ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2012. Т. LXV, № 1.

УДК 621.3

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

А.А. ТЕРЗЯН, Г.С. СУКИАСЯН, А.Э. АКОПЯН

К ПОСТРОЕНИЮ ТЕТРАЭДРАЛЬНОЙ СЕТКИ НА МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ СИСТЕМАХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТРЕХМЕРНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Развиты параллельные алгоритмы построения тетраэдральной сетки для решения нелинейных задач трехмерного электромагнитного поля методом конечных элементов.

Ключевые слова: электромагнитное поле, сеточные задачи, параллельные алгоритмы, тетраэдральная сетка.

Введение. Построение тетраэдральной сетки является важным и наиболее трудоемким этапом численного моделирования трехмерного электромагнитного поля. Обычно время построения тетраэдральной расчетной сетки занимает значительную часть общего времени решения задачи. В этой связи представляется актуальным развитие параллельных алгоритмов построения тетраэдральной расчетной сетки с использованием многопроцессорных вычислительных систем кластерной архитектуры.

1. **Математическое представление трехмерного магнитного поля.** На рис. 1 представлена исследуемая область модельной задачи, показано электромагнитное устройство с ферромагнитными участками B и D, разделенными воздушным зазором C и обмотками O, обтекаемыми током.

Для определения электромагнитного поля в устройстве краевую задачу необходимо решить с нулевыми граничными условиями на бесконечности. Однако, учитывая, что поле вне устройства достаточно быстро затухает, ограничимся рассмотрением конечной области воздушного пространства, окружающего устройство, приняв на границе нулевые значения потенциалов (A=0).

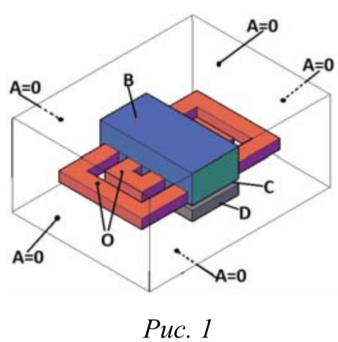


Рис. 1

Магнитное поле, созданное электрическим током, подчиняется классическому уравнению Максвелла:

$$\mathrm{rot}\frac{1}{\mu}(\mathrm{rot}\vec{A}) = \delta.$$

Используя условие divA=0, в декартовой системе координат (x, y, z) уравнение Максвелла приобретает вид [1,2]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial x}A^x + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial y}A^x + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial z}A^x = -\delta^x, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial x}A^y + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial y}A^y + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial z}A^y = -\delta^y, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial x}A^z + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial y}A^z + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial z}A^z = -\delta^z, \end{cases} \tag{1}$$

где $A = (A^x, A^y, A^z)$ - векторный магнитный потенциал; $\delta = (\delta^x, \delta^y, \delta^z)$ - вектор плотности тока; μ - величина магнитной проницаемости.

Прямое решение системы (1) затруднительно из-за нелинейности задачи: величина магнитной проницаемости зависит от потенциала и тоже является неизвестной. В методе конечных элементов задача решения системы (1) заменяется вариационной, т.е. рассматривается функционал F, минимум которого достигается точным решением уравнений (1). Здесь

$$F = \iiint\limits_{\Omega}\left(f_x + f_y + f_z\right)dxdydz,$$

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{1}{2\mu}\left[\left(\dfrac{\partial A^x}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial A^x}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial A^x}{\partial z}\right)^2\right] - \delta^x A^x, \\ f_y = \dfrac{1}{2\mu}\left[\left(\dfrac{\partial A^y}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial A^y}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial A^y}{\partial z}\right)^2\right] - \delta^y A^y, \\ f_z = \dfrac{1}{2\mu}\left[\left(\dfrac{\partial A^z}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial A^z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial A^z}{\partial z}\right)^2\right] - \delta^z A^z. \end{cases} \tag{2}$$

Затем с помощью метода базисных функций можно получить расчетные уравнения для минимизации функционала.

