ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2012. Т. LXV, № 1.

УДК 621-52+511.92

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

А.Г. АВЕТИСЯН, В.Р. АВИНЯН

# МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБРАТНЫХ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ, ОСНОВАННЫЙ НА СИМПЛЕКС-ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ И МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

Предлагается метод определения обратных многопараметрических матриц на основе многомерных дифференциальных преобразований Г.Е. Пухова и симплекс-преобразований. Рассмотрен модельный пример.

***Ключевые слова:*** многопараметрическая матрица, многомерные дифференциальные преобразования, дифференциально-падеевские (ДП-) преобразования, симплекс-преобразования.

**Введение.** В монографии [1] представлены методы определения инвариантов неавтономных однопараметрических матриц на основе одномерных дифференциальных преобразований Г.Е. Пухова [2, 3], а в работах [4,5] разработаны методы определения собственных многочленов многопараметрических матриц на основе многомерных дифференциальных преобразований [2]. Для вычисления обратной неавтономной (однопараметрической) матрицы в [6] был предложен метод, основанный на совместном применении однопараметрических дифференциальных преобразований и симплекс-преобразований. В данной работе рассмотрена возможность определения обратной многопараметрической матрицы $A^{-1}(t_1,t_2,...,t_N)$ матрицы $A(t_1,t_2,...,t_N)$ в предположении, что элементы $a_{ij}(t_1,t_2,...,t_N)$, $i,j=\overline{1,m}$ матрицы $A(t_1,t_2,...,t_N)$ обладают достаточной степенью гладкости по всем параметрам $t_1,t_2,...,t_N$.

Для таких матриц будем использовать многомерные дифференциальные преобразования Г.Е. Пухова [2]:

- прямое преобразование:

$$U(K_1,K_2,..,K_N)=\frac{H_1^{K_1}H_2^{K_2}\cdots H_N^{K_N}}{K_1!K_2!\cdots K_N!}\left[\frac{\partial^{K_1+K_2+\cdots+K_N}u(t_1,t_2,..,t_N)}{\partial x_1^{K_1}\partial x_2^{K_2}\cdots\partial x_N^{K_N}}\right]_{\substack{t_1=t_1^v,\\ t_2=t_2^v,\\ \cdots\\ t_n=t_N^v}};\quad(1)$$

- обратное падеевское преобразование [7]:

$$u(t_1,t_2,..t_N)=\frac{\sum\limits_{s=0}^{P}\ \sum\limits_{p_1+p_2+...+p_N=s} f_{p_1p_2...p_n} t_1^{p_1} t_2^{p_2}...t_N^{p_N}}{1+\sum\limits_{s=1}^{M}\ \sum\limits_{m_1+m_2+...+m_N=s} r_{m_1m_2...m_n} t_1^{m_1} t_2^{m_2}...t_N^{m_N}}=\frac{F(t_1,t_2,...,t_N)}{R(t_1,t_2,...,t_N)}, \qquad (2)$$

где дискретная функция $U(K_1,K_2,..,K_N)$ целочисленных аргументов $K_1,K_2,..,K_N$ образует дифференциальный спектр (изображение) оригинала $u(t_1,t_2,..,t_N)$; $F(t_1,t_2,...,t_N)$ - однородный многочлен степени $P$; $R(t_1,t_2,...,t_N)$ - однородный многочлен степени $M\,(P<M)$; $f_{p_1,p_2,...,p_N}$, $p_i=\overline{0,P}$ и $r_{m_1,m_2,...,m_N}$, $m_i=\overline{0,M}$ - коэффициенты многочленов $F(t_1,t_2,...,t_N)$ и $R(t_1,t_2,...,t_N)$ соответственно. Метод определения коэффициентов представлен в [7].

