ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2013. Т. LXVI, № 3.

УДК 621.3

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

А.А. ТЕРЗЯН, Г.С. СУКИАСЯН, А.Э. АКОПЯН, А.А. ГЕВОРГЯН

К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРИ ТРЕХМЕРНОМ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОМ И КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Исследованы расчетные уравнения для решения нелинейного электромагнитного поля методами конечных элементов и конечных разностей в трехмерной постановке. Результаты анализа, полученные авторами ранее для двумерного моделирования поля, обобщены для трехмерного случая. Показано, что для прямоугольной тетраэдрической сетки расчетные уравнения совпадают по всем трем составляющим векторного магнитного потенциала.

Ключевые слова: электромагнитное поле, сеточные задачи, метод конечных элементов, метод конечных разностей, тетраэдрическая сетка.

Магнитное поле, созданное электрическим током, подчиняется классическому уравнению Максвелла

$$rot\frac{1}{\mu}(rot\vec{A}) = \delta.$$

В декартовой системе координат (x, y, z) уравнение Максвелла принимает вид [1,2]

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}A^x + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial y}A^x + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}A^x = -\delta^x, \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}A^y + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial y}A^y + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}A^y = -\delta^y, \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}A^z + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial y}A^z + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}A^z = -\delta^z, \end{cases} \qquad (1)$$

где $A = (A^x, A^y, A^z)$ - векторный магнитный потенциал; $\delta = (\delta^x, \delta^y, \delta^z)$ - вектор плотности тока; μ - величина магнитной проницаемости.

Прямое решение системы (1) затруднительно из-за нелинейности задачи: величина магнитной проницаемости зависит от потенциала и тоже является неизвестной. В методе конечных элементов задача решения системы (1) заменяется вариационной, т.е. рассматривается функционал F, минимум которого достигается точным решением уравнений (1). Здесь

$$\left[F=\iiint\limits_{\Omega}\left(f_x+f_y+f_z\right)dxdydz\right],$$

$$\begin{cases} f_x=\dfrac{1}{2\mu}\left[\left(\dfrac{\partial A^x}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial A^x}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial A^x}{\partial z}\right)^2\right]-\delta^x A^x, \\ f_y=\dfrac{1}{2\mu}\left[\left(\dfrac{\partial A^y}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial A^y}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial A^y}{\partial z}\right)^2\right]-\delta^y A^y, \\ f_z=\dfrac{1}{2\mu}\left[\left(\dfrac{\partial A^z}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial A^z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial A^z}{\partial z}\right)^2\right]-\delta^z A^z. \end{cases} \tag{2}$$

Затем с помощью метода базисных функций можно получить расчетные уравнения для минимизации функционала.

Дискретизируем задачу, разбив рассматриваемую область Ω на тетраэдры (элементы) и приняв, что внутри элемента e магнитная проницаемость μ постоянна, а потенциалы являются линейной функцией вида

$$A^x=\sum_{t\in W_e}A_t^x b_t^e(x,y,z),\quad A^y=\sum_{t\in W_e}A_t^y b_t^e(x,y,z),\quad A^z=\sum_{t\in W_e}A_t^z b_t^e(x,y,z), \tag{3}$$

где $W_e=(i,j,k,m)$ - множество вершин элемента e; A_t - значение потенциала A в узле t; $b_t^e(x,y,z)$ - базисная функция, т.е. линейная функция, равная единице в узле t и нулю в остальных трех вершинах тетраэдра e. Базисные функции удобно записать в виде детерминанта

$$b_k^e(x,y,z)=\frac{1}{6V_e}\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_j & y_j & z_j & 1 \\ x_i & y_i & z_i & 1 \\ x_m & y_m & z_m & 1 \end{vmatrix}, \tag{4}$$

где (x_t,y_t,z_t)- декартовы координаты вершин тетраэдра, $t=(i,j,k,m)$; V_e - объем тетраэдра e:

$$6V_e = \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \\ x_j & y_j & z_j & 1 \\ x_k & y_k & z_k & 1 \\ x_m & y_m & z_m & 1 \end{vmatrix}.$$

