

А.А. ТЕРЗЯН, Г.С. СУКИАСЯН, А.А. ГЕВОРГЯН

РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Рассмотрены параллельные алгоритмы решения нелинейной задачи электромагнитного поля методом конечных элементов. Показано, что декомпозиция с перекрытием требует меньшего числа итераций и меньшего расчетного времени, чем декомпозиция без перекрытия. Предложена формула для нахождения предпочтительного числа процессоров.

Ключевые слова: электромагнитное поле, сеточные задачи, параллельные алгоритмы.

Введение. Развитие многопроцессорных вычислительных систем открыло новые возможности для повышения эффективности вычислительного процесса. Распределенные вычислительные среды являются наилучшим вариантом для решения сеточных задач. Проблема распараллеливания сеточных алгоритмов сегодня является объектом интенсивных исследований [1,2].

Распараллеливание сеточных задач обычно осуществляется путем декомпозиции исходной исследуемой области на параллельные блоки (подобласти). В вычислительной практике используются два вида декомпозиций – декомпозиция без перекрытий и декомпозиция с теньевыми гранями (перекрытием). Декомпозициям с перекрытием посвящен ряд работ (см. [3,4]), декомпозиции без перекрытия изучены слабее.

В настоящей работе рассматриваются параллельные алгоритмы решения нелинейной задачи электромагнитного поля методом конечных элементов с разбиением на параллельные подобласти без перекрытия. Проведен сопоставительный анализ декомпозиций с перекрытием и без перекрытия.

Исследована также задача выбора числа процессоров. Предложена формула для нахождения предпочтительного числа процессоров в зависимости от конфигурации сетки и параметров многопроцессорной вычислительной системы.

Описание задачи. На рис. 1 представлена исследуемая область модельной задачи. На этом рисунке показано электромагнитное устройство с ферромагнитными участками А и В, разделенными воздушным зазором С. Устройство содержит обмотку D, обтекаемую током с синусоидальным распределением вдоль зазора. Для определения электромагнитного поля в устройстве краевую задачу необходимо решить с нулевыми граничными условиями на бесконечности. Однако, учитывая, что поле вне устройства достаточно быстро затухает, ограничимся рассмотрением конечной области [5-7] воздушного пространства, окружающего устройство, приняв на границе нулевые значения потенциалов (рис. 2).

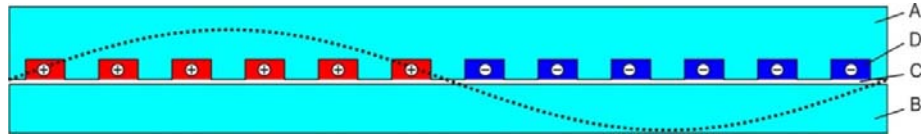


Рис. 1

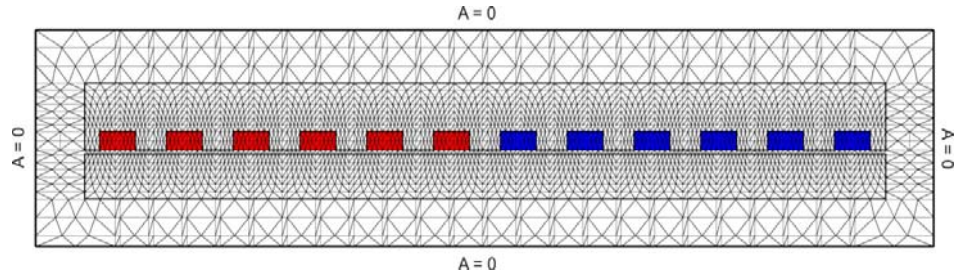


Рис. 2

Постоянное магнитное поле, созданное электрическим током, описывается уравнением Максвелла:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) = \delta,$$

где A - векторный магнитный потенциал; δ - плотность тока; ν - величина, обратная магнитной проницаемости.