**1. Математический аппарат.** Пусть дана некоторая многопараметрическая матрица $A(t_1,t_2,...,t_N)_{nxn}$, где $t_i$, $i=\overline{1,N}$ - независимые переменные. Для обратной матрицы $A^{-1}(t_1,t_2,...,t_N)$ должны выполняться условия [8, 9]

$$A^{-1}(t_1,t_2,...,t_N)\cdot A(t_1,t_2,...,t_N)=E_{nxn},$$

$$A(t_1,t_2,...,t_N)\cdot A^{-1}(t_1,t_2,...,t_N)=E_{nxn}.$$

С правой стороны матрицы $A(t_1,t_2,...,t_N)_{nxn}$ добавим единичную матрицу следующим образом:

$$\hat{A}(t_1,t_2,...,t_N)=\left[A(t_1,t_2,...,t_N)\vdots E_{nxn}\right]. \qquad (3)$$

Представим последовательность операций, необходимых для определения обратной матрицы с использованием симплекс-преобразований [10]:

- выбираем ведущий элемент для каждой $q=i_0$ итерации:

$$\hat{a}_{i_0j_0}(t_1,t_2,...,t_N),\ \text{где}\ \left(i_0=\overline{1,n},\ j_0=i_0\right);$$

- для ведущей строки имеем

$$\hat{a}_{i_0j}^{(q)}(t_1,t_2,...,t_N)=\frac{\hat{a}_{i_0j}^{(q-1)}(t_1,t_2,...,t_N)}{\hat{a}_{i_0j_0}^{(q-1)}(t_1,t_2,...,t_N)},\ j=\overline{1,2n}, \qquad (4)$$

где $i_0$ – номер ведущей строки; $j_0$ - номер ведущего столбца, а $q=\overline{1,n}$ - номер итераций;

- остальные элементы матрицы $\hat{A}^{(q)}(t_1,t_2,...,t_N)$ определяются выражением

$$\hat{a}_{ij}^{(q)}(t_1,t_2,...,t_N)=\hat{a}_{ij}^{(q-1)}(t_1,t_2,...,t_N)-\frac{\hat{a}_{i_0j}^{(q-1)}(t_1,t_2,...,t_N)\cdot\hat{a}_{ij_0}^{(q-1)}(t_1,t_2,...,t_N)}{\hat{a}_{i_0j_0}^{(q-1)}(t_1,t_2,...,t_N)},\quad (5)$$

$$i\neq i_0,\ j=\overline{1,2n}.$$

При $q=n$ из (3) имеем

$$\hat{A}^{(n)}(t_1,t_2,...,t_N)=\left[\,E_{nxn}\,\vdots\,A^{-1}(t_1,t_2,...,t_N)\right].\quad (6)$$

Теперь воспользуемся многомерными дифференциальными преобразованиями (1)-(2).

Учитывая (1), для матричных дискрет $\hat{A}(K_1,K_2,..,K_N)$ получим

$$\hat{A}(K_1,K_2,..,K_N)=\left[A(K_1,K_2,..,K_N)\,\vdots\,E(K_1,K_2,..,K_N)\right],\quad (7)$$

где $A(K_1,K_2,..,K_N)$ и $E(K_1,K_2,..,K_N)$ - матричные дискреты матриц $A(t_1,t_2,...,t_N)$ и $E_{nxn}$ соответственно.

Отметим, что

$$E(K_1,K_2,..,K_N)=Ъ(K_1,K_2,..,K_n)=\begin{cases}E,\ \text{если } K_i=0,\\ \{0\},\ \text{если } K_i\geq 1,\end{cases}\quad i=\overline{1,N}.\quad (8)$$

Учитывая некоторые свойства многомерных дифференциальных преобразований [2], представим изображения выражений (4)-(6):

- для (4) имеем

$$\hat{a}_{i_0j}^{(q)}(K_1,K_2,..,K_H)=$$

$$=\frac{\hat{a}_{i_0j}^{(q-1)}(K_1,K_2,..,K_H)-\sum\limits_{s=1}^{K_1,K_2,...,K_n}\sum\limits_{V_1+V_2+..+V_H=s}\hat{a}_{i_0j}^{(q)}(V_1,V_2,...,V_H)\cdot\hat{a}_{i_0j_0}^{(q-1)}(K_1-V_1,K_2-V_2,...,K_H-V_H)}{\hat{a}_{i_0j_0}^{(q-1)}(0,0,...,0)},\ j=\overline{1,2n}.\quad (9)$$

