ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2013. Т. LXVI, № 2.

УДК 621.3 АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

А.А. ТЕРЗЯН, Г.С. СУКИАСЯН, А.Э. АКОПЯН, А.А. ГЕВОРГЯН

О СВОЙСТВАХ ДИВЕРГЕНЦИИ ВЕКТОРА МАГНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛА ПРИ ТРЕХМЕРНОМ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕЛИНЕЙНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Исследованы свойства дивергенции вектора магнитного потенциала электромагнитного поля. Доказано, что приравнивание нулю дивергенции потенциала приводит к независимым уравнениям относительно каждой составляющей. Показана возможность распараллеливания процесса решения полевых задач методом конечных элементов по трем составляющим векторного магнитного потенциала.

Ключевые слова: электромагнитное поле, дивергенция вектора магнитного потенциала, распараллеливание решения.

Трехмерное магнитное поле, созданное электрическим током, подчиняется классическому уравнению Максвелла:

$$rot\frac{1}{\mu}\vec{B}=\delta.$$

Представим вектор индукции магнитного поля в виде вихря вектора магнитного потенциала:

$$\vec{B}=rot\vec{A}.$$

Тогда уравнение Максвелла приобретает вид

$$rot\frac{1}{\mu}(rot\vec{A})=\delta$$

Применяя в декартовой системе координат (x, y, z) определение вихря, уравнение Максвелла преобразуется к следующему виду [1,2]

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x}A^y-\frac{\partial}{\partial y}A^x\right)+\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x}A^z-\frac{\partial}{\partial z}A^x\right)=\delta^x,\\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial y}A^x-\frac{\partial}{\partial x}A^y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial y}A^z-\frac{\partial}{\partial z}A^y\right)=\delta^y,\\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial z}A^x-\frac{\partial}{\partial x}A^z\right)+\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial z}A^y-\frac{\partial}{\partial y}A^z\right)=\delta^z,\end{cases} \tag{1}$$

где $A=(A^x,A^y,A^z)$ - вектор магнитного потенциала; $\delta=(\delta^x,\delta^y,\delta^z)$ - вектор плотности тока; μ - величина магнитной проницаемости.

Согласно теореме о разложении Гельмгольца, если дивергенция и ротор поля определены в каждой точке области, то во всей области вектор поля можно представить в виде суммы безвихревого и соленоидального полей [2,3]. Тем самым вектор магнитного потенциала можно представить в виде $\overrightarrow{A'} = \vec{A} + grad\phi$, следовательно, для любой скалярной функции ϕ, $\overrightarrow{B'} = \overrightarrow{B}$, так как $rot(grad\phi) = 0$.

Таким образом, имеется множество решений уравнения Максвелла. При решении трехмерной задачи магнитостатики для того, чтобы уравнение Максвелла решалось однозначно, применяется кулоновская калибровка, которая требует принудительного выполнения условия [4-7]:

$$div\vec{A} = 0.$$

Исследуем, как отражается кулоновская калибровка на уравнении Максвелла в декартовой системе координат. Преобразуем уравнения (1):

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x}A^y - \frac{\partial}{\partial y}A^x\right) + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x}A^z - \frac{\partial}{\partial z}A^x\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}A^y - \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial y}A^x + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}A^z - \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}A^x.$$

Из-за гладкости функции потенциала можно заменить порядок дифференцирования и получить

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x}A^y - \frac{\partial}{\partial y}A^x\right) + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x}A^z - \frac{\partial}{\partial z}A^x\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial y}A^y + \frac{\partial}{\partial z}A^z\right) - \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}A^x - \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial y}A^x.\end{aligned} \tag{2}$$

Для дивергенции вектора магнитного потенциала имеем

$$div\ A = \frac{\partial A^x}{\partial x} + \frac{\partial A^y}{\partial y} + \frac{\partial A^z}{\partial z}.$$

Приравнивая нулю дивергенцию вектора магнитного потенциала и подставляя полученное выражение в (2), будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x}A^y - \frac{\partial}{\partial y}A^x\right) + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x}A^z - \frac{\partial}{\partial z}A^x\right) =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}A^x - \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}A^x - \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial y}A^x.$$

