

ՀՏԴ 517.577.5

ԱՎՏՈՄԱՏԱՑՈՒՄ ԵՎ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ  
ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

Ս.Ա. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, Մ.Կ. ԴԱՐԱՌՉՅԱՆ

ԱԶԱՏ ԵԶՐԱՑԻՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԻ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ԲԱՎԱՐԱՐ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ  
ՎԱՐԻԱՑԻՈՆ ՀԱՇՎԻ ԽՆԴՐՈՒՄ

Վարիացիոն հաշվի խնդրի համար մշակված է ֆունկցիայի աջակողմյան ազատ եզրի գոյության բավարար պայմանների վերլուծության եղանակ:

**Առանցքային բառեր.** վարիացիոն հաշիվ, ազատ եզրեր, ֆունկցիոնալ, շարք, մասնակի ածանցյալներ, դիֆերենցիալ հավասարում, ինտեգրալ:

Օպտիմալ կառավարման միաչափ վարիացիոն հաշվի (ՎՀ) խնդիրներում ազատ եզրերի (ԱԵ) գոյության անհրաժեշտ պայմաններն ուսումնասիրված են [1-4] աշխատություններում: Այդ պայմանները նկարագրվում են Էյլեր-Պուատսոնի հավասարումներով [4]: Սակայն ԱԵ գոյության բավարար պայմանների գնահատումը, նշված աշխատությունների շրջանակներում երկրորդ վարիացիայի նկարագրմամբ, գործնականում կապված է դժվարությունների հետ՝ անհայտ պարամետրերի առկայության պատճառով: Ուսումնասիրվում են թվային մեթոդներով լուծվող միաչափ ՎՀ ոչ ավտոնոմ խնդրում ֆունկցիայի աջակողմյան ԱԵ գոյության բավարար պայմանները:

Ունենք վարիացիոն հաշվի ոչ ավտոնոմ հետևյալ խնդիրը.

$$I = \int_{t_0}^t F(y(\tau), y'(\tau), \tau) d\tau \rightarrow \min(\max), \quad (1)$$

$$\begin{cases} \tau = t_0, & y = y_0, \\ \tau = t, & y = y_1, \end{cases} \quad (2)$$

որտեղ  $t_0, y_0, t$  եզրային պարամետրերի (ԵՊ) արժեքներն ամրագրված են:

Ենթադրվում է, որ (1) ֆունկցիոնալի ենթաինտեգրալային  $F$  ֆունկցիան ունի բարձր կարգի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ, և (1), (2) առանց սահմանափակումների խնդիրն ունի լուծում, այսինքն՝  $y(\tau, y_1)$  ֆունկցիան բավարարում է Էյլերի հետևյալ հավասարմանը [1].

$$F_y - \frac{d}{d\tau} F_{y'} = 0: \quad (3)$$

Էյլերի (3) հավասարման լուծումը կունենա ինտեգրման երկու հաստատուններ, որոնք որոշվում են եզրային (2) պայմաններից: Քանի որ եզրային  $y_1$  պարամետրը

ազատ է, ապա ինտեգրման հաստատունները կախված կլինեն  $y_1$  պարամետրից, և արդյունքում  $y$  էքստրեմալը կարելի է դիտարկել որպես երկու պարամետրերի ֆունկցիա՝

$$y = y(\tau, y_1), \quad (4)$$

որը կբավարարի եզրային (2) պայմանները.

$$\begin{aligned} y(\tau, y_1)_{\tau=t_0} &= y_0, \\ y(\tau, y_1)_{\tau=t} &= y_1 : \end{aligned} \quad (5)$$

Ենթադրվում է, որ  $y(\tau, y_1)$  ֆունկցիան ունի բարձր կարգի մասնակի ածանցյալներ: Ֆունկցիոնալի օպտիմալ արժեքը կլինի ֆունկցիա  $y_1$  եզրային պարամետրից, և ԱԵ գոյության բավարար պայմանների խնդիրը կլինի համարժեք մաթեմատիկական ծրագրավորման հետևյալ խնդրին.

