

С.О. СИМОНЯН

**МАТРИЧНО-ВЕКТОРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ
ОБОБЩЕННЫХ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ**

Предложены конструктивные матрично-векторные представления некоторых вычислительных методов определения параметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза, основанных на дифференциальных преобразованиях Пухова.

Ключевые слова: параметрические матрицы, обобщенные обратные матрицы, дифференциальные преобразования, последовательные рекуррентные вычислительные схемы, конструктивные матрично-векторные представления вычислительных методов.

Введение. Для определения параметрических обобщенных обратных матриц $X(t) = A^+(t) \in R^{n \times m}$ Мура-Пенроуза [1] при параметрических матрицах $A(t) \in R^{m \times n}$ (заметим, что параметр t может быть временем, оператором Лапласа ($S \sim d/dt$) или другим параметром) на основе дифференциальных преобразований Пухова [2] в работе [3] был предложен дифференциальный аналог (Д-аналог) простейшего метода с двумя разновидностями, а в работе [4] – Д-аналог универсального метода с четырьмя разновидностями. В настоящей работе с той же целью предлагаются конструктивные матрично-векторные представления этих вычислительных методов, основанные на явных последовательных рекуррентных вычислительных схемах, намного облегчающие процедуры программирования [5] по определению параметрических обобщенных обратных матриц.

Математический аппарат. Дифференциальные преобразования параметрических матриц $A(t)$ и $X(t)$ в соответствии с [2] имеют вид

$$A(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K A(t)}{\partial t^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \Leftarrow \quad A(t) = \aleph_1(t, t_v, H, A(K), K = \overline{0, \infty}),$$

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K X(t)}{\partial t^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \Leftarrow \quad X(t) = \aleph_2(t, t_v, H, X(K), K = \overline{0, \infty}),$$

где левые части – прямые преобразования; правые части – обратные преобразования; $K = \overline{0, \infty}$ – целочисленный аргумент; $A(K)$ и $X(K)$, $K = \overline{0, \infty}$ – матрич-

ные дискреты матричных оригиналов $A(t)$ и $X(t)$ соответственно с размерами $m \times n$ и $n \times m$; H – масштабный коэффициент; t_v – центр аппроксимации; $\mathfrak{N}_1(\bullet)$ и $\mathfrak{N}_2(\bullet)$ – матричные функции, восстанавливающие оригиналы – матрицы $A(t)$ и $X(t)$ соответственно; символ $\overline{\cdot}$ – знак перехода из области оригиналов в область Д-изображений и наоборот [2].

1. Матрично-векторные представления Д-аналогов простейшего метода. В соответствии с работой [3] рассмотрим два варианта конструктивных матрично-векторных представлений.

Вариант 1. На основе использования простейшего соотношения

$$A(t) \cdot X(t) = E_{m \times m}, \quad (1.1)$$

где $E_{m \times m}$ – единичная матрица порядка m , и перевода его из области оригиналов в область Д-изображений была получена следующая явная последовательная рекуррентная вычислительная схема для определения неизвестных матричных дискрет $X(K)$, $K = \overline{0, \infty}$ обобщенной обратной матрицы $X(t)$:

$$\begin{aligned} \text{при } K=0: & X(0) = A^+(0), \\ \text{при } K=1: & X(1) = -X(0) \cdot A(1) \cdot X(0), \\ \text{при } K=2: & X(2) = -X(0) \cdot A(2) \cdot X(0) - X(0) \cdot A(1) \cdot X(1), \\ \text{при } K=3: & X(3) = -X(0) \cdot A(3) \cdot X(0) - X(0) \cdot A(2) \cdot X(1) - \\ & - X(0) \cdot A(1) \cdot X(2), \\ & \dots \dots \dots \\ \text{при } K=K: & X(K) = -X(0) \cdot \sum_{l=1}^K A(l) \cdot X(K-l), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $A^+(0)$ – псевдообратная матрица с размерами $n \times m$ матрицы $A(0)$ (нулевая матричная дискрета обобщенной обратной матрицы $X(t)$).

Теперь явную последовательную рекуррентную вычислительную схему (1.2) представим в несколько ином – объединенном матрично-векторном виде, имея в виду, что $X(0) = A^+(0)$:

$$\begin{pmatrix} X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ \vdots \\ X(K) \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} A^+(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A^+(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A^+(0) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A^+(0) \end{bmatrix} \times \\
\times \begin{bmatrix} A(1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A(2) & A(1) & 0 & \dots & 0 \\ A(3) & A(2) & A(1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A(K) & A(K-1) & A(K-2) & \dots & A(1) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(K-1) \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

или в компактной записи:

$$X(\overline{1,K}) = -\text{diag}[A^+(0)] \cdot \overline{A(\overline{1,K})} \cdot X(\overline{0,K-1}), \quad (1.4)$$