Аналогично, преобразуя производные составляющих A^y, A^z, получаем, что приравнивание нулю дивергенции вектора магнитного потенциала приводит к независимым уравнениям относительно каждой составляющей, а именно:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial x}A^x + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial y}A^x + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial z}A^x = -\delta^x, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial x}A^y + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial y}A^y + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial z}A^y = -\delta^y, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial x}A^z + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial y}A^z + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial z}A^z = -\delta^z. \end{cases} \qquad (3)$$

Заметим, что каждое из трех уравнений системы (1) явно зависит от всех трех составляющих A^x, A^y, A^z, в то время как три уравнения системы (3) связаны неявно посредством функции магнитной проницаемости. Это дает возможность распараллеливания процесса решения системы (3) по трем независимым уравнениям относительно составляющих вектора магнитного потенциала.

Прямое решение системы (3) затруднительно из-за нелинейности задачи: величина магнитной проницаемости зависит от потенциала и тоже является неизвестной. В методе конечных элементов задача нахождения решения системы (3) заменяется вариационной, т.е. рассматривается некий функционал, минимум которого достигается точным решением уравнений (3). Затем с помощью метода базисных функций можно получить расчетные уравнения для минимизации функционала.

Дискретизируем задачу, разбив рассматриваемую область Ω на тетраэдры (элементы) и приняв, что внутри элемента e магнитная проницаемость μ постоянна, а потенциалы являются линейной функцией вида

$$A^x = \sum_{t \in W_c} A_t^x b_t^c(x,y,z), \quad A^y = \sum_{t \in W_c} A_t^y b_t^c(x,y,z), \quad A^z = \sum_{t \in W_c} A_t^z b_t^c(x,y,z), \qquad (4)$$

где $\mathrm{W_e} = (\mathrm{i,j,k,m})$ - множество вершин элемента e; $\mathrm{A_t}$ - значение потенциала A в узле t; $\mathrm{b_t^e}(\mathrm{x,y,z})$ - базисная линейная функция, равная единице в узле t и нулю в остальных трех вершинах тетраэдра e.

Базисные функции удобно записать в виде детерминанта

$$b_k^c(x,y,z) = \frac{1}{6V_c}\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_j & y_j & z_j & 1 \\ x_i & y_i & z_i & 1 \\ x_m & y_m & z_m & 1 \end{vmatrix},$$

где (x_t, y_t, z_t) - декартовы координаты вершин тетраэдра, $\mathrm{t} = (\mathrm{i,j,k,m})$; $\mathrm{V_e}$ - объем тетраэдра e:

$$6V_c = \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \\ x_j & y_j & z_j & 1 \\ x_k & y_k & z_k & 1 \\ x_m & y_m & z_m & 1 \end{vmatrix}.$$

Отметим важную особенность трехмерного метода конечных элементов: для всех трех составляющих вектора магнитного потенциала в (4) используются одни и те же базисные функции.

После построения тетраэдрической сетки [8] получающуюся систему линейных уравнений можно решать параллельно на трех процессорах относительно каждой составляющей. Так как магнитная проницаемость μ зависит от вектора индукции магнитного поля, а последний зависит от всех трех составляющих вектора магнитного потенциала, то при параллельном решении приходится обеспечивать межпроцессорный обмен значениями магнитной проницаемости μ.

В методе конечных элементов задача решения системы дифференциальных уравнений (3) сводится к решению системы линейных уравнений с матрицей ленточного типа. Оценим, как уменьшаются размеры соответствующих матриц и их лент ненулевых элементов при параллельном решении на трех процессорах.

Из-за независимости уравнений в системе (3) появляется возможность их параллельного решения на трех процессорах, что приводит к уменьшению втрое количества неизвестных в каждом процессоре.

Пусть исследуемая область представляет собой куб, имеющий по n узлов дискретизации в длину, ширину и глубину. Каждому узлу соответствуют три неизвестных значения составляющих вектора магнитного потенциала в данном узле. Таким образом, количество неизвестных (и количество уравнений) в системе линейных уравнений будет равно $3n^3$. Соответствующая матрица имеет размер $3n^3 \times 3n^3$, а ширина ее ленты равна $6n$. При параллельном решении на трех процессорах матрица системы линейных уравнений будет иметь размер $n^3 \times n^3$, а ширина ее ленты будет равна $2n$.