Численный расчет двумерного магнитного поля методом конечных элементов для треугольной сетки сводится к решению системы уравнений

$$\sum_e \left(\nu_e \sum_{i=1}^3 A_i \beta_{ij}^e - \frac{\delta_e \Delta_e}{3} \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

где ν_e - значение ν внутри элемента e ; A_i - значение потенциала A в узле i ; β_{ij}^e - коэффициент взаимодействия вершин i и j в элементе e ; δ_e - значение δ внутри e ; Δ_e - площадь треугольника e ; N - число некраевых узлов. В (1) внешнее суммирование осуществляется по всем элементам e , содержащим узел, а внутреннее суммирование - по всем узлам i , имеющимся в треугольнике e .

Отметим, что в краевых задачах численный расчет по формуле (1) ведется только для внутренних узлов сетки, в краевых узлах значение потенциала A предполагается известным.

Учитывая, что для каждого узла j в уравнении (1) принимают участие только непосредственные соседи узла j , получаем систему уравнений с неиз-

вестными A_j , причем количество уравнений равно количеству неизвестных. Таким образом, вариационная постановка краевой задачи после ее аппроксимации сеточным методом конечных элементов приводит к алгебраической системе с ленточной матрицей высокого порядка.

Декомпозиция с перекрытием. Зона перекрытия двух соседних подобластей состоит из двух слоев узлов: теневой границы и явной границы. При этом теневая граница одной подобласти является явной границей (краем) соседней подобласти и наоборот. Так, например, на рис. 3а в процессоре N пунктир является теневой границей, а в процессоре N+1 сплошные линии являются теневыми границами, а пунктирные линии – наоборот, краевыми границами. Для каждой подобласти на отдельном процессоре решается краевая задача. При этом узлы из теневой границы считаются внутренними, и для них ведется численный расчет по формуле (1), а в краевых узлах значение потенциала A не меняется.

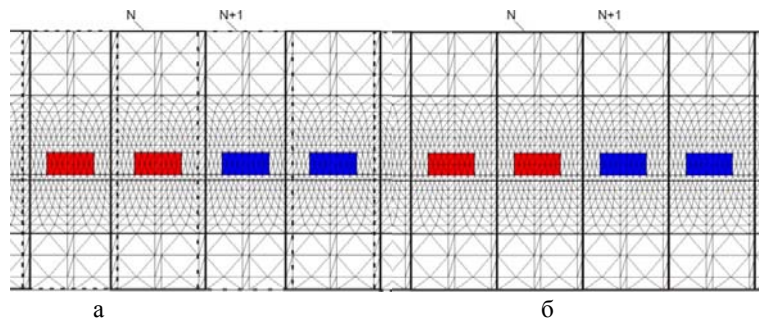


Рис. 3. Декомпозиция: а - с перекрытием, б - без перекрытия

После нескольких итераций работа процессоров приостанавливается и происходит межпроцессорный обмен граничными значениями.

Декомпозиция без перекрытия. Зона пересечения двух соседних подобластей состоит из одного слоя граничных узлов (см. рис. 3б). Эти узлы являются краевыми для обеих подобластей. Для каждой подобласти на отдельном процессоре решается краевая задача. При этом в граничных узлах численный расчет по формуле (1) не ведется, и значения потенциала A не меняются.

После нескольких итераций работа процессоров приостанавливается и происходит перерасчет значений потенциала A в граничных узлах соседних подобластей. Затем происходит межпроцессорный обмен этих граничных значений.

Выбор числа процессоров. Имеется класс алгоритмов (например, метод наилучшей выборки в задачах принятия решения), для которых распараллеливание тем эффективнее, чем больше число используемых процессоров, т.е. оптимальное число процессоров бесконечно. В сеточных задачах количество процессоров заведомо ограничено, оно не может быть больше числа сеточных узлов. Сле-

довательно, становится актуальным выбор оптимального числа используемых процессоров.

