий качества тетраэдрической расчетной сетки при конечно-элементном моделировании трехмерных краевых задач: чем меньше доля четырехугольников m_4 , тем хуже сетка.

Критическим углом в сетке, при превышении которого процесс последовательных приближений к решению полевой задачи заведомо расходится, равен 163° . Ему соответствует (см. [6]) частота 9%. Если частота появления четырехугольников меньше 9%, то среди элементов сетки заведомо имеются тетраэдры с тупым углом, превышающим 163° .

Отметим, что при конечно-элементном моделировании имеется строгое требование к сетке: внутренности элементов не должны пересекаться, а объединение всех элементов должно совпадать с выпуклой оболочкой сетки, т.е. внутри сетки не должно быть пустот, не покрытых элементами. Если в двумерном случае визуально видно, выполнено ли это требование, то для трехмерной сетки проверка выполнения полноты сетки и непересекаемости элементов представляет определенную трудность.

Вышеприведенная теорема позволяет провести следующий тест: если для какой-либо плоскости, пересекающей тетраэдрическую сетку, возникли пятиугольники или получено неравенство $N_3 < N_4$, то сетка имеет дефекты – нарушено требование полноты сетки и непересекаемости элементов.

Численные результаты. Предложенный алгоритм оценивания качества тетраэдрической сетки реализован для сетки, полученной при моделировании реле [7]. Сетка [7] получена часто употребляемым в приложениях методом: вначале область разбита на параллелепипеды, каждый из которых разделен на 6 тетраэдров. В среднем получены следующие частоты: $m_3 = 75,8\%$, $m_4 = 24,2\%$.

На рисунке представлено сечение указанной тетраэдрической сетки случайной плоскостью. Количество треугольников $N_3 = 171$, количество четырехугольников $N_4 = 56$.

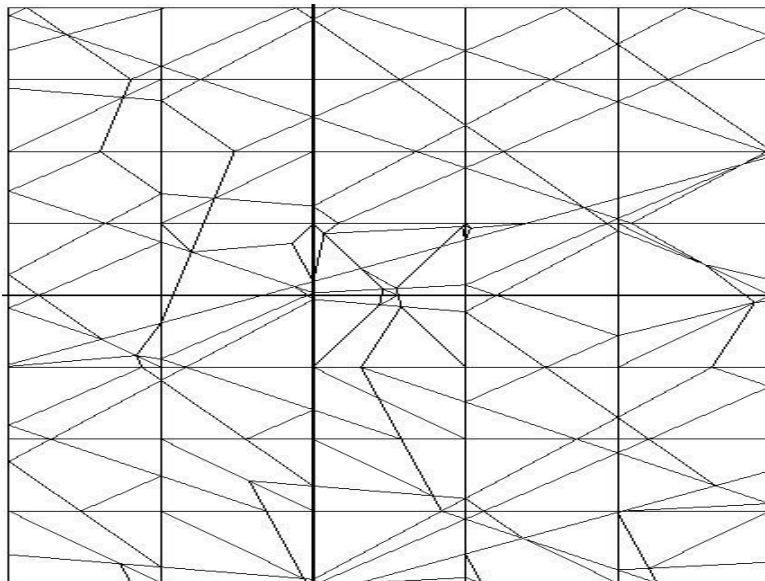


Рис. Сечение тетраэдрической сетки случайной плоскостью

Заключение. Разработан и реализован алгоритм оценивания тетраэдрической расчетной сетки при конечно-элементном моделировании трехмерных краевых задач. Алгоритм эффективен для сравнения разных сеток, а также для обнаружения дефектных сеток, имеющих тупые углы, превышающие критическое значение, и нарушения геометрических требований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Пароникян А.Е. Об углах треугольной сетки для расчета магнитных полей методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2007. - Т. 60, № 3. - С. 523-532.
2. Ruppert J. A Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation / NASA Ames Research Center // Journal of Algorithms. - 1994.
3. Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Пароникян А.Е. Об оптимизации сетки для расчета магнитных полей методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2005. - Т. 58, № 3. - С. 570-578.
4. Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Пароникян А.Е. О расчете магнитных полей методом конечных элементов с динамической композицией элементов дискретизации // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2005. - Т. 58, № 2. - С. 332-339.
5. Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Акопян А.Э. К расчету трехмерных магнитных полей методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2008. - Т. 61, № 2. - С. 305-317.
6. Сукиасян Г.С. О случайных сечениях многогранников // ДАН СССР. - 1982. - Т. 263, № 4. - С. 809-812.

7. Терзян А.А., Акопян А.Э., Сукиасян Г.С., Оганесян Л.Т. Параллельное построение тетраэдрической сетки при конечно-элементном моделировании трехмерных электромагнитных полей // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН.– 2012.– Т. 65, № 2. – С. 213–218.

ГИУА (ПОЛИТЕХНИК). Материал поступил в редакцию 20.10.2013.

Հ.Ս. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ

ԵՌԱՉԱՓ ԵԶՐԱՑԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ՔԱՌԱՆԻՍՏԱՑԻՆ ՑԱՆՑԻ ՈՐԱԿԻ ԳՆԱՀԱՏՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Առաջարկված է քառանկյունային ցանցի որակի գնահատման արագ և ոչ-աշխատատար ալգորիթ, որն օգտագործվում է վերջավոր տարրերի մեթոդով եռաչափ եզրային խնդիրների լուծման համար: Ալգորիթը հիմնված է այդ ցանցը պատահական հարթությունով հատելիս առաջացած եռանկյունների և քառանկյունների հաճախականությունների գնահատականի վրա: Առաջարկված մոտեցումն իրականացված է մոդելային էլեկտրամագնիսական դաշտի հաշվարկման խնդրի համար: Ցույց է տրված դիտարկվող ալգորիթի արդյունավետությունը:

Առանցքային բառեր. էլեկտրամագնիսական դաշտ, ցանցային խնդիրներ, քառանկյունային ցանց, որակի գնահատման ալգորիթ:

H.S. SUKIASYAN

ESTIMATING THE QUALITY OF TETRAHEDRAL MESH AT SOLVING THREE-DIMENSIONAL BOUNDARY PROBLEMS

An algorithm for estimating the quality of a tetrahedral mesh applied at solving three-dimensional boundary problems by the finite-element method is proposed. The algorithm is based on estimating the frequency of emergence of triangles and tetragons at the section of the mesh by random planes. The developed approach is realized on the model problem of electromagnetic field calculation. The efficiency of the proposed algorithm is shown.

Keywords: electromagnetic field, mesh problems, tetrahedral mesh, quality estimation algorithm.