Имея в виду следующие обозначения:

$$d_{ij}^{(q-1)}(t_1,t_2,...,t_N)=\hat{a}_{i_0j}^{(q-1)}(t_1,t_2,...,t_N)\cdot\hat{a}_{ij_0}^{(q-1)}(t_1,t_2,...,t_N),\ i\neq i_0,\ j=\overline{1,2n},\ q=\overline{1,n},\quad (10)$$

$$b_{ij}^{(q-1)}(t_1,t_2,...,t_N)=\frac{d_{ij}^{(q-1)}(t_1,t_2,...,t_N)}{\hat{a}_{i_0j_0}^{(q-1)}(t_1,t_2,...,t_N)},\ i\neq i_0,\ j=\overline{1,2n},\ q=\overline{1,n},\quad (11)$$

получим

$$a_{ij}^{(q)}(t_1,t_2,...,t_N)=\hat{a}_{ij}^{(q-1)}(t_1,t_2,...,t_N)-b_{ij}^{(q-1)}(t_1,t_2,...,t_N),\ i\neq i_0,\ j=\overline{1,2n},\ q=\overline{1,n}.\quad (12)$$

В пространстве изображений для уравнений (10)-(12) соответственно имеем

$$d_{ij}^{(q-1)}(K_1,K_2,\ldots,K_N)=\sum_{s=0}^{K_1,K_2,\ldots,K_n}\sum_{V_1+V_2+\ldots+V_N=s}\hat{a}_{i_0j}^{(q-1)}(V_1,V_2,\ldots,V_N)\cdot\hat{a}_{ij_0}^{(q-1)}(K_1-V_1,K_2-V_2,\ldots,K_N-V_N),\qquad(13)$$

$$K_p=\overline{0,\infty},\ p=\overline{1,N},$$

$$b_{ij}^{(q-1)}(K_1,K_2,..,K_N)=$$

$$=\frac{d_{ij}^{(q-1)}(K_1,K_2,..,K_N)-\sum_{s=1}^{K_1,K_2,\ldots,K_n}\sum_{V_1+V_2+\ldots+V_n=s}b_{ij}^{(q-1)}(V_1,V_2,\ldots,V_N)\cdot\hat{a}_{i_0j_0}^{(q-1)}(K_1-V_1,K_2-V_2,\ldots,K_N-V_N)}{\hat{a}_{i_0j_0}^{(q-1)}(0,0,\ldots,0)},\ j=\overline{1,2n};\qquad(14)$$

- для (5) имеем

$$\hat{a}_{ij}^{(q)}(K_1,K_2,..,K_N)=\hat{a}_{ij}^{(q-1)}(K_1,K_2,..,K_N)-b_{ij}^{(q-1)}(K_1,K_2,..,K_N),\ i\neq i_0,\ j=\overline{1,2n},\ q=\overline{1,n};\qquad(15)$$

- и, наконец, для (6) имеем

$$\hat{A}^{(N)}(K_1,K_2,..,K_N)=\left[E(K_1,K_2,..,K_N)\vdots A^{(-1)}(K_1,K_2,..,K_N)\right],K_p=\overline{0,\infty},\ p=\overline{1,N},\qquad(16)$$

где $A^{(-1)}(K_1,K_2,..,K_N)$ - матричные дискреты обратной матрицы. Оригинал $A^{-1}(t_1,t_2,\ldots,t_N)$ можно восстановить с помощью соотношения (2).

**2. Модельный пример.** Пусть дана следующая многопараметрическая матрица:

$$A(t_1,t_2)=\begin{bmatrix}t_1+t_2^{\,2}+1 & t_1t_2^{\,2}-2t_1\\ 2-t_1 & 4+3t_1^{\,2}\end{bmatrix}.$$

При $t_1^{v}=t_2^{v}=0,\ H_1=H_2=1$ матричные двумерные дискреты принимают следующие значения:

$$A(0,0)=\begin{bmatrix}1&0\\2&4\end{bmatrix},\ A(1,0)=\begin{bmatrix}1&-2\\-1&0\end{bmatrix},\ A(2,0)=\begin{bmatrix}0&0\\0&3\end{bmatrix},$$

$$A(K_1,0)=\{0\},\ K_1=\overline{3,\infty};\ A(K_1,1)=\{0\},\ K_1=\overline{0,\infty},$$

$$A(0,2)=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ A(1,2)=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ A(K_1,2)=\{0\},\ K_1=\overline{2,\infty},$$

