

М.К. БАГДАСАРЯН, С.С. АЛАВЕРДЯН

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ
ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МЕЛЬНИЦА-ДВИГАТЕЛЬ**

Предложена математическая модель для исследования электромеханической системы мельница-двигатель, позволяющая путем определения изменения углов поворота, скорости и ускорения венцевой шестерни, смонтированной на корпус барабана, и подшипниковой шестерни, соединенной с валом двигателя, обнаружить возможные изменения состояния механических передач и приводного двигателя.

Ключевые слова: электромеханическая система, математическая модель, приводной двигатель, тригонометрическая коллокация.

Для обнаружения изменений состояния электромеханической системы мельница-двигатель задолго до наступления аварийной ситуации особое место занимает техническая диагностика.

На характер динамических процессов в электромеханической системе рудоразмольной мельницы оказывают влияние многие факторы: конструктивные параметры упругих звеньев (массы или моменты инерции масс, жесткости связей), законы изменения внешних возмущений, характеристики и параметры двигателя, особенности приводных линий [1-3].

Дефекты узлов электромеханической системы, представляющие опасность и ограничивающие сроки эксплуатации системы, возникают на этапах их изготовления, сборки и монтажа, а также в процессе эксплуатации машины. Все дефекты, возникающие при нормальной работе системы, обнаруживаются задолго до появления аварийной ситуации, а многие – на этапе зарождения.

Учитывая, что на ранних стадиях самые опасные дефекты обнаруживаются на узлах подшипника и механических передач, возникает необходимость разработки научно-технических решений по обнаружению дефектов механических передач.

Целью настоящей работы является разработка математической модели для исследования и обнаружения изменений состояния механических передач и приводного двигателя. Для решения поставленной цели при разработке модели за основу был принят тот факт, что изменение состояния механических передач и приводного двигателя приводит к изменению во времени углов поворота, скорости и ускорения венцевой шестерни, смонтированной на корпус барабана, а также подшипниковой шестерни, соединенной с валом двигателя.

Для отыскания гармонических колебаний, возникающих в электромеханической системе рудоразмольной мельницы, рассматриваются дифференциальные уравнения, описывающие динамику системы [4]:

$$\begin{cases} J_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} - c(\varphi_2 - \varphi_1) = -M_M, \\ J_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + c(\varphi_2 - \varphi_1) = M, \end{cases} \quad (1)$$

где $M_M = m_o - m_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + m_2 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2}$, $M = M_o - \beta \frac{d\varphi_2}{dt}$.

Здесь c – жесткость связи между барабаном мельницы и электродвигателем; φ_1 – угол поворота венцевой шестерни, смонтированной на корпус барабана; φ_2 – угол поворота подшипниковой шестерни, соединенной с валом двигателя; J_1, J_2 – моменты инерции барабана рудоразмольной мельницы и ротора двигателя; M_M – момент сопротивления мельницы; m_o, m_1, m_2 – коэффициенты; β – модуль жесткости механической характеристики двигателя.

С учетом уравнения моментов сопротивления M_M и двигателя M уравнение (1) можно представить в виде

$$\begin{cases} \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} \left(1 + \frac{m_2}{J_1} \right) = \frac{c}{J_1} (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{m_o}{J_1} + \frac{m_1}{J_1} \frac{d\varphi_1}{dt}, \\ \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = -\frac{c}{J_2} (\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{M_o}{J_2} - \frac{\beta}{J_2} \frac{d\varphi_2}{dt}. \end{cases} \quad (2)$$

Для определения периодических решений системы нелинейных дифференциальных уравнений (2) использован метод коллокации [5].

Приближенное периодическое решение (2) представим в виде тригонометрического полинома:

$$\begin{cases} \varphi_{1m} = a_0 + \sum_{j=1}^m (a_j \cos j\omega t + b_j \sin j\omega t), \\ \varphi_{2m} = A_0 + \sum_{j=1}^m (A_j \cos j\omega t + B_j \sin j\omega t), \end{cases} \quad (3)$$

где $\omega = 2\pi/T$, $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$, $b_j = (b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jn})$, $A_j = (A_{j1}, A_{j2}, \dots, A_{jn})$, $B_j = (B_{j1}, B_{j2}, \dots, B_{jn})$, $j=1, 2, \dots, n$.