Дискретизируем задачу, разбив рассматриваемую область Ω на тетраэдры - (элементы) и приняв, что внутри элемента e магнитная проницаемость μ постоянна, а потенциалы являются линейной функцией вида

$$A^x=\sum_{t\in W_e}A_t^x b_t^e(x,y,z),\quad A^y=\sum_{t\in W_e}A_t^y b_t^e(x,y,z),\quad A^z=\sum_{t\in W_e}A_t^z b_t^e(x,y,z), \tag{3}$$

где W_e - множество вершин элемента e; A_t - значение потенциала A в узле t; $b_t^e(x,y,z)$ - базисная функция, т.е. линейная функция, равная единице в узле t и нулю в остальных трех вершинах тетраэдра e. Базисные функции удобно записывать в виде детерминанта

$$b_k^e(x,y,z)=\frac{1}{6V_e}\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ x_j & y_j & z_j & 1\\ x_i & y_i & z_i & 1\\ x_m & y_m & z_m & 1\end{vmatrix}, \tag{4}$$

где (x_t,y_t,z_t)- декартовы координаты вершин тетраэдра, $t=i,j,k,m$; V_e - объем тетраэдра e:

$$6V_e=\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i & 1\\ x_j & y_j & z_j & 1\\ x_k & y_k & z_k & 1\\ x_m & y_m & z_m & 1\end{vmatrix}.$$

Подставляя (3) в (2), получим

$$\begin{cases} f_x=\dfrac{1}{2\mu}\left[\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^x\dfrac{\partial b_t^e}{\partial x}\right)^2+\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^x\dfrac{\partial b_t^e}{\partial y}\right)^2+\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^x\dfrac{\partial b_t^e}{\partial z}\right)^2\right]-\delta^x\sum\limits_{t\in W_e}A_t^x b_t^e,\\ f_y=\dfrac{1}{2\mu}\left[\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^y\dfrac{\partial b_t^e}{\partial x}\right)^2+\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^y\dfrac{\partial b_t^e}{\partial y}\right)^2+\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^y\dfrac{\partial b_t^e}{\partial z}\right)^2\right]-\delta^y\sum\limits_{t\in W_e}A_t^y b_t^e,\\ f_z=\dfrac{1}{2\mu}\left[\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^z\dfrac{\partial b_t^e}{\partial x}\right)^2+\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^z\dfrac{\partial b_t^e}{\partial y}\right)^2+\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^z\dfrac{\partial b_t^e}{\partial z}\right)^2\right]-\delta^z\sum\limits_{t\in W_e}A_t^z b_t^e. \end{cases} \tag{5}$$

Численный расчет трехмерного магнитного поля методом конечных элементов сводится к решению системы уравнений:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial A_k^x} = \sum\limits_{e \in E_k} \left[\nu_e \sum\limits_{t \in W_e} \left(a_{kt} A_t^x \right) - \delta^x a_k^e \right] = 0, \\
\dfrac{\partial F}{\partial A_k^y} = \sum\limits_{e \in E_k} \left[\nu_e \sum\limits_{t \in W_e} \left(a_{kt} A_t^y \right) - \delta^y a_k^e \right] = 0, \\
\dfrac{\partial F}{\partial A_k^z} = \sum\limits_{e \in E_k} \left[\nu_e \sum\limits_{t \in W_e} \left(a_{kt} A_t^z \right) - \delta^z a_k^e \right] = 0,
\end{cases} \tag{6}
$$

где v_e - значение $\mathrm{v} = 1/\mu$ внутри элемента e; E_k - множество тетраэдров, содержащих узел k; a_{kt}^e - коэффициенты взаимодействия вершин k и t в элементе e, которые получаются дифференцированием формул (5):

$$
\begin{cases}
a_{kt} = \iiint\limits_e \left(\dfrac{\partial b_k^e}{\partial x} \dfrac{\partial b_t^e}{\partial x} + \dfrac{\partial b_k^e}{\partial y} \dfrac{\partial b_t^e}{\partial y} + \dfrac{\partial b_k^e}{\partial z} \dfrac{\partial b_t^e}{\partial z} \right) dxdydz, \\
a_k^e = \iiint\limits_e b_k^e \, dxdydz.
\end{cases}
$$

Отметим, что для всех элементов $e \in E_k$ множество W_e обязательно содержат узел k. Следовательно, внутренняя сумма в (6) зависит от A_k.