Предположим, что исследуемая область есть прямоугольник, имеющий m узлов в длину и n узлов в ширину. Разделим область на подобласти h горизонтальными и v вертикальными линиями. Получим $(h+1)(v+1)$ подобластей, имеющи-

х $\frac{mn}{(h+1)(v+1)}$ узлов. Число теневых граничных узлов, используемых для межпроцессорного обмена, равно $(m-2)v + (n-2)h$. Обозначим через t_p удельное время решения сеточной задачи, приходящееся на один внутренний узел, через t_o - удельное время межпроцессорного обмена, приходящееся на один граничный узел. Наша цель – выбрать числа h и v (при заданных m , n , t_p и t_o) таким образом, чтобы было минимальным общее время работы:

$$T = t_p \frac{mn}{(h+1)(v+1)} + t_o [(m-2)v + (n-2)h].$$

Для этого приравняем нулю производные по h и v :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial h} &= -t_p \frac{mn}{(h+1)^2(v+1)} + t_o(n-2) = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial v} &= -t_p \frac{mn}{(h+1)(v+1)^2} + t_o(m-2) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Отсюда получаем

$$t_p \frac{mn}{(h+1)(v+1)} = t_o(n-2)(h+1) = t_o(m-2)(v+1). \quad (3)$$

Решая систему уравнений (2), можно найти числа h и v , которые дают предпочтительное число процессоров $(h+1)(v+1)$. Заметим, что из (3) вытекает важное правило: следует так разделить исследуемую область на подобласти, чтобы в подобластях количества узлов в длину и ширину по возможности были близки. Это получается и из известного геометрического принципа: среди прямоугольников фиксированной площади наименьший периметр имеет квадрат.

Численные результаты. На рис. 4–6 представлены различные декомпозиции (без перекрытия) исходной задачи, требующие соответственно 6, 36 и 48 параллельных процессоров (ядер). Для вышеуказанной модельной задачи найдено распределение магнитного поля методом конечных элементов с разбиением на параллельные подобласти с перекрытием и без перекрытия.

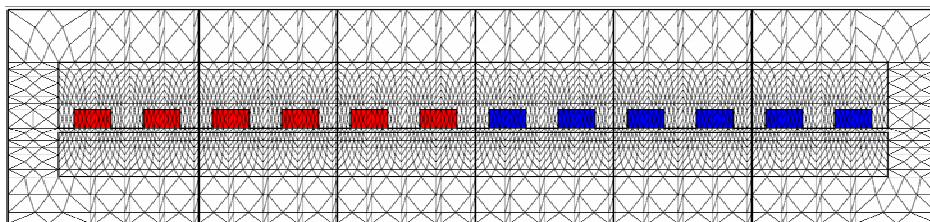


Рис. 4

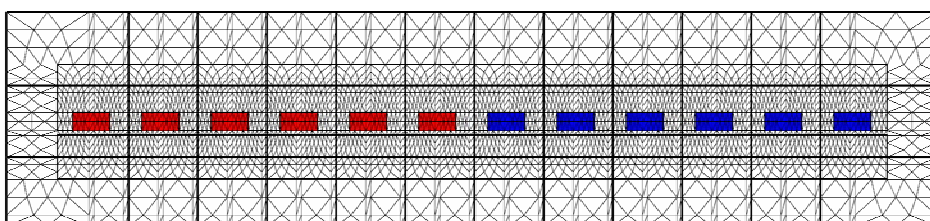


Рис. 5

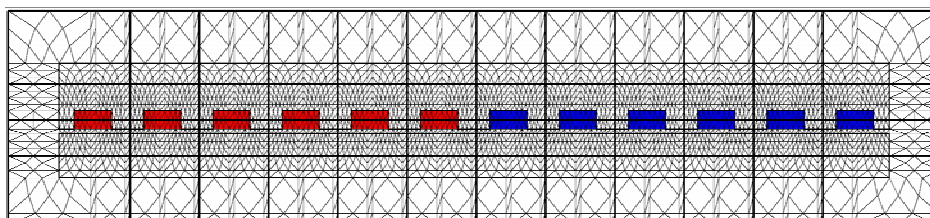


Рис. 6

На рис. 7 и 8 показаны зависимости соответственно времени расчета и числа итераций, необходимых для достижения заданного уровня невязки, от числа процессоров.