где $X(\overline{1,K}) = [X(1):X(2):\dots:X(K)]^T$ - составной гипервектор-столбец – матрица с размерами $Kn \times m$; $\text{diag}[A^+(0)]$ - диагональная гиперматрица с размерами $Kn \times Km$ с матричными диагональными элементами-матрицами $A^+(0)$; $\overline{A(\overline{1,K})}$ - составная блочная нижнетреугольная гиперматрица с размерами $Km \times Kn$ с матричными элементами $A(1), \dots, A(K)$ (с матричными элементами $A(1)$ на главной диагонали, с $A(2)$ на нижней поддиагонали и т.д. до матричного элемента $A(K)$ включительно); $X(\overline{0,K-1}) = [X(0):X(1):\dots:X(K-1)]^T$ - составной гипервектор – столбец – матрица с размерами $Kn \times m$.

Вариант 2. На основе использования другого простейшего соотношения

$$X(t) \cdot A(t) = E_{n \times n}, \quad (1.5)$$

где $E_{n \times n}$ - единичная матрица порядка n , и перевода его из области оригиналов в область Д-изображений была получена следующая явная последовательная рекуррентная вычислительная схема:

при $K=0$: $X(0) = A^+(0)$,

при $K=1$: $X(1) = -X(0) \cdot A(1) \cdot X(0)$,

при $K=2$: $X(2) = -X(0) \cdot A(2) \cdot X(0) - X(1) \cdot A(1) \cdot X(0)$,

при $K=3$: $X(3) = -X(0) \cdot A(3) \cdot X(0) - X(1) \cdot A(2) \cdot X(0) -$
 $- X(2) \cdot A(1) \cdot X(0)$,

.....

$$\text{при } K=K: X(K) = - \left[\sum_{l=0}^{K-1} X(l) \cdot A(K-l) \right] \cdot X(0). \quad (1.6)$$

Теперь явную последовательную рекуррентную вычислительную схему (1.6) представим в следующем матрично-векторном виде, также имея в виду, что $X(0) = A^+(0)$.

$$\begin{aligned} [X(1):X(2):X(3):\dots:X(K)] = & -[X(0):X(1):X(2):\dots:X(K-1)] \times \\ & \times \begin{bmatrix} A(1) & A(2) & A(3) & \dots & A(K) \\ 0 & A(1) & A(2) & \dots & A(K-1) \\ 0 & 0 & A(1) & \dots & A(K-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A(1) \end{bmatrix} \times \\ & \times \begin{bmatrix} A^+(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A^+(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A^+(0) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A^+(0) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

или в компактной записи:

$$X(\overline{1,K}) = -X(\overline{0,K-1}) \cdot \overline{A(1,K)} \cdot \text{diag}[A^+(0)], \quad (1.8)$$

где $X(\overline{1,K}) = [X(1):X(2):\dots:X(K)]$ - составной гипервектор – строка – матрица с размерами $n \times Km$; $X(\overline{0,K-1}) = [X(0):X(1):\dots:X(K-1)]$ - составной гипервектор – строка – матрица с размерами $n \times Km$; $\overline{A(1,K)}$ - составная блочная верхнетреугольная гиперматрица с размерами $Km \times Kn$ с матричными элементами $A(1), \dots, A(K)$ (с матричными элементами $A(1)$ на главной диагонали, с $A(2)$ на верхней наддиагонали и т.д. до матричного элемента $A(K)$ включительно); $\text{diag}[A^+(0)]$ - диагональная гиперматрица с размерами $Kn \times Km$ с матричными элементами $A^+(0)$.

2. Матрично-векторные представления Д-аналогов универсального метода. В соответствии с работой [4] рассмотрим два наиболее общих варианта конструктивных матрично-векторных представлений.

Вариант 1. На основе использования известного условия [1]

$$A^T(t) \cdot A(t) \cdot X(t) = A^T(t) \quad (2.1)$$

или

$$B(t) \cdot X(t) = A^T(t), \quad (2.2)$$

где

$$B(t) = A^T(t) \cdot A(t), \quad (2.3)$$

и перевода (2.2) из области оригиналов в область Д – изображений для наиболее общего случая была получена следующая явная последовательная рекуррентная вычислительная схема для определения неизвестных матричных дискрет $X(K)$:

$$\text{при } K=0: X(0) = B^+(0) \cdot A^T(0),$$

$$\text{при } K=1: X(1) = B^+(0) \cdot [A^T(1) - B(1) \cdot X(0)],$$

$$\text{при } K=2: X(2) = B^+(0) \cdot [A^T(2) - B(2) \cdot X(0) - B(1) \cdot X(1)],$$

при $K=3$:

$$X(3) = B^+(0) \cdot [A^T(3) - B(3) \cdot X(0) - B(2) \cdot X(1) - B(1) \cdot X(2)],$$

.....

$$\text{при } K=K: X(K) = B^+(0) \cdot \left[A^T(K) - \sum_{l=1}^K B(l) \cdot X(K-l) \right], \quad (2.4)$$

где

$$B(K)_{n \times n} = \sum_{l=0}^K A^T(l) \cdot A(K-l), K = \overline{0, \infty}, \quad (2.5)$$

причем $B^+(0)$ – нулевая псевдообратная матричная дискрета порядка n .