Подставляя (3) в (2), получим

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{1}{2\mu}\left[\left(\sum\limits_{t\in W_e} A_t^x \dfrac{\partial b_t^e}{\partial x}\right)^2 + \left(\sum\limits_{t\in W_e} A_t^x \dfrac{\partial b_t^e}{\partial y}\right)^2 + \left(\sum\limits_{t\in W_e} A_t^x \dfrac{\partial b_t^e}{\partial z}\right)^2\right] - \delta^x \sum\limits_{t\in W_e} A_t^x b_t^e, \\ f_y = \dfrac{1}{2\mu}\left[\left(\sum\limits_{t\in W_e} A_t^y \dfrac{\partial b_t^e}{\partial x}\right)^2 + \left(\sum\limits_{t\in W_e} A_t^y \dfrac{\partial b_t^e}{\partial y}\right)^2 + \left(\sum\limits_{t\in W_e} A_t^y \dfrac{\partial b_t^e}{\partial z}\right)^2\right] - \delta^y \sum\limits_{t\in W_e} A_t^y b_t^e, \\ f_z = \dfrac{1}{2\mu}\left[\left(\sum\limits_{t\in W_e} A_t^z \dfrac{\partial b_t^e}{\partial x}\right)^2 + \left(\sum\limits_{t\in W_e} A_t^z \dfrac{\partial b_t^e}{\partial y}\right)^2 + \left(\sum\limits_{t\in W_e} A_t^z \dfrac{\partial b_t^e}{\partial z}\right)^2\right] - \delta^z \sum\limits_{t\in W_e} A_t^z b_t^e. \end{cases} \quad (5)$$

Чтобы найти минимум энергетического функционала, рассчитаем его производные:

$$\frac{\partial f_x}{\partial A_k^x} = \frac{1}{2\mu}\left[2\left(\sum_{t\in W_e} A_t^x \frac{\partial b_t^e}{\partial y}\right)\frac{\partial b_k^e}{\partial y} + 2\left(\sum_{t\in W_e} A_t^x \frac{\partial b_t^e}{\partial z}\right)\frac{\partial b_k^e}{\partial z}\right]$$

и приравняем их нулю. В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_x}{\partial A_k^x} = \sum\limits_{e\in E_k}\left[\nu_e \sum\limits_{t\in W_e}\left(a_{kt} A_t^x\right) - \delta^x a_k^e\right] = 0, \\ \dfrac{\partial f_y}{\partial A_k^y} = \sum\limits_{e\in E_k}\left[\nu_e \sum\limits_{t\in W_e}\left(a_{kt} A_t^y\right) - \delta^y a_k^e\right] = 0, \\ \dfrac{\partial f_z}{\partial A_k^z} = \sum\limits_{e\in E_k}\left[\nu_e \sum\limits_{t\in W_e}\left(a_{kt} A_t^z\right) - \delta^z a_k^e\right] = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где ν_e - значение $\nu = 1/\mu$ внутри элемента e; E_k - множество тетраэдров, содержащих узел k; a_{kt}^e - коэффициенты взаимодействия вершин k и t в элементе e, которые получаются дифференцированием формул (5)

$$\begin{cases} a_{kt} = \iiint\limits_e \left(\dfrac{\partial b_k^e}{\partial x}\dfrac{\partial b_t^e}{\partial x} + \dfrac{\partial b_k^e}{\partial y}\dfrac{\partial b_t^e}{\partial y} + \dfrac{\partial b_k^e}{\partial z}\dfrac{\partial b_t^e}{\partial z}\right) dxdydz, \\ a_k^e = \iiint\limits_e b_k^e\, dxdydz. \end{cases} \quad (7)$$

Таким образом, трехмерное моделирование магнитного поля методом конечных элементов сводится к решению системы уравнений (6). Заметим, что для каждого узла k в (6) принимают участие только непосредственные соседи узла k. Получается система уравнений с неизвестными $\mathrm{A_k}$, причем количество уравнений равно количеству неизвестных и утроенному количеству некраевых узлов.

Заметим, что в случае двумерного моделирования магнитного поля с прямоугольной расчетной сеткой в [3] было показано совпадение погрешностей и скоростей сходимости при решении методами конечных разностей и конечных элементов.

С целью обобщения этих результатов для трехмерного случая рассмотрим расчетную сетку с прямоугольными тетраэдрами.

На рисунке представлено 8 прямоугольных тетраэдров, окружающих точку 0.

Рассмотрим тетраэдр $P_0P_1P_2P_3$ с вершинами $P_0 = (0,0,0)$, $P_1 = (0,h_y,0)$, $P_2 = (0,0,h_z)$, $P_3 = (h_x,0,0)$.

