ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2012. Т. LXV, № 1.

УДК 519.67:612-087.681

АВТОМАТИЗАЦИЯ И
СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Э.М. АЙКАЗЯН, М.З. ПОГОСЯН, Ю.М. СТАКЯН

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ МЕДИКО-БИОЛОГИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Рассматривается метод моделирования биомедицинских сигналов с применением интерполяционных кусочно-линейных полиномов степени n=11, соответствующих форме кривой электрокардиограммы (ЭКГ). Составлено уравнение полинома и представлен математический аппарат для подсчета его коэффициентов. Проведена классификация погрешностей моделирования и выполнена расчетная оценка этих погрешностей.

***Ключевые слова*: биомедицинский сигнал, электрокардиограмма, интерполяционный полином, погрешности моделирования.**

Цифровая обработка сигналов связана с задачей приближенного восстановления функций $F(t)$, заданных в табличной форме. Эффективность алгоритмов цифровой обработки сигнала зависит от правильного выбора способа интерполяции, алгоритмы которой различны. Среди них широкое распространение получили методы аппроксимации многочленами (интерполяционные формулы Ньютона, Лагранжа и др.) [1], однако возможности их применения ограничены. Это связано с тем, что с увеличением числа узлов интерполяции, во-первых, возникают вычислительные сложности и происходит быстрое накопление погрешностей округления, а во-вторых, последовательность интерполяционных многочленов для некоторых классов функций расходится.

В настоящее время при решении задач вычислительной математики и моделировании сложных медико-биологических процессов широко применяются методы интерполяции сплайнами [2]. Трудности, связанные с алгоритмами интерполяции, удается преодолеть путем специального выбора узлов интерполяции, учитывая свойства сигнала. При этом вместо построения интерполяционного многочлена высокой степени используют интерполяцию кусочными многочленами низких степеней.

Медико-биологические сигналы обладают непрерывностью и периодичностью. Учитывая эти два свойства и результаты, полученные в теории вещественных функций, можно утверждать, что количество узлов, образованных пересечением оси абсциссы t с функцией сигнала $F(t)$, должно быть четным. При построении интерполирующей функции надо учитывать узлы с их кратностью, где сигнал получает нулевые значения.

Электрокардиограмма, представленная в [3] с узлами, в табличном виде имеет вид: $(\tilde{t}_0, 0)$, $(\tilde{t}_1, h_1)$, $(\tilde{t}_2, 0)$, $(\tilde{t}_3, 0)$, $(\tilde{t}_4, -h_2)$, $(\tilde{t}_5, h_3)$, $(\tilde{t}_6, -h_4)$, $(\tilde{t}_7, 0)$, $(\tilde{t}_8, 0)$, $(\tilde{t}_9, h_5)$, $(\tilde{t}_{10}, 0)$, $(\tilde{t}_{11}, 0)$ (см. рис.).

Сердечный цикл T определяется как разность абсцисс смежных глобальных максимумов, а для представления стандартных ЭКГ: $T = \tilde{t}_{11} - \tilde{t}_0$. Указанным условиям может удовлетворять полином 11-й степени, который определен в точках $\hat{t} = \{\tilde{t}_5, \tilde{t}_6, \tilde{t}_7, \tilde{t}_8, \tilde{t}_9, \tilde{t}_{10}, \tilde{t}_{11}, \tilde{t}_1 + T, \tilde{t}_2 + T, \tilde{t}_3 + T, \tilde{t}_4 + T, \tilde{t}_5 + T\}$ и принимает следующие значения: $\hat{y} = \{h_3, -h_4, 0, 0, h_5, 0, 0, h_1, 0, 0, -h_2, h_3\}$.

За начало отсчета взята глобальная максимальная точка – зубец R, которая соответствует принятым стандартным представлениям ЭКГ. Такой подход дает возможность более простыми полиномами интерполировать биомедицинские сигналы.