На рис. 9 представлено полученное распределение магнитного поля в исследуемой среде.

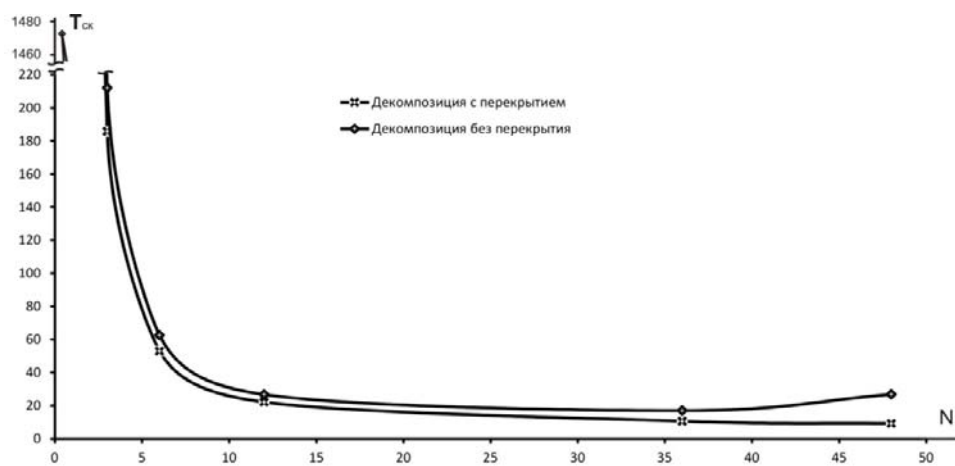


Рис. 7

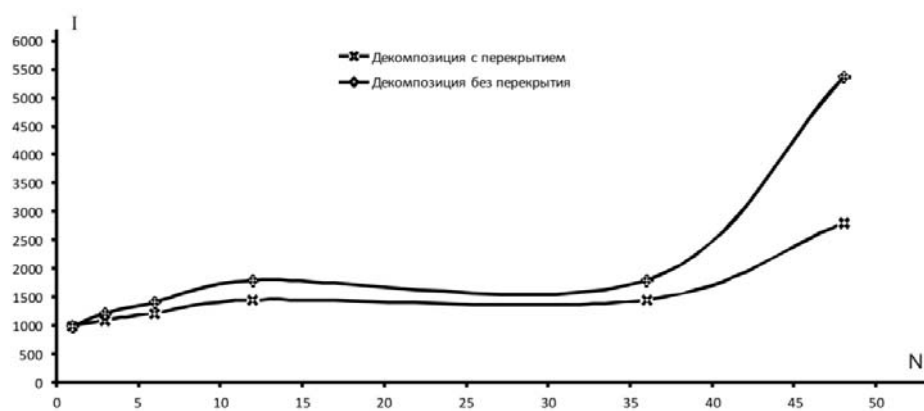


Рис. 8

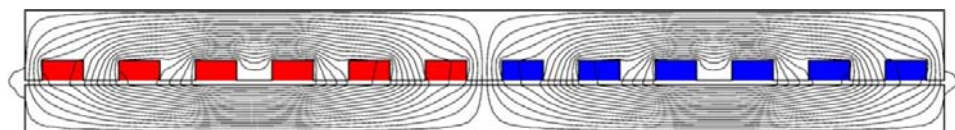


Рис. 9

Сопоставительный анализ полученных результатов показывает, что декомпозиция с перекрытием требует меньшего числа итераций, чем декомпозиция без перекрытия. Это объясняется тем, что в узлах, лежащих на теневой границе, потенциалы считаются точнее.

Из-за меньшего числа итераций при декомпозиции с перекрытием уменьшается общее время затрат на решение задачи.