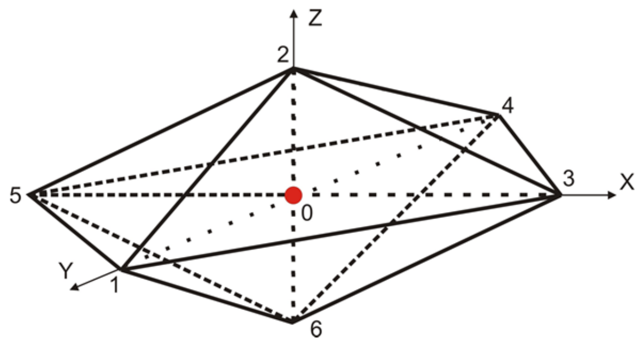

Рис.

Объем тетраэдра определяется по выражению

$$6V = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & h_z & 1 \\ 0 & h_y & 0 & 1 \\ h_x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +h_x h_y h_z .$$

Базисные функции имеют следующий вид:

$$b_0(x,y,z) = \frac{1}{6V}\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & h_z & 1 \\ 0 & h_y & 0 & 1 \\ h_x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-xh_yh_z - yh_xh_z - zh_yh_x + h_xh_yh_z}{h_xh_yh_z} = 1 - \frac{x}{h_x} - \frac{y}{h_y} - \frac{z}{h_z},$$

$$b_2(x,y,z)=\frac{1}{6V}\begin{vmatrix}0&0&0&1\\x&y&z&1\\0&h_y&0&1\\h_x&0&0&1\end{vmatrix}=\frac{-z}{h_xh_yh_z}\begin{vmatrix}0&0&1\\0&h_y&1\\h_x&0&1\end{vmatrix}=\frac{z}{h_z}.$$

Аналогично,

$$b_1(x,y,z)=\frac{y}{h_y},\ b_3(x,y,z)=\frac{x}{h_x}\cdot$$

Потенциал внутри тетраэдра $P_0P_1P_2P_3$ линейный и имеет вид

$$A=\sum_{t=0}^{3}A_t\,b_t^e(x,y,z)=A_0\left(1-\frac{x}{h_x}-\frac{y}{h_y}-\frac{z}{h_z}\right)+A_2\,\frac{z}{h_z}+A_1\,\frac{y}{h_y}+A_3\,\frac{x}{h_x}=$$

$$=A_0+(A_2-A_0)\frac{z}{h_z}+(A_1-A_0)\frac{y}{h_y}+(A_3-A_0)\frac{x}{h_x}.$$

Рассмотрим вершины

$$P_4=\left(0,-h_y,0\right),\ P_5=\left(-h_x,0,0\right),\ P_6=\left(0,0,-h_z\right).$$

Для соседнего тетраэдра $P_0P_2P_3P_4$:

$$6V=\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&h_z&1\\0&-h_y&0&1\\h_x&0&0&1\end{vmatrix}=-h_xh_yh_z.$$

Базисные функции имеют следующий вид:

$$b_0(x,y,z)=\frac{1}{6V}\begin{vmatrix}x&y&z&1\\0&0&h_z&1\\0&-h_y&0&1\\h_x&0&0&1\end{vmatrix}=\frac{xh_yh_z-yh_xh_z+zh_yh_x-h_xh_yh_z}{-h_xh_yh_z}=1-\frac{x}{h_x}+\frac{y}{h_y}-\frac{z}{h_z},$$

$$b_2(x,y,z)=\frac{-1}{6V}\begin{vmatrix}x&y&z&1\\0&0&0&1\\0&-h_y&0&1\\h_x&0&0&1\end{vmatrix}=\frac{-z}{-h_xh_yh_z}\begin{vmatrix}0&0&1\\0&-h_y&1\\h_x&0&1\end{vmatrix}=\frac{z}{h_z},$$

$$b_4(x,y,z)=\frac{1}{6V}\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&h_x&1\\x&y&z&1\\h_x&0&0&1\end{vmatrix}=\frac{-y}{-h_xh_yh_z}\begin{vmatrix}0&0&1\\0&h_z&1\\h_x&0&1\end{vmatrix}=\frac{y}{-h_y}.$$

Аналогично, $b_3(x,y,z)=\dfrac{x}{h_x}$.