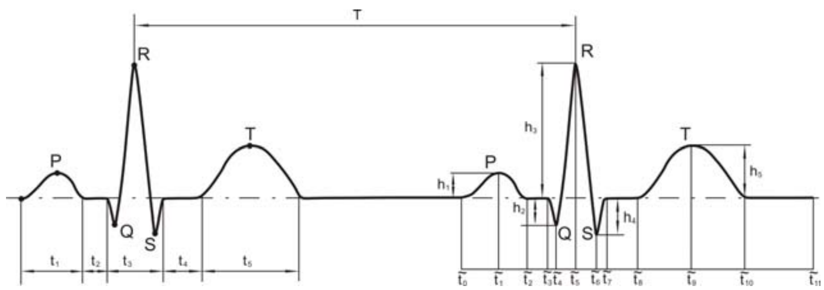

Рис. ЭКГ здорового человека (отведение I)

Учитывая узлы, где полином принимает нулевые значения, его можно представить в следующем виде:

$$P_{11}(t) = (t-\tilde{t}_7)(t-\tilde{t}_8)(t-\tilde{t}_{10})(t-\tilde{t}_{11})(t-\tilde{t}_2-T)(t-\tilde{t}_3-T)(a_6t^5+a_5t^4+a_4t^3+a_3t^2+a_2t+a_1). \quad (1)$$

Обозначим: $Q(t) = (t-\tilde{t}_7)(t-\tilde{t}_8)(t-\tilde{t}_{10})(t-\tilde{t}_{11})(t-\tilde{t}_2-T)(t-\tilde{t}_3-T)$.

Коэффициенты $a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1$ определяются из следующей системы линейных уравнений:

$$
\begin{cases}
a_6\tilde t_5^5 + a_5\tilde t_5^4 + a_4\tilde t_5^3 + a_3\tilde t_5^2 + a_2\tilde t_5 + a_1 = h_3/Q(\tilde t_5),\\
a_6\tilde t_6^5 + a_5\tilde t_6^4 + a_4\tilde t_6^3 + a_3\tilde t_6^2 + a_2\tilde t_6 + a_1 = -h_4/Q(\tilde t_6),\\
a_6\tilde t_9^5 + a_5\tilde t_9^4 + a_4\tilde t_9^3 + a_3\tilde t_9^2 + a_2\tilde t_9 + a_1 = h_5/Q(\tilde t_9),\\
a_6(\tilde t_1+T)^5 + a_5(\tilde t_1+T)^4 + a_4(\tilde t_1+T)^3 + a_3(\tilde t_1+T)^2 + a_2(\tilde t_1+T) + a_1 = h_1/Q(\tilde t_1+T),\\
a_6(\tilde t_4+T)^5 + a_5(\tilde t_4+T)^4 + a_4(\tilde t_4+T)^3 + a_3(\tilde t_4+T)^2 + a_2(\tilde t_4+T) + a_1 = -h_2/Q(\tilde t_4+T),\\
a_6(\tilde t_5+T)^5 + a_5(\tilde t_5+T)^4 + a_4(\tilde t_5+T)^3 + a_3(\tilde t_5+T)^{23} + a_2(\tilde t_5+T) + a_1 = h_3/Q(\tilde t_5+T).
\end{cases}
\tag{2}
$$

Обозначим через A главную матрицу системы уравнений (2), а через B_j – матрицу A, j-й столбец которой заменен свободными коэффициентами системы уравнений (в частности, матрица (4) представляет B_1).

Детерминант det (A)≠0, так как имеет место $0<\tilde t_5<\tilde t_6< t_9 < t_1+T<t_4+T<$ $<t_5+T$. Используя метод Гаусса [1], можно получить коэффициенты a_j (j =1,2,…,6).

$$
A=\begin{pmatrix}
\tilde t_5^5 & \tilde t_5^4 & \tilde t_5^3 & \tilde t_5^2 & \tilde t_5 & 1\\
\tilde t_6^5 & \tilde t_6^4 & \tilde t_6^3 & \tilde t_6^2 & \tilde t_6 & 1\\
\tilde t_9^5 & \tilde t_9^4 & \tilde t_9^3 & \tilde t_9^2 & \tilde t_9 & 1\\
(\tilde t_1+T)^5 & (\tilde t_1+T)^4 & (\tilde t_1+T)^3 & (\tilde t_1+T)^2 & (\tilde t_1+T) & 1\\
(\tilde t_4+T)^5 & (\tilde t_4+T)^4 & (\tilde t_4+T)^3 & (\tilde t_4+T)^3 & (\tilde t_4+T) & 1\\
(\tilde t_5+T)^5 & (\tilde t_5+T)^4 & (\tilde t_5+T)^3 & (\tilde t_5+T)^3 & (\tilde t_5+T) & 1
\end{pmatrix},
\tag{3}
$$