$$I = I(y_1) \rightarrow \min(\max), \quad (6)$$

որը կարելի է ուսումնասիրել դասական անալիզի մեթոդներով [5]: Ենթադրելով, որ  $y_1$ -ի օպտիմալ արժեքը հայտնի է, ֆունկցիոնալի  $\Delta I(y_1)$  փոփոխությունը՝ երկրորդ անդամի ճշտությամբ կախված  $y_1$ -ի  $\Delta y_1$  փոփոխությունից, կորոշվի հետևյալ արտահայտությամբ [5].

$$\Delta I(y_1) = I(y_1 + \Delta y_1) - I(y_1) = \frac{\partial I}{\partial y_1} \cdot \Delta y_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial y_1^2} \cdot \Delta y_1^2 + \beta(\Delta y_1^2): \quad (7)$$

Ստացված (7) արտահայտությունից կհետևեն  $y_1$  ԵՊ-ի գոյության հետևյալ բավարար պայմանները.

$$\begin{cases} \partial I / \partial y_1 = 0, \\ \partial^2 I / \partial y_1^2 > 0 \rightarrow \min, \\ \partial^2 I / \partial y_1^2 < 0 \rightarrow \max : \end{cases} \quad (8)$$

Այն դեպքում, երբ (1),(2) խնդիրն ունի անալիտիկ լուծում,  $y_1$ -ի էքստրեմումի հարցը կլուծվի (8)-ից: Բացառապես թվային մեթոդներով լուծվող (1),(2) խնդիրների դեպքում (6) ֆունկցիան բացահայտ տեսքով հայտնի չէ, սակայն կարելի է որոշել (7) շարքի գործակիցները՝ վերաձելով Թեյլորի շարքի (1) ինտեգրալային արտահայտությունը՝  $y_1$ -ի  $\Delta y_1$  փոփոխությունների դեպքում.

$$\begin{aligned} \Delta I(y_1) = I(y_1 + \Delta y_1) - I(y_1) &= \int_{t_0}^t F(y(\tau, y_1 + \Delta y_1), \dot{y}(\tau, y_1 + \Delta y_1), \tau) d\tau - \\ &- \int_{t_0}^t F(y(\tau, y_1), \dot{y}(\tau, y_1), \tau) d\tau : \end{aligned} \quad (9)$$

Ներկայացնենք Թեյլորի շարքով (9)-ի ենթահետևողական արտահայտությունը  $y_1$  կետի շրջակայքում՝

$$\begin{aligned} F(y(\tau, y_1 + \Delta y_1), \dot{y}(\tau, y_1 + \Delta y_1), \tau) &= F(y(\tau, y_1), \dot{y}(\tau, y_1), \tau) + \\ &+ (F_y \frac{\partial y}{\partial y_1} + F_{\dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial y_1}) \cdot \Delta y_1 + \frac{1}{2} (F_{yy} \cdot (\frac{\partial y}{\partial y_1})^2 + 2 \cdot F_{y\dot{y}} \frac{\partial y}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \dot{y}}{\partial y_1} + \\ &+ F_{\dot{y}\dot{y}} (\frac{\partial \dot{y}}{\partial y_1})^2 + F_y \frac{\partial^2 y}{\partial y_1^2} + F_{\dot{y}} \frac{\partial^2 \dot{y}}{\partial y_1^2}) \cdot \Delta y_1^2 + \beta_1 (\Delta y_1^2), \end{aligned} \quad (10)$$

որտեղ  $\beta_1 (\Delta y_1^2)$ -ն շարքերի բարձր կարգի անդամների գումարն է:

Հաշվի առնենք (10)-ը (9)-ում և, կատարելով մասերով ինտեգրում (10) արտահայտության երկրորդ գումարելիի երկրորդ անդամով, երրորդ գումարելիի երկրորդ և հինգերորդ անդամներով պայմանավորված ինտեգրալներում, կունենանք՝

$$\int_{t_0}^t F_{\dot{y}} \cdot \frac{\partial \dot{y}}{\partial y_1} d\tau = F_{\dot{y}} \cdot \frac{\partial y}{\partial y_1} \Big|_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \frac{\partial y}{\partial y_1} \cdot \frac{dF_{\dot{y}}}{d\tau} d\tau, \quad (11)$$