Для тетраэдра $P_0P_1P_2P_3$ и расчетного узла k=0 коэффициенты в (7) приобретают вид

$$\frac{\partial b_0(x,y,z)}{\partial x}=-\frac{1}{h_x},\ \frac{\partial b_0(x,y,z)}{\partial y}=-\frac{1}{h_y},\ \frac{\partial b_0(x,y,z)}{\partial z}=-\frac{1}{h_z},$$

$$\frac{\partial b_3(x,y,z)}{\partial x}=\frac{1}{h_x},\ \frac{\partial b_1(x,y,z)}{\partial y}=\frac{1}{h_y},\ \frac{\partial b_2(x,y,z)}{\partial z}=\frac{1}{h_z}.$$

Остальные производные равны нулю. Следовательно, для тетраэдра e= $P_0P_1P_2P_3$ и расчетного узла k=0 имеем

$$a_{00}^e=\iiint\limits_e\left(\frac{1}{h_x^2}+\frac{1}{h_y^2}+\frac{1}{h_z^2}\right)dxdydz=\left(\frac{1}{h_x^2}+\frac{1}{h_y^2}+\frac{1}{h_z^2}\right)\frac{h_xh_yh_z}{6},$$

$$a_{02}^e=\left(-\frac{1}{h_z^2}\right)\frac{h_xh_yh_z}{6},\ a_{01}^e=\left(-\frac{1}{h_y^2}\right)\frac{h_xh_yh_z}{6},\ a_{03}^e=\left(-\frac{1}{h_x^2}\right)\frac{h_xh_yh_z}{6}.$$

Для соседнего тетраэдра $P_0P_2P_3P_4$ получим

$$\frac{\partial b_0(x,y,z)}{\partial x}=-\frac{1}{h_x},\ \frac{\partial b_0(x,y,z)}{\partial y}=\frac{1}{h_y},\ \frac{\partial b_0(x,y,z)}{\partial z}=-\frac{1}{h_z},$$

$$\frac{\partial b_3(x,y,z)}{\partial x}=\frac{1}{h_x},\ \frac{\partial b_4(x,y,z)}{\partial y}=-\frac{1}{h_y},\ \frac{\partial b_2(x,y,z)}{\partial z}=\frac{1}{h_z}.$$

Следовательно, для тетраэдра e= $P_0P_2P_3P_4$ и расчетного узла k=0 имеем

$$a_{00}^e = \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2}\right)\frac{h_x h_y h_z}{6},\ a_{02}^e = \left(-\frac{1}{h_z^2}\right)\frac{h_x h_y h_z}{6},\ a_{04}^e = \left(-\frac{1}{h_y^2}\right)\frac{h_x h_y h_z}{6},$$

$$a_{03}^e = \left(-\frac{1}{h_x^2}\right)\frac{h_x h_y h_z}{6}.$$

Заметим, что $a_{01}^e = a_{04}$. Аналогично вычисляя для остальных 6 тетраэдров, получим расчетное уравнение

$$\begin{aligned}
A_0^x\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2}\right)&\left(\nu_{0123} + \nu_{0234} + \nu_{0125} + \nu_{0245} + \nu_{0613} + \nu_{0634} + \nu_{0615} + \nu_{0645}\right) = \\
&= \frac{A_2^x}{h_z^2}\left(\nu_{0123} + \nu_{0234} + \nu_{0125} + \nu_{0245}\right) + \frac{A_1^x}{h_y^2}\left(\nu_{0123} + \nu_{0125} + \nu_{0136} + \nu_{0156}\right) + \\
&+ \frac{A_3^x}{h_x^2}\left(\nu_{0123} + \nu_{0234} + \nu_{0136} + \nu_{0346}\right) + \frac{A_4^x}{h_y^2}\left(\nu_{0234} + \nu_{0245} + \nu_{0346} + \nu_{0456}\right) + \\
&+ \frac{A_5^x}{h_x^2}\left(\nu_{0125} + \nu_{0245} + \nu_{0156} + \nu_{0456}\right) + \frac{A_6^x}{h_z^2}\left(\nu_{0136} + \nu_{0346} + \nu_{0156} + \nu_{0456}\right)\ ,
\end{aligned} \tag{8}$$

где через ν_{ijkm} обозначено значение $\text{v} = 1/\mu$ внутри тетраэдра ijkm.