Составим из коэффициентов a_o, a_j, b_j вектор $\varphi_1^\Gamma = (a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_m, b_m)$, из коэффициентов A_o, A_j, B_j – вектор $\varphi_2^\Gamma = (A_0, A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_m, B_m)$ и назовем

их векторами коэффициентов полиномов $\varphi_{1m}(t)$ и $\varphi_{2m}(t)$. Введем в рассмотрение векторы значений полиномов системы уравнений (3) в точках $t_i = i \frac{T}{N}$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, $N = 2m+1$:

$\varphi_1^H = (\varphi_{1m}(t_0), \varphi_{1m}(t_1), \dots, \varphi_{1m}(t_{2m}))$; $\varphi_2^H = (\varphi_{2m}(t_0), \varphi_{2m}(t_1), \dots, \varphi_{2m}(t_{2m}))$ и назовем их векторами значений тригонометрических полиномов $\varphi_{1m}(t)$ и $\varphi_{2m}(t)$. При $m=1$ система уравнений (3) примет вид

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t, \\ \varphi_2(t) = A_0 + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t. \end{cases} \quad (4)$$

Неизвестные коэффициенты определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{d^2 \varphi_{1m}(t_i)}{dt^2} = f_1\left(\varphi_{1m}(t_i), \varphi_{2m}(t_i), \frac{d\varphi_{1m}(t_i)}{dt}\right), \\ \frac{d^2 \varphi_{2m}(t_i)}{dt^2} = f_2\left(\varphi_{1m}(t_i), \varphi_{2m}(t_i), \frac{d\varphi_{2m}(t_i)}{dt}\right). \end{cases} \quad (5)$$

Коэффициенты полиномов $\varphi_{1m}(t)$ и $\varphi_{2m}(t)$, а также их значения в точках коллокации связаны взаимно однозначными соответствиями. Поэтому существует невырожденное линейное преобразование, осуществляющее переход от вектора коэффициентов полиномов к вектору тригонометрических полиномов [5]:

$$\varphi_1^H = H \varphi_1^\Gamma, \quad \varphi_2^H = H \varphi_2^\Gamma, \quad \varphi_1^\Gamma = \Gamma \varphi_1^H, \quad \varphi_2^\Gamma = \Gamma \varphi_2^H.$$

Элементы матрицы $H = \{H_{pk}\}$ и $\Gamma = \{\Gamma_{pk}\}$ соответственно имеют вид

$$H_{pk} = \begin{cases} 1 & \text{при } k=1, \\ \cos\left((p-1)k \frac{\pi}{N}\right) & \text{при } k=2, 4, \dots, 2m, \\ \sin\left((p-1)k \frac{\pi}{N}\right) & \text{при } k=3, 5, \dots, 2m+1; \end{cases}$$

$$\Gamma_{pk} = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{при } p = 1, \\ \frac{2}{N} \cos\left(p(k-1)\frac{\pi}{N}\right) & \text{при } p = 2, 4, \dots, N-1, \\ \frac{2}{N} \sin\left((p-1)(k-1)\frac{\pi}{N}\right) & \text{при } p = 3, 5, \dots, N, \end{cases}$$

$$p = 1, 2, \dots, 2m+1.$$

Векторы коэффициентов производных $\frac{d\varphi_{1m}(t)}{dt}$ и $\frac{d\varphi_{2m}(t)}{dt}$ соответственно имеют вид [5]

$$\varphi_{(1)}^\Gamma = \omega(0, \beta_1, -\alpha_1, 2\beta_2, -2\alpha_2, \dots, m\beta_m, -m\alpha_m).$$