$$A(K_1,K_2)=\{0\},\ K_1=\overline{0,\infty},K_2=\overline{3,\infty}.$$

Следовательно, учитывая (7) и (8), имеем

$$\hat{A}(0,0)=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\2&4&0&1\end{bmatrix},\ \hat{A}(1,0)=\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix},\ \hat{A}(2,0)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&3&0&0\end{bmatrix},$$

$$\hat{A}(K_1,0)=\{0\},\ K_1=\overline{3,\infty}\,;\ \hat{A}(K_1,1)=\{0\},\ K_1=\overline{0,\infty}\,;$$

$$\hat{A}(0,2)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ \hat{A}(1,2)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ \hat{A}(K_1,2)=\{0\},\ K_1=\overline{2,\infty}\,;$$

$$\hat{A}(K_1,K_2)=\{0\},\ K_1=\overline{0,\infty},K_2=\overline{3,\infty}\,.$$

С учетом (9)-(16) матричные дискреты $A^{(-1)}(K_1,K_2)$, $K_1=\overline{0,6}$, $K_2=\overline{0,6}$ принимают значения, приведенные в таблице.

*Таблица*

| $K_1$ \ $K_2$ | 0 | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| | -0.5 | 0.25 | 0 | 0 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | -0.5 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 0 |
| 1 | -2 | 0.5 | 0 | 0 | 4.5 | -0.75 | 0 | 0 | -7 | 0.75 | 0 | 0 | 9.5 | -0.75 |
| | 1.25 | -0.25 | 0 | 0 | -2.5 | 0.375 | 0 | 0 | 3.75 | -0.375 | 0 | 0 | -5 | 0.375 |
| 2 | 4.5 | -1 | 0 | 0 | -15.25 | 2.75 | 0 | 0 | 32.25 | -4.625 | 0 | 0 | -55.5 | 6.5 |
| | -2.375 | 0.4375 | 0 | 0 | 8.375 | -1.5625 | 0 | 0 | -17.5 | 2.5 | 0 | 0 | 29.75 | -3.4375 |
| 3 | -9.25 | 1.875 | 0 | 0 | 43.625 | -8.1875 | 0 | 0 | -119.25 | 19.375 | 0 | 0 | 251.75 | -35.25 |
| | 4.8125 | -1 | 0 | 0 | -23.75 | 4.5 | 0 | 0 | 64.875 | -10.5625 | 0 | 0 | -136 | 18.96875 |
| 4 | 18.875 | -3.875 | 0 | 0 | -114.813 | 22.0625 | 0 | 0 | 387.5625 | -67.0625 | 0 | 0 | -976.188 | 150.8125 |
| | -9.96875 | 2.078125 | 0 | 0 | 62.03125 | -11.9063 | 0 | 0 | -210.469 | 36.5 | 0 | 0 | 528.7188 | -81.6406 |
| 5 | -38.8125 | 8.03125 | 0 | 0 | 287.6563 | -55.9844 | 0 | 0 | -1158.19 | 207.9531 | 0 | 0 | 3402.281 | -558.547 |
| | 20.51563 | -4.23438 | 0 | 0 | -154.719 | 30.13281 | 0 | 0 | 627.3281 | -112.82 | 0 | 0 | -1843.19 | 302.75 |
| 6 | 79.84375 | -16.5 | 0 | 0 | -697.453 | 136.9844 | 0 | 0 | 3265.016 | -600.711 | 0 | 0 | -10981 | 1877.578 |
| | -42.1484 | 8.699219 | 0 | 0 | 374.1172 | -73.5586 | 0 | 0 | -1764.2 | 324.9688 | 0 | 0 | 5944.531 | -1017.2 |