Заметим, что все матричные дискреты $B(K)$ являются положительно полуопределенными (когда $\text{rang} B(K) < n$) или положительно определенными (когда $\text{rang} B(K) = n$) матрицами. Естественно, в последнем случае при $K=0$ в (2.4) можно оперировать нулевой обратной матричной дискретой $B^{-1}(0)$.

Теперь явную последовательную рекуррентную вычислительную схему (2.4) представим в следующем матрично-векторном виде, имея в виду, что $X(0) = B^+(0) \cdot A^T(0)$:

$$\begin{pmatrix} X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ \vdots \\ X(K) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B^+(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B^+(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B^+(0) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B^+(0) \end{bmatrix} \times \\ \times \left[\begin{pmatrix} A^T(1) \\ A^T(2) \\ A^T(3) \\ \vdots \\ A^T(K) \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} B(1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B(2) & B(1) & 0 & \dots & 0 \\ B(3) & B(2) & B(1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(K) & B(K-1) & B(K-2) & \dots & B(1) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(K-1) \end{pmatrix} \right], \quad (2.6)$$

или в компактной записи:

$$X(1, \overline{K}) = \text{diag}[B^+(0)] \cdot [A^T(1, \overline{K}) - \overline{B(1, K)} \cdot X(0, \overline{K-1})], \quad (2.7)$$

где $X(1, \overline{K}) = [X(1):X(2):\dots:X(K)]^T$ - составной гипервектор – столбец – матрица с размерами $Kn \times m$; $\text{diag}[B^+(0)]$ - составная диагональная гиперматрица порядка Kn с матричными элементами $B^+(0)$; $A^T(1, \overline{K}) = [A^T(1):A^T(2):\dots:A^T(K)]^T$ - составной гипервектор – столбец – матрица с размерами $Kn \times m$; $\overline{B(1, K)}$ - составная блочная нижнетреугольная гиперматрица порядка Kn с матричными элементами, с $B(1), B(2), \dots, B(K)$ (с матричными элементами, с $B(1)$ на главной диагонали, с $B(2)$ на нижней поддиагонали и т.д. до матричного элемента $B(K)$ включительно); $X(0, \overline{K-1}) = [X(0):X(1):\dots:X(K-1)]^T$ - составной гипервектор – столбец – матрица с размерами $Kn \times m$.

Вариант 2. На основе использования другого известного условия [1]

$$X(t) \cdot A(t) \cdot A^T(t) = A^T(t) \quad (2.8)$$

или

$$X(t) \cdot C(t) = A^T(t), \quad (2.9)$$

где

$$C(t) = A(t) \cdot A^T(t), \quad (2.10)$$

и перевода (2.9) из области оригиналов в область Д-изображений была получена следующая явная последовательная рекуррентная вычислительная схема для определения неизвестных матричных дискрет $X(K)$:

при $K=0$: $X(0) = A^T(0) \cdot C^+(0)$,

при $K=1$: $X(1) = [A^T(1) - X(0) \cdot C(1)] \cdot C^+(0)$,

при $K=2$: $X(2) = [A^T(2) - X(0) \cdot C(2) - X(1) \cdot C(1)] \cdot C^+(0)$,

при $K=3$:

$X(3) = [A^T(3) - X(0) \cdot C(3) - X(1) \cdot C(2) - X(2) \cdot C(1)] \cdot C^+(0)$,

.....

$$\text{при } K=K: X(K) = \left[A^T(K) - \sum_{l=0}^{K-1} X(l) \cdot C(K-l) \right] \cdot C^+(0), \quad (2.11)$$

где

$$C(K) = \sum_{l=0}^K A(l) \cdot A^T(K-l), K = \overline{0, \infty}, \quad (2.12)$$

причем $C^+(0)$ – нулевая псевдообратная матричная дискрета порядка m . Заметим, что все матричные дискреты $C(K)$ также являются положительно полуопределенными (когда $\text{rang} C(K) < m$) или положительно определенными (когда $\text{rang} C(K) = m$) матрицами. Естественно, в последнем случае при $K=0$ в (2.11) можно оперировать нулевой обратной матричной дискретой $C^{-1}(0)$.