Векторы $\varphi_{1(1)}^\Gamma$ и φ_1^Γ - связаны с равенствами

$$\varphi_{1(1)}^\Gamma = d\varphi_1^\Gamma, \quad \varphi_{1(1)}^H = H\varphi_{1(1)}^\Gamma = Hd\varphi_1^\Gamma = Hd\Gamma\varphi_1^H = W^1\varphi_1^H,$$

а векторы $\varphi_{2(1)}^\Gamma$ и φ_2^Γ - с равенствами

$$\varphi_{2(1)}^\Gamma = d\varphi_2^\Gamma, \quad \varphi_{2(1)}^H = H\varphi_{2(1)}^\Gamma = Hd\varphi_2^\Gamma = Hd\Gamma\varphi_2^H = W^1\varphi_2^H,$$

где матрица d имеет вид с $\alpha_0 = 0$, $\alpha_j = 0$, $\beta_j = -\omega j$, $j = 1, 2, \dots, m$:

$$d = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ & \alpha_1\beta_1 \\ & -\beta_1\alpha_1 \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \alpha_m\beta_m \\ 0 & -\beta_m\alpha_m \end{bmatrix}.$$

$W^1 = Hd\Gamma$ является матрицей, выражающей векторы значений производных $\frac{d\varphi_{1m}(t)}{dt}$ и $\frac{d\varphi_{2m}(t)}{dt}$ через векторы значений функций $\varphi_{1m}(t)$ и $\varphi_{2m}(t)$.

Вектор значений $\varphi_{(2)}^H$ второй производной $d^2\varphi_m(t)/dt$ выражается через вектор коэффициентов φ^Γ тригонометрических полиномов $\varphi_m(t)$ равенствами $\varphi_{1(2)}^H = H\varphi_{1(2)}^\Gamma = Hd^2\varphi_1^\Gamma = \Phi^2\varphi_1^\Gamma$, $\varphi_{2(2)}^H = H\varphi_{2(2)}^\Gamma = Hd^2\varphi_2^\Gamma = \Phi^2\varphi_2^\Gamma$, а через вектор значений φ^H - равенствами

$$\begin{aligned}\varphi_{1(2)}^H &= H\varphi_{1(2)}^\Gamma = Hd^2\varphi_1^\Gamma = Hd^2\Gamma\varphi_1^H = W^2\varphi_1^H, \\ \varphi_{2(2)}^H &= H\varphi_{2(2)}^\Gamma = Hd^2\varphi_2^\Gamma = Hd^2\Gamma\varphi_2^H = W^2\varphi_2^H,\end{aligned}$$

где $\Phi^2 = Hd^2$, $W^2 = Hd^2\Gamma$.

Учитывая вид матрицы d , находим элементы матрицы $W^v = \{W_{pk}^v\}$:

$$W_{pk}^v = \begin{cases} \frac{2}{2m+1} \omega^v \sum_{s=1}^m (-1)^h s^v \cos\left((p-1)2s \frac{\pi}{2m+1} - (k-1)2s \frac{\pi}{2m+1}\right) \text{ при } v=2h, \\ \frac{2}{2m+1} \omega^v \sum_{s=1}^m (-1)^h s^v \sin\left((k-1)2s \frac{\pi}{2m+1} - (p-1)2s \frac{\pi}{2m+1}\right) \text{ при } v=2h+1. \end{cases} \quad (6)$$

Система алгебраических уравнений (5) относительно векторов значений φ_1^H и φ_2^H принимает вид

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2m+1} W_{pk}^2 \varphi_{1m}(t_i) = f_1 \left(\sum_{i=0}^{2m+1} \tau_{pk} \varphi_{1m}(t_i), \sum_{i=0}^{2m+1} \tau_{pk} \varphi_{2m}(t_i), \sum_{i=0}^{2m+1} W_{pk}^1 \varphi_{1m}(t_i) \right), \\ \sum_{i=1}^{2m+1} W_{pk}^2 \varphi_{2m}(t_i) = f_2 \left(\sum_{i=0}^{2m+1} \tau_{pk} \varphi_{1m}(t_i), \sum_{i=0}^{2m+1} \tau_{pk} \varphi_{2m}(t_i), \sum_{i=0}^{2m+1} W_{pk}^1 \varphi_{2m}(t_i) \right). \end{cases} \quad (7)$$