$$\int_{t_0}^t 2 \cdot F_{y\dot{y}} \cdot \frac{\partial y}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \dot{y}}{\partial y_1} d\tau = \int_{t_0}^t F_{y\dot{y}} \cdot d \left( \frac{\partial y}{\partial y_1} \right)^2 = F_{y\dot{y}} \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial y_1} \right)^2 \Big|_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial y}{\partial y_1} \right)^2 \cdot \frac{dF_{y\dot{y}}}{d\tau} d\tau, \quad (12)$$

$$\int_{t_0}^t F_y \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial y_1^2} d\tau = \int_{t_0}^t F_{\dot{y}} \cdot d \frac{\partial^2 y}{\partial y_1^2} = F_{\dot{y}} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial y_1^2} \Big|_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \frac{\partial^2 y}{\partial y_1^2} \cdot \frac{dF_{\dot{y}}}{d\tau} d\tau: \quad (13)$$

Ստացված (11), (12) և (13) արտահայտությունները կարելի է պարզեցնել՝ օգտվելով  $y(\tau, y_1)$  ֆունկցիայի՝ ըստ  $y_1$  պարամետրի մասնակի ածանցյալների հատկություններից՝ արգումենտի  $\tau = t$  և  $\tau = t_0$  արժեքների դեպքում:

Ապացուցենք հետևյալ թեորեմները.

Թեորեմ 1. Եթե  $y(\tau, y_1)$  ֆունկցիան (1), (2) խնդրի համար թույլատրելի ֆունկցիա է, այդ թվում՝ էքստրեմալ, ապա  $\tau = t$  արժեքի դեպքում տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

$$(\partial y(\tau, y_1) / \partial y_1)_{\tau=t} = 1, \quad (\partial^k y(\tau, y_1) / \partial y_1^k)_{\tau=t} = 0 \quad k \geq 2: \quad (14)$$

Ապացույց: Եթե  $y(\tau, y_1)$  -ը թույլատրելի ֆունկցիա է, ապա ԵՊ-ի  $(y_1 + \Delta y_1)$  արժեքի դեպքում, որտեղ  $\Delta y_1$  -ը կամայական փոքր փոփոխություն է, համաձայն (5)-ի՝ տեղի կունենա՝

$$y(\tau, y_1 + \Delta y_1)_{\tau=t} = y_1 + \Delta y_1: \quad (15)$$

Վերածենք շարքի (15) արտահայտության ձախ մասը՝ ըստ  $y_1$  պարամետրի՝

$$\begin{aligned}
y(\tau, y_1 + \Delta y_1)_{\tau=t} &= (y(\tau, y_1) + \frac{\partial y(\tau, y_1)}{\partial y_1} \cdot \Delta y_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 y(\tau, y_1)}{\partial y_1^2} \cdot \Delta y_1^2 + \dots \\
&\dots + \frac{1}{k!} \cdot \frac{\partial^k y(\tau, y_1)}{\partial y_1^k} \cdot \Delta y_1^k + \dots)_{\tau=t} = y_1 + \Delta y_1 :
\end{aligned} \quad (16)$$

Հաշվի առնելով (5)-ի երկրորդ պայմանը՝ (16)-ից կունենանք՝

$$\left( \frac{\partial y(\tau, y_1)}{\partial y_1} \Big|_{\tau=t} - 1 \right) \cdot \Delta y_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 y(\tau, y_1)}{\partial y_1^2} \Big|_{\tau=t} \cdot \Delta y_1^2 + \dots + \frac{1}{k!} \cdot \frac{\partial^k y(\tau, y_1)}{\partial y_1^k} \Big|_{\tau=t} \cdot \Delta y_1^k + \dots = 0 : \quad (17)$$

Քանի որ ստացված (17) հավասարումը տեղի ունի կամայական  $\Delta y_1$  փոքր փոփոխությունների դեպքում, ապա տեղի կունենան հետևյալ պայմանները.

$$(\partial y(\tau, y_1) / \partial y_1)_{\tau=t} = 1, \quad (\partial^k y(\tau, y_1) / \partial y_1^k)_{\tau=t} = 0 \quad k \geq 2 :$$

Այսպիսով, (14) պայմանները տեղի ունեն:

Թեորեմ 2. Եթե  $y(\tau, y_1)$  ֆունկցիան (1), (2) խնդրի համար թույլատրելի ֆունկցիա է, այդ թվում՝ էքստրեմալ, ապա  $\tau = t_0$  արժեքի դեպքում տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

$$(\partial^k y(\tau, y_1) / \partial y_1^k)_{\tau=t_0} = 0 \quad k \geq 1 : \quad (18)$$

Ապացույց: Քանի, որ  $y(\tau, y_1)$  ֆունկցիան թույլատրելի է, ապա ԵՊ-ի  $(y_1 + \Delta y_1)$  արժեքի դեպքում, երբ  $\Delta y_1$ -ը կամայական փոքր աճ է, համաձայն (5)-ի առաջին պայմանի՝ տեղի կունենա՝

$$y(\tau, y_1 + \Delta y_1)_{\tau=t_0} = y_0 : \quad (19)$$

Վերածենք շարքի (19) արտահայտության ձախ մասը՝ ըստ  $y_1$  պարամետրի՝

$$\begin{aligned}
y(\tau, y_1 + \Delta y_1)_{\tau=t_0} &= (y(\tau, y_1) + \frac{\partial y(\tau, y_1)}{\partial y_1} \cdot \Delta y_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 y(\tau, y_1)}{\partial y_1^2} \cdot \Delta y_1^2 + \dots \\
&\dots + \frac{1}{k!} \cdot \frac{\partial^k y(\tau, y_1)}{\partial y_1^k} \cdot \Delta y_1^k + \dots)_{\tau=t_0} = y_0 :
\end{aligned} \quad (20)$$

Հաշվի առնելով (5)-ի առաջին պայմանը՝ (20)-ից կունենանք հետևյալ հավասարումը.

$$\frac{\partial y(\tau, y_1)}{\partial y_1} \Big|_{\tau=t_0} \cdot \Delta y_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 y(\tau, y_1)}{\partial y_1^2} \Big|_{\tau=t_0} \cdot \Delta y_1^2 + \dots + \frac{1}{k!} \cdot \frac{\partial^k y(\tau, y_1)}{\partial y_1^k} \Big|_{\tau=t_0} \cdot \Delta y_1^k + \dots = 0 : \quad (21)$$

Քանի որ  $\Delta y_1$ -ը կամայական փոքր փոփոխություն է, ապա (21)-ից կհետևեն հետևյալ պայմանները.

$$(\partial y(\tau, y_1)/\partial y_1)_{\tau=t_0} = 0, \quad (\partial^2 y(\tau, y_1)/\partial y_1^2)_{\tau=t_0} = 0, \quad (\partial^k y(\tau, y_1)/\partial y_1^k)_{\tau=t_0} = 0 \quad k \geq 1,$$

որը և (18)-ի հիմնավորումն է:

(14) և (18) պայմաններից օգտվելու դեպքում (11), (12) և (13) հավասարումները կընդունեն հետևյալ տեսքը.

$$\int_{t_0}^t F_{\dot{y}} \cdot \frac{\partial \dot{y}}{\partial y_1} d\tau = F_{\dot{y}_{\tau=t}} - \int_{t_0}^t \frac{\partial y}{\partial y_1} \cdot \frac{dF_{\dot{y}}}{d\tau} d\tau, \quad (22)$$

$$\int_{t_0}^t 2 \cdot F_{y\ddot{y}} \cdot \frac{\partial y}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \ddot{y}}{\partial y_1} d\tau = F_{y\ddot{y}_{\tau=t}} - \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial y}{\partial y_1} \right)^2 \cdot \frac{dF_{y\ddot{y}}}{d\tau} d\tau, \quad (23)$$

$$\int_{t_0}^t F_{\ddot{y}} \cdot \frac{\partial^2 \dot{y}}{\partial y_1^2} d\tau = - \int_{t_0}^t \frac{\partial^2 y}{\partial y_1^2} \cdot \frac{dF_{\ddot{y}}}{d\tau} d\tau: \quad (24)$$