Уменьшение размеров матриц не только ускоряет время счета, но и существенно улучшает точность приближенного решения, что приводит к уменьшению числа необходимых итераций. Уменьшение размеров матриц также благотворно влияет на невязку, возникающую при пересчете значений магнитной проницаемости μ.

Заключение. Кулоновская калибровка, которая требует принудительного приравнивания нулю дивергенции вектора магнитного потенциала, приводит к независимым уравнениям относительно каждой составляющей. Это дает возможность распараллеливания процесса решения полевых задач методом конечных элементов по трем составляющим вектора магнитного потенциала при обеспечении межпроцессорного обмена значениями магнитной проницаемости μ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Новик Я.А.** Вариационная формулировка решения задачи расчета трехмерного стационарного магнитного поля с учетом нелинейных свойств среды // Изв. АН ЛатвССР. Сер. Физ. и техн. наук.- 1974. - № 4.- С.79-89.
2. **Арфкен Г.** Математические методы в физике. - М.: Атомиздат, 1970. - 712 с.
3. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров: -М.: Наука, 1973. - 831 с.
4. **Нейман Л.Р., Калантаров П.Л.** Теоретические основы электротехники. Т.3. – М.: Госэнергоиздат, 1959. - 231 с.
5. **Макаров А.М. Лунева Л.А.** Основы электромагнетизма. Т.3: Электронный учебник. – М.: Изд-во МГТУ им Н.Э. Баумана, 2002.
6. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. – 616 с.
7. **Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Акопян А.Э.** О свойствах векторных характеристик при конечно-элементном моделировании трехмерного магнитного поля // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. – 2012.-Т. 65, № 4.- С. 406-414.
8. **Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Акопян А.Э. Геворгян А.А.** К построению оптимальной расчетной сетки для решения полевых задач методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2010. - Т. 63, № 3.- С. 319-327.

ГИУА (ПОЛИТЕХНИК). Материал поступил в редакцию 10.04.2013.

ՀԱ. ԹԵՐԶՅԱՆ, Հ.Ս. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ, Ա.Է. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Ա.Ա. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ԵՌԱՉԱՓ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՏԱՐՐԱՅԻՆ ՄՈԴԵԼԱՎՈՐՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՊՈՏԵՆՑԻԱԼԻ ՎԵԿՏՈՐԻ ԴԻՎԵՐԳԵՆՑԻԱՅԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Հետազոտվել են եռաչափ էլեկտրամագնիսական դաշտի վեկտորական մագնիսական պոտենցիալի դիվերգենցիայի հատկությունները: Ապացուցված է, որ պոտենցիալի դիվերգենցիայի հավասարեցումը զրոյի հանգեցնում է անկախ հավասարումների՝ ըստ ամեն մի բաղադրիչի: Ցույց է տված վերջավոր տարրերի մեթոդով դաշտային խնդիրների լուծման ընթացքի զուգահեռացման հնարավորությունը՝ ըստ վեկտորական մագնիսական պոտենցիալի երեք բաղադրիչների:

Առանցքային բառեր. էլեկտրամագնիսական դաշտ, վեկտորական մագնիսական պոտենցիալի դիվերգենցիա, լուծման զուգահեռացում:

H.A. TERZYAN, H.S. SUKIASYAN, A.E. HAKOBYAN, A.A. GEVORGYAN

ON PROPERTIES OF DIVERGENCE OF MAGNETIC POTENTIAL VECTOR BY THREE DIMENSIONAL FINITE ELEMENTARY MODELING OF NON LINEAR MAGNETIC FIELD

The properties of divergence of vector magnetic potential of three dimensional magnetic fields are investigated. It is proved that the vanishing of potential divergence reduces to independent equations with respect to each component. The possibility of parallelization of the solution process for field problems by the finite element method by all components of vector magnetic potential is shown.

Keyworkds: electromagnetic field, divergence of vector magnetic potential, parallelizetion of solution.