Теперь явную последовательную рекуррентную вычислительную схему (2.11) представим в следующем матрично-векторном виде, имея в виду, что $X(0) = A^T(0) \cdot C^+(0)$:

$$\begin{aligned} (X(1):X(2):\dots:X(K)) = & [(A^T(1):A^T(2):\dots:A^T(K)) - \\ & - (X(0):X(1):\dots:X(K-1)) \cdot \begin{bmatrix} C(1) & C(2) & C(3) & \dots & C(K) \\ 0 & C(1) & C(2) & \dots & C(K-1) \\ 0 & 0 & C(1) & \dots & C(K-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C(1) \end{bmatrix}] \times \end{aligned}$$

$$\times \begin{bmatrix} C^+(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C^+(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & C^+(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C^+(0) \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

или в компактной записи:

$$X(\overline{1, K}) = [A^T(\overline{1, K}) - X(\overline{0, K-1}) \cdot \overline{C(\overline{1, K})}] \cdot \text{diag}[C^+(0)], \quad (2.14)$$

где $X(\overline{1, K}) = [X(1):X(2):\dots:X(K)]$ - составной гипервектор – строка – матрица с размерами $n \times Km$; $A^T(\overline{1, K}) = (A^T(1):A^T(2):\dots:A^T(K))$ - составной гипервектор – строка - матрица с размерами $n \times Km$; $X(\overline{0, K-1}) = [X(0):X(1):\dots:X(K-1)]$ - составной гипервектор-строка-матрица с размерами $n \times Km$; $\overline{C(\overline{1, K})}$ - составная блочная верхнетреугольная гиперматрица порядка Km с матричными элементами $C(1), C(2), \dots, C(K)$ (с матричными элементами $C(1)$ на главной диагонали, с $C(2)$ на верхней наддиагонали и т.д. до матричного элемента $C(K)$ включительно); $\text{diag}[C^+(0)]$ - составная диагональная гиперматрица порядка Km с матричными элементами $C^+(0)$.

Заключение. Таким образом, вполне очевидно, что конструктивные матрично-векторные представления (1.3), (1.7) и (2.6), (2.13) намного более удобны для эффективного программирования по определению параметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза, нежели последовательные рекуррентные вычислительные схемы (1.2), (1.6) и (2.4), (2.5); (2.11), (2.12) соответственно, предложенные в работах [3] и [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц.- М.: Физматлит, 2010.- 560 с.
2. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные спектры и модели. - Киев: Наукова думка, 1990.- 184 с.
3. **Симомян С.О., Аветисян А.Г., Симомян А.С.** Метод определения параметрических обобщенно-обратных матриц, основанный на дифференциальных преобразованиях // Вестник ГИУА. Сер. “Моделирование, оптимизация, управление”.- 2008.- Вып. 11, том 1.- С. 78-85.
4. **Симомян С.О., Аветисян А.Г., Симомян А.С., Авинян В.Р.** Универсальный метод определения параметрических обобщенных обратных матриц // Вестник ГИУА. Сер. “Информационные технологии, электроника, радиотехника”.- 2012.- Вып. 15, N⁰ 2.- С. 9-19.

5. **Боровский А.** QT 4.7+. Практическое программирование на C⁺⁺. – СПб.: “БХВ_Петербург”, 2012.- 496 с.

ГИУА (ПОЛИТЕХНИК). Материал поступил в редакцию 11.09.2013.

Ս.Հ. ՄԻՄՈՆՅԱՆ

**ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ
ՈՐՈՇ ՀԱՇՎՈՂԱԿԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ ՄԱՏՐԻՑԱՎԵԿՏՈՐԱՑԻՆ
ՆԵՐԿԱՑԱՑՈՒՄՆԵՐԸ**

Առաջարկվել են Մուր-Պենրուզի պարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների որոշման Պուլտվի դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա հիմնված որոշ եղանակների կոնստրուկտիվ մատրիցավեկտորային ներկայացումները:

Առանցքային բառեր. պարամետրական մատրիցներ, ընդհանրացված հակադարձ մատրիցներ, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, հաջորդական անդրադարձ հաշվողական սխեմաներ, հաշվողական մեթոդների կոնստրուկտիվ մատրիցավեկտորային ներկայացումներ:

S.H. SIMONYAN

**MATRIX-VECTOR REPRESENTATIONS OF SOME CALCULATING
METHODS FOR DEFINING PARAMETRIC GENERALIZED INVERSE
MATRICES**

Constructive matrix-vector representations of some calculating methods for defining Moore - Penrouse's parametric generalized inverse matrices based on Pukhv's differential conversions, are proposed.

Keywords: parametric matrices, generalized inverse matrices, differential, transforms, sequential recurrent calculating circuits, representations of matrix-vector constructive methods calculating.