Применим для решения уравнений (1) метод конечных разностей. Заменяя значения второй производной потенциала А в точке 0 соответствующей разностью, получим

$$\frac{\partial}{\partial \text{x}}\nu\frac{\partial}{\partial \text{x}}\text{A}^\text{x} \approx \frac{1}{\text{h}_\text{x}}\left[\nu_{03}\frac{\partial}{\partial \text{x}}\text{A}_{03}^\text{x} - \nu_{05}\frac{\partial}{\partial \text{x}}\text{A}_{05}^\text{x}\right],$$

где индекс 03 (05) означает середину отрезка P_0P_3 (P_0P_5). Далее

$$\frac{\partial}{\partial x}A_{03}^x \approx \frac{1}{h_x}(A_3^x - A_0^x),\ \frac{\partial}{\partial x}A_{05}^x \approx \frac{1}{h_x}(A_5^x - A_0^x),$$

$$\nu_{03} = \frac{1}{4}(\nu_{0123} + \nu_{0234} + \nu_{0136} + \nu_{0346}),\ \nu_{05} = \frac{1}{4}\left(\nu_{0125} + \nu_{0245} + \nu_{0156} + \nu_{0456}\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
4h_x^2\frac{\partial}{\partial x}\nu\frac{\partial}{\partial x}A^x \approx\ & A_3^x\left(\nu_{0123} + \nu_{0234} + \nu_{0136} + \nu_{0346}\right) + A_5^x\left(\nu_{0125} + \nu_{0245} + \nu_{0156} + \nu_{0456}\right) - \\
& - A_0^x\left(\nu_{0123} + \nu_{0234} + \nu_{0125} + \nu_{0245} + \nu_{0613} + \nu_{0634} + \nu_{0615} + \nu_{0645}\right).
\end{aligned}$$

Аналогично вычисляя значения вторых производных потенциала A по y и по z и подставляя их в (1), получим в точности уравнение (8). Аналогично можно получить расчетные уравнения для составляющих потенциала A по y и по z.

Следовательно, для прямоугольной тетраэдрической сетки расчетное уравнение для метода конечных элементов совпадает с уравнением для метода конечных разностей относительно каждой составляющей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Новик Я.А.** Вариационная формулировка решения задачи расчета трехмерного стационарного магнитного поля с учетом нелинейных свойств среды // Изв. АН ЛатвССР. Сер. Физ. и техн. наук. - 1974. - № 4.- С. 79-89.
2. **Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Акопян А.Э.** Об оптимизации тетраэдральной сетки для расчета трехмерных магнитных полей методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2008. - Т. 61, № 2. – С. 305-317.
3. **Терзян А.А., Сукиасян Г.С.** К определению магнитных полей численными методами // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. - 1977. - № 5. – С. 115-121.

ГИУА (ПОЛИТЕХНИК). Материал поступил в редакцию 10.04.2013.

Հ.Ա. ԹԵՐԶՅԱՆ, Հ.Ս. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ, Ա.Է. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Ա.Ա. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ԵՌԱՉԱՓ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՏԱՐԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ՎԵՐՋԱՎՈՐ-ՏԱՐՐԱՅԻՆ ՄՈԴԵԼԱՎՈՐՄԱՆ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Հետազոտվել են վերջավոր տարրերի և վերջավոր տարբրությունների մեթոդներով ոչ գծային էլեկտրամագնիսական դաշտի լուծման համար հաշվարկային հավասարումները եռաչափ դրվածքով: Ավելի վաղ հեղինակների կողմից ստացված երկչափ մոդելավորմամբ դաշտի արդյունքներն ընդհանրացվել են եռաչափի համար: Ցույց է տրված, որ ուղղանկյուն քառանիստ ցանցի համար հաշվարկային հավասարումները համընկնում են վեկտորական մագնիսական պոտենցիալի բոլոր երեք բաղադրիչներով:

Առանցքային բառեր. էլեկտրամագնիսական դաշտ, ցանցային խնդիրներ, վերջավոր տարրերի մեթոդ, վերջավոր տարբերությունների մեթոդ, քառանիստ ցանց:

H.A. TERZYAN, H.S. SUKIASYAN, A.E. HAKOBYAN, A.A. GEVORGYAN

ON THE SOLUTION OF NONLINEAR MAGNETIC FIELD AT THREE-DIMENSIONAL FINITE ELEMENTS AND FINITE DIFFERENCE MODELING

The calculation equations for the solution of nonlinear electromagnetic field by finite element and finite difference methods in three-dimensional formulation are investigated. The results of the earlier analysis obtained by the authors for the two-dimensional field modeling, are generalized for the three-dimensional case. It is shown that for the rectangle tetrahedral mesh, the calculation equations coincide by all the three components of the vector magnetic potential.

Keywords: electromagnetic field, mesh problems, finite element method, finite difference method, tetrahedral mesh.