Элементы матрицы τ_{pk} определяются в виде

$$\tau_{pk} = \frac{2}{2m+1} \sum_{s=1}^m \cos\left[2s\pi\left(\frac{p-1}{2m+2} - \frac{k-1}{2m+1}\right)\right] + \frac{1}{2m+1},$$

где $p = 1, 2, \dots, 2m+2$, $k = 1, 2, \dots, 2m+1$.

В векторной форме система уравнений (7) имеет вид

$$\begin{cases} W^2\varphi_1^H = f(\tau\varphi_1^H, \tau\varphi_2^H, W^1\varphi_1^H), \\ W^2\varphi_2^H = f(\tau\varphi_1^H, \tau\varphi_2^H, W^1\varphi_2^H). \end{cases}$$

После определенных преобразований система уравнений (5) принимает вид

$$\begin{cases} W^2 \left(1 + \frac{m_2}{J_1} \right) \varphi_1 + \frac{c}{J_1} \tau \varphi_1 - \frac{m_1}{J_1} W^1 \varphi_1 - \frac{c}{J_1} \tau \varphi_2 = -\frac{m_0}{J_1}, \\ W^2 \varphi_2 - \frac{c}{J_2} \tau \varphi_1 + \frac{c}{J_2} \tau \varphi_2 + \frac{\beta}{J_2} W^1 \varphi_2 = \frac{M_0}{J_2}. \end{cases}$$

Используя обозначения $a = W^2 H$, $b = dH$, $d = W^1 H$, $a' = W^2 H$, $b' = dH$, $k' = W^1 H$, соответственно получим

$$\begin{aligned} \left| a \left(1 + \frac{m_2}{J_1} \right) + \frac{c}{J_1} b - \frac{m_1}{J_1} d \right| \left\| \begin{matrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{matrix} \right\| - \left| \frac{c}{J_1} b \right| \left\| \begin{matrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \end{matrix} \right\| &= \left| -\frac{m_0}{J_1} \right|, \\ \left| -\frac{c}{J_2} b' \right| \left\| \begin{matrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{matrix} \right\| + \left| a' + \frac{c}{J_2} b' + \frac{\beta}{J_2} k' \right| \left\| \begin{matrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \end{matrix} \right\| &= \left| \frac{M_0}{J_2} \right|. \end{aligned}$$

Определив коэффициенты a_o, a_1, b_1 и A_o, A_1, B_1 , из системы уравнений (4) можно определить изменения во времени углов поворота венцевой шестерни, смонтированной на корпус барабана, а также подшипниковой шестерни, соединенной с валом двигателя. Соответственно, изменения скорости и ускорения поворота венцевой шестерни барабана мельницы и подшипниковой шестерни определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{\varphi}_1(t) = a_1 \omega \sin \omega t - b_1 \omega \cos \omega t, \\ \dot{\varphi}_2(t) = A_1 \omega \sin \omega t - B_1 \omega \cos \omega t; \end{cases} \\ \begin{cases} \ddot{\varphi}_1(t) = -a_1 \omega^2 \cos \omega t - b_1 \omega^2 \sin \omega t, \\ \ddot{\varphi}_2(t) = -A_1 \omega^2 \cos \omega t - B_1 \omega^2 \sin \omega t. \end{cases} \end{aligned}$$

На основе вышеприведенной математической модели разработаны алгоритм и компьютерная программа для обнаружения состояния рабочих характеристик упругих звеньев, приводящих к нарушению нормальной работы технологического процесса измельчения руды. Приводится последовательность алгоритма:

1. Задаются габаритные размеры барабанной мельницы, угловая скорость вращения барабана, а также количественные и качественные характеристики внутримельничной нагрузки (степень заполнения мельницы, плотность измельчаемого материала, объемная масса измельчающих стальных шаров).