$$
B_1=\begin{pmatrix}
+h_3/Q(\tilde t_5) & \tilde t_5^4 & \tilde t_5^3 & \tilde t_5^2 & \tilde t_5 & 1\\
-h_4/Q(\tilde t_6) & \tilde t_6^4 & \tilde t_6^3 & \tilde t_6^2 & \tilde t_6 & 1\\
+h_5/Q(\tilde t_9) & \tilde t_9^4 & \tilde t_9^3 & \tilde t_9^2 & \tilde t_9 & 1\\
+h_1/Q(\tilde t_1+T) & (\tilde t_1+T)^4 & (\tilde t_1+T)^3 & (\tilde t_1+T)^2 & (\tilde t_1+T) & 1\\
-h_2/Q(\tilde t_4+T) & (\tilde t_4+T)^4 & (\tilde t_4+T)^3 & (\tilde t_4+T)^2 & (\tilde t_4+T) & 1\\
+h_3/Q(\tilde t_5+T) & (\tilde t_5+T)^4 & (\tilde t_5+T)^3 & (\tilde t_5+T)^2 & (\tilde t_5+T) & 1
\end{pmatrix}.
\tag{4}
$$

В процессах интерполяционного представления и соответствующих вычислений возникают следующие типы погрешностей:

1) погрешность метода;
2) неустранимая погрешность;
3) погрешность округления.

1. В предположении достаточной гладкости функции *F*(*t*) имеют место оценки

$$\left| F(t)\text{-}P_{11}(t) \right| \le \frac{M}{12!} \left| (t\text{-}\tilde{t}_0)(t\text{-}\tilde{t}_1)\ldots(t\text{-}\tilde{t}_{11}) \right|, \tag{5}$$

где $M=\sup\limits_{[\tilde{t}_5,\tilde{t}_5+T]}\left|F^{(12)}(t)\right|$.

Выражение (5) может служить граничной оценкой F(t) от $P_{11}(t)$ при наличии производной [1].

2. При изучении неустранимой погрешности будем предполагать, что значения оценкой $F(\tilde{t}_j)$ приближенные, а значения $\tilde{t}_j$ точные.

Среди алгебраических многочленов не выше 11-й степени существует единственный интерполяционный многочлен $\varphi(t)$, который может быть записан в форме

$$\phi(t)=\sum_{j=0}^{11} F(\tilde{t}_k)\varphi_j(t), \tag{6}$$

где $\phi_j(t)$ – многочлен степени 11, удовлетворяющий условиям

$$\phi_j(t_i)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad i\ne j, \\ 1 & \text{при} \quad i=j. \end{cases}$$

Формулу полинома представим в виде

$$P_{(11)}(t)=\sum_{j=0}^{11} F(\tilde{t}_j)\varphi_j(t). \tag{7}$$

Тогда абсолютная погрешность будет

$$\alpha_p=\sum_{j=0}^{11}\varphi_j(t)\alpha_{F(\tilde{t}_j)}, \tag{8}$$

а предельная абсолютная погрешность –

$$A_p=\sum_{j=0}^{11}\left| \phi_j(t) \right| A_{F(\tilde{t}_j)}. \tag{9}$$

Пусть все значения функции F(t) известны с одинаковой точностью, и предельная абсолютная погрешность каждого из них равна 0,5p (0<p≤1). Тогда предельная абсолютная погрешность будет равна 6*p*.

Анализ величин предельной абсолютной погрешности показывает, что неустранимая погрешность интерполяционной формулы при изменениях на отрезке [0,T] сравнительно невелика. Она возрастает при увеличении количества узлов интерполяции, но в нашем случае этого не происходит.

3. Ошибки округления целиком определяются программой вычисления и средой программирования. Современные методы вычисления и среды программирования обеспечивают разумные пределы точности округления.