Таким образом, численный расчет трехмерного магнитного поля методом конечных элементов сводится к решению системы уравнений (6). Заметим, что для каждого узла k в (6) принимают участие только непосредственные соседи узла k. Получается система уравнений с неизвестными A_k, причем количество уравнений равно количеству неизвестных и утроенному количеству некраевых узлов.

2. Параллельный алгоритм создания тетраэдральной сетки с использованием декомпозиции без перекрытия. Для реализации параллельного алгоритма необходимо исследуемую область (рис. 1) разбить на процессорные пространства. Процессорное пространство задается ограничивающими плоскостями. Для уменьшения межпроцессорного обмена в процессе построения сетки целесообразно использовать декомпозицию без перекрытия. Для наглядности предположим, что исследуемую область необходимо разбить на два процессорных пространства, следовательно, в процессе построения сетки будут участвовать два процессора (рис. 2).

На рис. 2 процессорные пространства имеют общую граничную плоскость (П) и находятся по разные стороны от этой плоскости. Поэтому при разбиении области необходимо указать положения процессорных пространств относительно граничной плоскости.

Граничную плоскость определим заданием трех пространственных точек $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$, которые принадлежат этой плоскости. Тогда уравнение плоскости примет вид

$$D(x, y, z) = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Узел с координатами (x_0, y_0, z_0) принадлежит процессорному пространству Пр1, если $D(x_0, y_0, z_0) \geq 0$, и процессорному пространству Пр2, если $D(x_0, y_0, z_0) \leq 0$.

Отметим, что узлы, лежащие на граничной плоскости, принадлежат обоим процессорным пространствам.

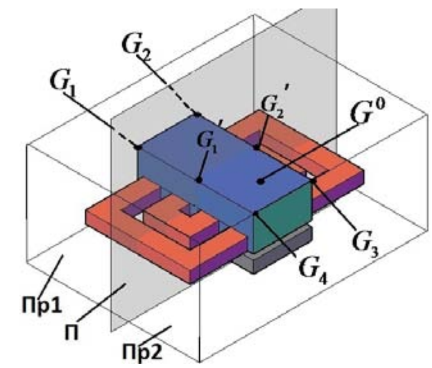


Рис. 2

Если граница раздела двух сред находится в разных процессорных прост - ранствах, то точки пересечения соответствующих ребер с граничной плоскостью будут дополнительными узлами граничной плоскости, а их соединяющие отрезки - границами раздела сред на граничной плоскости. Например, на рис. 2 четырехугольник G_1, G_2, G_3, G_4 порождает дополнительные узлы G_1' и G_2', а отрезок $G_1'G_2'$ будет границей раздела сред на граничной плоскости (рис. 3).

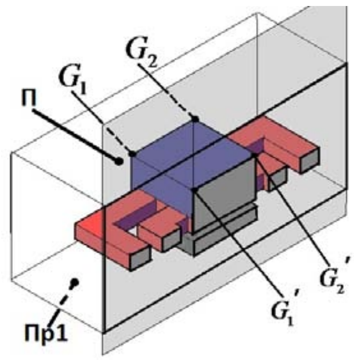


Рис. 3

После определения узлов, которые принадлежат граничной плоскости (П), необходимо произвести двумерную триангуляцию Делоне [3] с ограничениями на запрет по построению элементов, находящихся в разных средах (рис. 4).

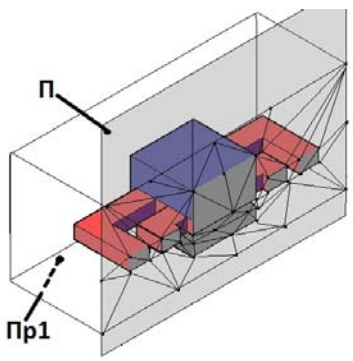


Рис. 4

Опишем алгоритм построения тетраэдральной сетки, который является развитием [4]. Обозначим через Gt массив треугольных граней тетраэдральной сетки. Вначале массив Gt состоит из треугольников граничной плоскости.

Шаг 1. Из массива Gt выбираем первый треугольник. Обозначим его Gt[0].