Используя эти матричные дискреты, восстановим оригинал $A^{-1}(t_1,t_2)$ с помощью дифференциально-падеевских преобразований (2). Получим

$$A^{-1}(t_1,t_2)=\begin{bmatrix}\dfrac{4+3t_1^{\,2}}{8t_1+3t_1^{\,3}+4t_2^{\,2}+4t_2^{\,2}t_1^{\,2}+4+t_1^{\,2}\text{-}2t_1t_2^{\,2}} & \dfrac{\text{-}t_1\left(t_2^{\,2}\text{-}2\right)}{8t_1+3t_1^{\,3}+4t_2^{\,2}+4t_2^{\,2}t_1^{\,2}+4+t_1^{\,2}\text{-}2t_1t_2^{\,2}}\\ \dfrac{-2+t_1}{8t_1+3t_1^{\,3}+4t_2^{\,2}+4t_2^{\,2}t_1^{\,2}+4+t_1^{\,2}\text{-}2t_1t_2^{\,2}} & \dfrac{t_1+t_2^{\,2}+1}{8t_1+3t_1^{\,3}+4t_2^{\,2}+4t_2^{\,2}t_1^{\,2}+4+t_1^{\,2}\text{-}2t_1t_2^{\,2}}\end{bmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что эта матрица удовлетворяет условиям вышеприведенной обратной матрицы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Симонян С.О., Аветисян А.Г.** Прикладная теория дифференциальных преобразований.- Ереван: Изд-во ГИУА “Чартарагет”, 2010.-364с.
2. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений.-Киев: Наукова думка, 1984.-420 с.
3. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные спектры и модели.-Киев: Наукова думка, 1990.-184 с.
4. **Аветисян А.Г.** Построение собственных многочленов многопараметрических матриц на основе многомерных дифференциальных преобразований //Вестник Инженерной академии Армении. – 2011.- Т.8, N.2. - С.242-247.
5. **Аветисян А.Г.** Многомерный дифференциальный аналог метода Д.К. Фаддеева // Известия ТПУ. – 2011. – Т. 319, № 5.- С. 14–18.
6. **Ավետիսյան Ա.Գ., Ավինյան Վ.Ռ., Սիմոնյան Ա.Ս.** Պարամետրական մատրիցների հակադարձների որոշման սիմպլեքս եղանակ՝ հիմնված դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա // ՀՊՃՀ Լրաբեր. “Մոդելավորում, օպտիմալացում, կառավարում” սերիա.- 2010.-Թող.13, հատ.1.-էջ 9-15:
7. **Аветисян А.Г.** Теоретические основы многомерных дифференциально-падеевских преобразований // Вестник ГИУА. Сер. Моделирование, оптимизация, управление. -2011.- Вып.14, том 1.-С.128-134.
8. **Алберт А.** Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. –М.: Наука, 1997. -224с.
9. **Ben-Israel A., Greville T.N.E.** Generalized Inverses Theory and Applications. –A Wiley-Interscience Publication, 1974. –395 p.
10. **Хемди А. Таха.** Введение в исследование операций, 7-е издание: Пер. с англ. –М.: Издательский дом “Вильямс”, 2005. -912с.



ГИУА (ПОЛИТЕХНИК). Материал поступил в редакцию 10.10.2011.



Ա.Գ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ, Վ.Ռ. ԱՎԻՆՅԱՆ


## ԲԱԶՄԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՀԱԿԱԴԱՐՁՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿ՝ ՀԻՄՆՎԱԾ ՍԻՄՊԼԵՔՍ-ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ԲԱԶՄԱՉԱՓ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎՐԱ


Առաջարկված է բազմապարամետրական մատրիցների հակադարձների որոշման եղանակ՝ հիմնված Գ.Ե. Պուխովի բազմաչափ դիֆերենցիալ ձևափոխությունների և սիմպլեքս ձևափոխությունների համատեղ կիրառման վրա: Դիտարկված է մոդելային օրինակ:



***Առանցքային բառեր.*** բազմապարամետրական մատրից, բազմաչափ դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, դիֆերենցիալ-պադեյան (ԴՊ-) ձևափոխություններ, սիմպլեքս-ձևափոխություններ:



**A.G. AVETISYAN, V.R. AVINYAN**


## A METHOD FOR DEFINITION OF MULTI-PARAMETRICAL INVERSE MATRICES BASED ON SIMPLEX TRANSFORMATIONS AND MULTIDIMENSIONAL DIFFERENTIAL TRANSFORMS


A method for definition of multi-parametrical inverse matrices based on combined application of G.E. Pukhov’s multi-dimensional differential and simplex transformations is proposed. A model example is considered.



***Keywords:*** multiparametrical matrix, multidimensional differential transforms, differential-Pade′ (DP-) transforms, simplex-transformations.