По сравнению с последовательным счетом распараллеливание обоих типов приводит к резкому ускорению решения модельной задачи.

Вместе с тем анализ полученных результатов показывает, что существует предпочтительное количество процессоров, при превышении которого процесс ускорения решения сеточной задачи резко замедляется. Для рассмотренного нами случая предпочтительным числом параллельных процессоров является 36.

Заключение. В рассмотренной сеточной модельной задаче при распараллеливании решения задачи на многопроцессорной вычислительной системе кластерной архитектуры получено значительное ускорение решения по сравнению с последовательным счетом.

Сопоставительный анализ полученных результатов показал, что декомпозиция с перекрытием требует меньшего числа итераций и меньшего расчетного времени. Показано также, что существует предпочтительное количество процессоров, при превышении которого процесс ускорения решения задачи замедляется. Предложена формула для нахождения предпочтительного числа процессоров в зависимости от конфигурации сетки и параметров многопроцессорной вычислительной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильин В.П.** Структуры сеточных алгоритмов и их отображение на архитектуру МВС // Труды Всероссийской суперкомпьютерной конференции – М.: Изд-во МГУ, 2009. - С. 150-157.
2. **Ильин В.П.** Проблемы высокопроизводительных технологий решения больших разреженных СЛАУ // Вычислительные методы и программирование. - 2009. -Т.10, N 1. -С. 130-136.
3. **Терзян А.А., Сукиасян Г.С.** Параллельный алгоритм решения нелинейных полевых задач // Тезисы докл. конф. “Проблемы нелинейной электротехники”. - Киев, 1981. -С. 148-150.
4. **Терзян А.А., Геворгян А.А., Акопян А.Э., Оганнисян Л.Т.** К решению краевых задач на многопроцессорных вычислительных системах // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2011. – Т. 64, N 3 - С. 305-311.
5. **Терзян А.А.** Автоматизированное проектирование электрических машин. - М.: Энергоатомиздат, 1983. - 256 с.
6. **Terzyan H.** Simulation of electromechanical systems. Numerical methods and Solutions. - VDM Verlag, 2009. -280 p.
7. **Терзян А.А.** Автоматизированная система решения полевых задач в электрических машинах // Электричество. -1984. – N 10. - С. 11-17.

ГИУА (ПОЛИТЕХНИК). Материал поступил в редакцию 10.04.2012.

Հ.Ա. ԹԵՐԶՅԱՆ, Հ.Ս. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ, Ա.Ա. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ
ԲԱԶՄԱՊՐՈՑԵՍՈՐԱՅԻՆ ՀԱՇՎՈՂԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՄԻՋՈՑՈՎ ԵԶՐԱՅԻՆ
ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԶՈՒԳԱՀԵՌԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Դիտարկվել են վերջավոր տարրերի մեթոդով ոչ գծային էլեկտրամագնիսական դաշտի լուծման զուգահեռ ալգորիթմներ: Ցույց է տրված, որ ցանցի փոխձաձկումով տրոհումը պահանջում է ավելի քիչ մոտարկումներ և հաշվարկային ժամանակ, քան տրոհումը առանց փոխձաձկման: Առաջարկված է պրոցեսորների նախընտրելի քանակի որոնման բանաձև:

Առանցքային բառեր. էլեկտրամագնիսական դաշտ, ցանցային խնդիրներ, զուգահեռ ալգորիթմներ:

H.A. TERZIAN, H.S. SUKIASYAN, A.A. GEVORGYAN
BOUNDARY PROBLEM PARALLELING INTO MULTIPROCESSOR COMPUTING
SYSTEM

Paralleling algorithms for solving a nonlinear problem of the electromagnetic field by the finite-element method are considered. It is shown that the decomposition with an overlap requires less number of iterations and less designed time than decomposition without the overlap. Formulas for defining preferable number of processors are proposed.

Keywords: electromagnetic field, mesh problems, parallel algorithms.