Назовем вершину тетраэдра, не принадлежащую треугольнику Gt[0], “противоположным узлом”. Если Gt[0] не является гранью какого-либо тетраэдра, то переходим к шагу 1.1, в противном случае - к шагу 1.2.

Шаг 1.1 Для треугольника Gt[0], последовательно перебирая элементы массива P узлов данного процессорного пространства, находим точку, которая вместе с треугольником Gt[0] образует тетраэдр положительного объема. Если точка найдена, переходим к шагу 2.

Шаг 1.2. Для треугольника Gt[0] из массива P, последовательно перебирая, находим точку, которая с “противоположным узлом” находится по разные стороны треугольника Gt[0]. Если точка найдена, переходим к шагу 2.

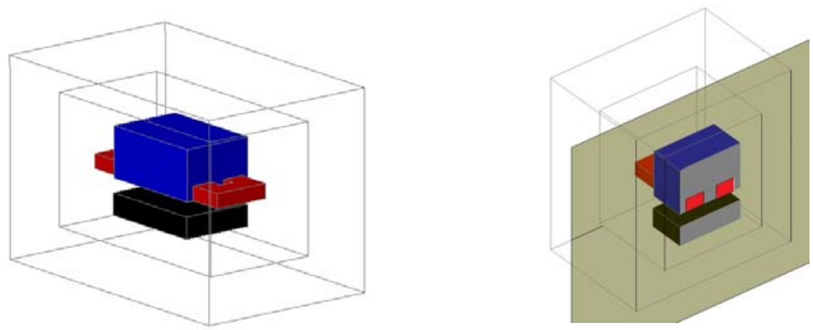
Шаг 2. Проверяем, не пересекается ли вновь созданный тетраэдр с границами раздела сред и с уже созданными тетраэдрами. Если пересекается, переходим к шагу 1 с продолжением последовательного перебора. В противном случае - переходим к шагу 3.

Шаг 3. Проверяем, лежит ли какая-либо точка из массива P внутри шара, описанного вокруг вновь созданного тетраэдра. Если найдена такая точка, то создается тетраэдр с этой точкой и треугольником Gt[0]. Затем переходим к шагу 2 до тех пор, пока не найден тетраэдр, для которого внутри описанного шара нет других узлов. Созданный тетраэдр добавляем в массив тетраэдров. Из массива Gt удаляем треугольник Gt[0], в массив Gt добавляем отличные от Gt[0] треугольные грани тетраэдра, после чего переходим к шагу 1.

3. Параллельный алгоритм создания тетраэдральной сетки с использованием алгоритма пузырька. В [5] показано, что для расчета магнитных полей методом конечных элементов при заданном наборе узлов из всех возможных сеток наилучшей является сетка Делоне. Вместе с тем методы, основанные на критерии Делоне, крайне чувствительны к точности машинных вычислений [6]. Отметим также, что алгоритм [5], который основан на свойстве двойственности триангуляций Делоне и многогранных мозаик Вороного, для большого количества узлов является трудоемким. Поэтому использование такого алгоритма целесообразно на многопроцессорных вычислительных системах.

Суть метода состоит в том, что для данного множества узлов вначале строится многогранная мозаика Вороного. Для этого каждому узлу приписывается шар малого радиуса с центром в данном узле так, чтобы не задевать другие узлы. Затем все шары одновременно “разбухают”, при этом их радиусы растут с равной скоростью. Когда два шара соприкасаются, их рост в данном направлении прекращается, и их центры запоминаются, как пара соседних узлов. Соединяя соседние узлы, получим, согласно свойству двойственности, трехмерную триангуляцию Делоне.

Для наглядности исследуемую область графически представим для двумерного случая, а алгоритм опишем для трехмерного случая. На рис. 5 представлена трехмерная модель исследуемой области, а на рис. 6 - двумерное сечение исследуемой области.



а) *б)*

Рис. 5

На рис. 5 и 6 показано такое же, что и на рис. 1, модельное электромагнитное устройство с воздушным пространством E, погруженное в конечное пространство H. Если не использовать ограниченное пространство H, то в зависимости от расположения узлов возможно, что шары, принадлежащие области E, соприкоснутся в бесконечности.