Введем в рассмотрение функцию

$$E_{11}(t)=\begin{cases} P_{11}(t+T), & t\in[\tilde{t}_0,\tilde{t}_5], \\ P_{11}(t), & t\in[\tilde{t}_5,\tilde{t}_{10}], \\ 0, & t\in[\tilde{t}_{10},\tilde{t}_{11}]. \end{cases} \tag{10}$$

Тем самым получим искомое представление ЭКГ, состоящее из трех частей. Кусочно-полиномиальная функция $E_{11}(t)$ в узлах $(\tilde{t}_0, 0)$, $(\tilde{t}_1, h_1)$, $(\tilde{t}_2, 0)$, $(\tilde{t}_3, 0)$, $(\tilde{t}_4, -h_2)$, $(\tilde{t}_5, h_3)$, $(\tilde{t}_6, -h_4)$, $(\tilde{t}_7, 0)$, $(\tilde{t}_8, 0)$, $(\tilde{t}_9, h_5)$, $(\tilde{t}_{10}, 0)$, $(\tilde{t}_{11}, 0)$ совпадает с заданной табличной функцией F(t), однако она будет отлична от нее в остальных точках.

Предложенный метод позволяет интерполировать биомедицинские сигналы, и только в точке R не обеспечивается непрерывность производной первого порядка. Для тех периодических сигналов, у которых несколько точек, где нет необходимости иметь непрерывную производную первого порядка, можно использовать предложенный метод, раздробляя область определения на интервалы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Հակոբյան Յու.** Թվային մեթոդներ. մաս 1.-Երևան: Հանրագիտարան “Արմենիկա”, 2003. – 222 էջ:
2. **Стакян Ю.М., Айказян Э.М., Погосян М.З., Фатян Р.Э.** Автоматизация расчетных процедур в биомедицинских исследованиях //Изв. НАН РА и ГИУА(П). Сер. ТН.-2009.- Т.62, № 3. – С. 344-350.
3. **Стакян Ю.М., Айказян Э.М., Погосян М.З., Фатян Р.Э.** Об одном подходе к распознаванию электрокардиограмм //Вест. Инж. акад. Армении (ВИАА).-2009.- Т.6, № 4.– С. 601-615.

ЕФ РГУТиС. Материал поступил в редакцию 28.06.2011.

Է.Մ. ՀԱՅԿԱԶՅԱՆ, Մ.Զ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ, Յու.Մ. ՍՏԱԿՅԱՆ

ԿԵՆՍԱԲԺՇԿԱԿԱՆ ԱԶԴԱՆՇԱՆՆԵՐԻ ԿՏՈՐ ԱՌ ԿՏՈՐ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԱՅԻՆ ՄԻՋԱՐԿՄԱՆ ՄԻ ՄՈՏԵՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Դիտարկվում է կենսաբժշկական ազդանշանների մոդելավորման մեթոդ՝ կիրառելով n=11 աստիճանի միջարկային կտոր առ կտոր բազմանդամներ, որոնք համապատասխանում են էլեկտրաասրտագրի կորի ձևին: Կազմված է բազմանդամի հավասարումը, և տրված է մաթապարատ՝ նրա գործակիցների հաշվարկի համար: Կատարված է մոդելավորման սխալանքների դասակարգում, և տրված է այդ սխալանքների հաշվարկային գնահատականը:

Առանցքային բառեր. կենսաբժշկական ազդանշաններ, էլեկտրաասրտագիր, միջարկա-յին բազմանդամ, մոդելավորման սխալանք:

E.M. HAYKAZYAN, M.Z. POGHOSYAN, Yu.M. STAKYAN

ON ONE APPROACH TO PIECE-POLYNOMIAL INTERPOLATION OF MEDICAL-BIOLOGICAL SIGNALS

The method of simulating biomedical signals using interpolation piece-linear polynomials of n-II degree corresponding to the curve form electrocardiogram (ECG) is discussed. The polynomial equation is programmed and the mathematical apparatus for counting its coefficients is presented. The classification of simulation errors is preformed and the planned estimation of these errors is performed.

***Keywords*:** biomedical signal, electrocardiogram, interpolation, polynomial, simulateion error.