2. Задаются паспортные данные приводного двигателя и жесткость связи между барабаном мельницы и электродвигателем.
3. Определяются моменты инерции и сопротивления, создаваемые мельницей, а также коэффициенты тригонометрического полинома.
4. Определяются углы поворота, скорости и ускорения венцевой шестерни, смонтированной на корпус барабана, и подшипниковой шестерни.

На основе описанного алгоритма разработан пакет программ, содержащий диалоговый сервис, рассчитанный на пользователей, не имеющих специальной подготовки программиста. Программы, обслуживающие модули, выполняют следующие функции: выбор типоразмеров используемых аппаратов, ввод в диалоговом режиме исходных данных, вывод результатов анализа в виде таблиц и графических изображений.

Применение разработанной модели и компьютерной программы дает возможность получить полную информацию о состоянии механических передач и приводного двигателя электромеханической системы двигатель-мельница. Данную модель можно использовать при разработке систем управления и их диагностике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеев М.А., Холод Е.Л.** Управление уровнем внутримельничной загрузки барабанных мельниц с применением показателя Херста акустического сигнала // Сб. науч. тр. НГУ. – 2011. – Т 1, № 36. – С. 63–69.
2. **Багдасарян М.К., Алавердян С.С.** Модель для исследования упругого звена электромеханической системы рудоразмольной мельницы // Вестник ГИУА (Политехник). Сер. “Электротехника, энергетика”. - 2012. - Вып. 15, №1. - С. 12-18.
3. **Бабичев Д.А.** Виброактивность сил трения в цилиндрических прямозубых передачах и критерии для ее оценки // Вестник Национального технического университета “ХПИ”: Сборник научных трудов. Тематический выпуск “Проблемы механического привода”. – Харьков, 2011. - № 29. – С. 3-11.
4. **Багдасарян М.К.** Система управления процессом измельчения минерального сырья. - LAP Lambert Academic Publishing, 2012. – 184 с.
5. **Самойленко А.М.** Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

ГИУА (ПОЛИТЕХНИК). Материал поступил в редакцию 11.02.2013.

Մ.Ք. ԲԱԴԴԱՍԱՐՅԱՆ, Ս.Ս. ԱԼԱՎԵՐԴՅԱՆ

ԱՂԱՑ-ՇԱՐԺԻՉ ԷԼԵԿՏՐԱՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՀԵՏԱԶՈՏՄԱՆ
ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼ

Առաջարկվում է աղաց-շարժիչ էլեկտրամեխանիկական համակարգի հետազոտման մաթեմատիկական մոդել, որը թույլ է տալիս աղացի թմբուկի իրանին ամրակցված պսակալին ժանանիվի և շարժիչի լիսեռին միացված առանքակալային ժանանիվի շրջանցման անկյան, արագության և արագացման փոփոխությունների որոշմամբ հայտնաբերել մեխանիկական փոխանցումների և բանեցման շարժիչի վիճակի հնարավոր փոփոխությունները:

Առանցքային բառեր. էլեկտրամեխանիկական համակարգ, մաթեմատիկական մոդել, բանեցման շարժիչ, եռանկյունաչափական կոլոկացիա:

M.K. BAGHDASARYAN, S.S. ALAVERDYAN

A MATHEMATICAL MODEL FOR INVESTIGATING THE
ELECTROMECHANICAL SISTEM MILL-MOTOR

A mathematical model for investigating the electromechanical system mill-motor is proposed allowing to discover the possible changes in the state of the mechanical transmissions and the drive motor by means of defining the changes in the turning angle, the speed and acceleration of the crown gear mounted on the drum frame and the bearing gear joined with the motor shaft.

Keywords: electromechanical system, mathematical model, drive motor, trigonometrical collocation.