Ստացված (22), (23) և (24) արտահայտությունների արդյունքում (9)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{aligned} \Delta I(y_1) = & \left( \int_{t_0}^t (F_{\dot{y}} - \frac{d}{d\tau} F_{\dot{y}}) d\tau + F_{\dot{y}_{\tau=t}} \right) \cdot \Delta y_1 + \frac{1}{2} \left( \int_{t_0}^t ((F_{y\ddot{y}} - \frac{d}{d\tau} F_{y\ddot{y}}) \cdot (\frac{\partial y}{\partial y_1})^2 + \right. \\ & \left. + F_{y\ddot{y}} (\frac{\partial \dot{y}}{\partial y_1})^2 + (F_{\dot{y}} - \frac{d}{d\tau} F_{\dot{y}}) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial y_1^2}) d\tau + F_{y\ddot{y}_{\tau=t}} \right) \cdot \Delta y_1^2 + \beta (\Delta y_1^2): \end{aligned} \quad (25)$$

Քանի որ ըստ ենթադրության՝  $y(\tau, y_1)$  -ը էքստրեմալ է, ապա տեղի կունենա (3) պայմանը: Այդ դեպքում (25)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{aligned} \Delta I(y_1) = & F_{\dot{y}_{\tau=t}} \cdot \Delta y_1 + \frac{1}{2} (F_{y\ddot{y}_{\tau=t}} + \int_{t_0}^t ((F_{y\ddot{y}} - \frac{d}{d\tau} F_{y\ddot{y}}) \cdot (\frac{\partial y}{\partial y_1})^2 + F_{y\ddot{y}} (\frac{\partial \dot{y}}{\partial y_1})^2) d\tau) \Delta y_1^2 + \\ & + \beta (\Delta y_1^2): \end{aligned} \quad (26)$$

Ստացված (26) հավասարումից (7)-ի  $\partial I/\partial y_1$  և  $\partial^2 I/\partial y_1^2$  գործակիցները կորոշվեն հետևյալ արտահայտություններով.

$$\frac{\partial I}{\partial y_1} = F_{\dot{y}_{\tau=t}}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y_1^2} = F_{y\ddot{y}_{\tau=t}} + \int_{t_0}^t ((F_{y\ddot{y}} - \frac{d}{d\tau} F_{y\ddot{y}}) \cdot (\frac{\partial y}{\partial y_1})^2 + F_{y\ddot{y}} (\frac{\partial \dot{y}}{\partial y_1})^2) d\tau: \quad (28)$$

Էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը (8)-ի առաջին հավասարումն է: Այն (27)-ի հիման վրա կունենա հետևյալ տեսքը.

$$F_y(y(\tau, y_1), \dot{y}(\tau, y_1), \tau)_{\tau=t} = 0, \quad (29)$$

որը համընկնում է ՎՀ (1), (2) խնդրի ֆունկցիայի աջակողմյան ԱԵ գոյության՝ [1-4] աշխատանքներում ներկայացված և այլ դատողություններով ստացված անհրաժեշտ պայմանին:

Ինչպես երևում է (28)-ից, (7) արտահայտության երկրորդ անդամի որոշման համար անհրաժեշտ է ունենալ ոչ միայն  $y(\tau, y_1)$ ,  $\dot{y}(\tau, y_1)$  ֆունկցիաները, այլև ըստ  $y_1$  պարամետրի նրանց մասնակի ածանցյալները: Այդ մասնակի ածանցյալ ֆունկցիաները կարելի է որոշել վարիացիայի առաջին աստիճանի հետևյալ հավասարումից՝ ըստ  $y_1$  պարամետրի [6].

$$(F_{yy} - \frac{d}{d\tau} F_{y\dot{y}}) \cdot \frac{\partial y}{\partial y_1} - \left( \frac{d}{d\tau} F_{\dot{y}\dot{y}} \right) \cdot \frac{\partial \dot{y}}{\partial y_1} - F_{\dot{y}\dot{y}} \cdot \frac{\partial \ddot{y}}{\partial y_1} = 0, \quad (30)$$

(14) և (18) –ից հետևող եզրային հետևյալ պայմանների դեպքում.

$$\begin{aligned} \tau = t_0, \quad \partial y(\tau, y_1) / \partial y_1 &= 0, \\ \tau = t, \quad \partial y(\tau, y_1) / \partial y_1 &= 1: \end{aligned} \quad (31)$$

Այսպիսով, թվային մեթոդով (1), (2) խնդրի լուծումը և ԱԵ  $y_1$  պարամետրի օպտիմալության բավարար (8) պայմանի ստուգումը կարելի է կատարել հետևյալ հաջորդականությամբ.

ա) թվային (մասնավորապես կրակոցների) մեթոդով [2] անհրաժեշտ է լուծել (2) և (29) եզրային պարամետրերով Էյլերի (3) հավասարումը, որի արդյունքում կորոշվի ինչպես  $y_1$  պարամետրը, այնպես էլ  $\dot{y}_{\tau=t_0}$  սկզբնական պայմանը: Արդյունքում՝ Էյլերի (3) հավասարման համար կունենանք սկզբնական հետևյալ պայմանները.

$$\tau = t_0, \quad y = y_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad (32)$$

բ) թվային մեթոդով անհրաժեշտ է համատեղ լուծել (32) սկզբնական պայմաններով Էյլերի (3) հավասարումը և եզրային (31) պայմաններով (30) դիֆերենցիալ հավասարումը: Արդյունքում՝ կունենանք (30) դիֆերենցիալ հավասարման սկզբնական հետևյալ պայմանները.

$$\tau = t_0, \quad \partial y / \partial y_1 = 0, \quad \partial \dot{y} / \partial y_1 = \partial \dot{y}_0, \quad (33)$$

գ) լուծվում են (32), (33) սկզբնական պայմաններով (3) և (30) դիֆերենցիալ հավասարումները՝ համատեղ հաշվելով (28) արտահայտության ինտեգրալի արժեքը: Այնուհետև, հաշվելով (7) արտահայտության երկրորդ անդամի գործակցի արժեքը՝

(28)-ի հիման վրա, (8) պայմաններից որոշվում է  $y_1$  արժեքի էքստրեմումի կետ լինելու հարցը:

Գործնականում  $y_1$  արժեքի էքստրեմումի կետ լինելու հարցը կարելի է պարզել ֆունկցիայի եզրային  $(y_1 \pm \Delta y_1)$  արժեքների դեպքում (1),(2) խնդրի լուծման և ֆունկցիոնալի  $I(y_1)$ ,  $I(y_1 + \Delta y_1)$ ,  $I(y_1 - \Delta y_1)$  արժեքների համեմատման միջոցով: Սակայն այս եղանակը աշխատատար է: Հոդվածում մշակված եղանակը նախընտրելի է ոչ միայն աշխատատարության տեսանկյունից, այլև հնարավորություն է տալիս (7)-ի հիման վրա գնահատել օպտիմումի զգայնությունը եզրային  $y_1$  պարամետրի նկատմամբ:

#### ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.- М.: Наука, 1965. – 425 с.
2. Сейдж Э.П., Уайт Ч.С. Оптимальное управление системами.- М.: Радио и связь, 1982.-392 с.
3. Зеликин М.И. Оптимальное управление и вариационное исчисление.- М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 160 с.
4. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления.- 2-е изд., перераб. и доп. – Л.: Энергия, 1977.- 220 с.
5. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование.- М.: Мир, 1975. – 534 с.
6. Մանակյան Ս.Ա., Դարահյան Մ.Կ. Օպտիմալ ֆունկցիայի ըստ եզրային պարամետրերի մասնակի ածանցյալների որոշումը կառավարման վարիացիոն խնդիրներում // Լրաբեր-76 ՀՊՀՀ (ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿ). - 2009.- Հատոր 1, N1. -էջ 514-517:

ՀՊՀՀ (ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿ): Նյութը ներկայացվել է խմբագրություն 05.04.2013:

**С.А. СААКЯН, М.К. ДАРАХЧЯН**

#### ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СВОБОДНОГО ГРАНИЧНОГО ПАРАМЕТРА В ЗАДАЧЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Разработан способ анализа достаточных условий существования свободной границы функции для задачи вариационного исчисления.

**Ключевые слова:** вариационное исчисление, свободные границы, функционал, ряд, частные производные, дифференциальное уравнение, интеграл.

**S.A. SAHAKYAN, M.K. DARAKHCHYAN**

#### SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF A FREE BOUNDARY PARAMETER IN THE PROBLEM OF VARIATION CALCULUS

A method for analyzing sufficient conditions for the existence of a free boundary of a function in the variation calculus is developed.

**Keywords:** variation calculus, free boundaries, functional, series, partial derivatives, differential equation, integral.