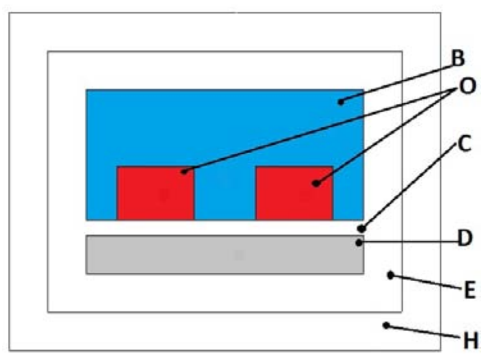


Рис. 6

Определение положения узла относительно граничной плоскости, а также принадлежности граней и ребер данному процессорному пространству происходит так же, как в вышеуказанном алгоритме.

На рис. 7 представлены иллюстрации процесса решения двумерной задачи на двух процессорах. В процессе построения, если окружность (например, Ок) сталкивается с границами раздела сред или с граничными плоскостями как собственного процессора, так и соседнего, то рост окружности в этом направлении останавливается. После построения сетки удаляются треугольники, которые принадлежат H.

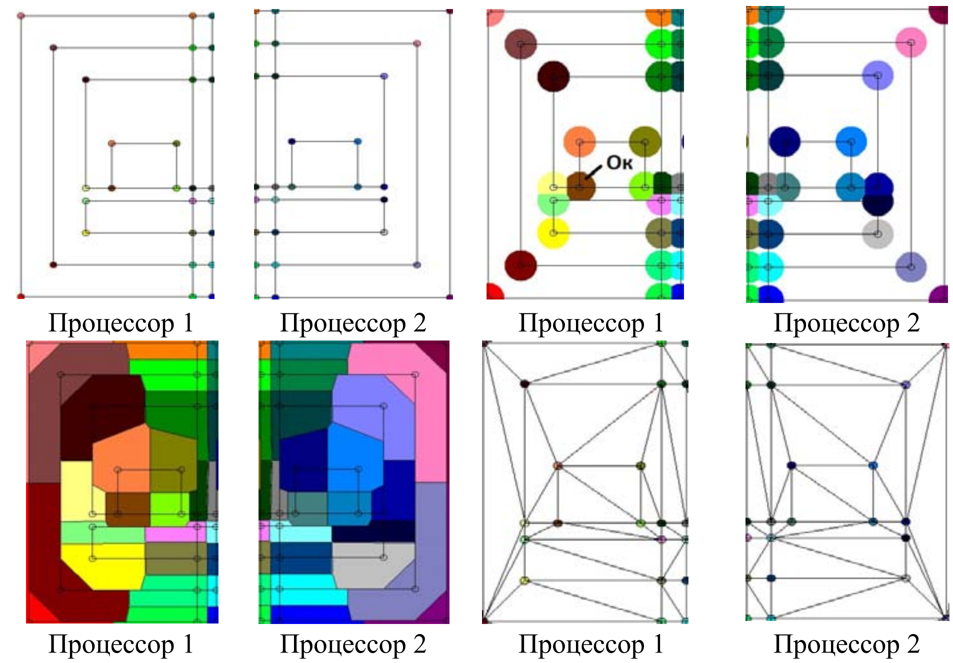


Рис. 7

Опишем алгоритм для создания трехмерной триангуляции Делоне с фиксированным множеством узлов P. Для начала исследуемую область представим в виде набора дискретных точек, заданных с помощью трехмерного массива M размерности $m \times n \times k$, где $m = \frac{l}{\Delta r}\xi$, $n = \frac{w}{\Delta r}\xi$, $k = \frac{h}{\Delta r}\xi$,

$$l = Max\_x - Min\_x,$$

$$w = Max\_y - Min\_y,$$

$$h = Max\_z - Min\_z.$$

Здесь $Max\_x, Max\_y, Max\_z, Min\_x, Min\_y, Min\_z$ - максимальные и минимальные координаты узлов пространства H; ξ - коэффициент дискретизации, причем чем больше ξ, тем выше точность создания сетки; Δr - шаг увеличения текущего радиуса шара.

Назовем координаты точки в трехмерном массиве матричными координатами. Выражение для перехода с декартовой системы координат в матричные координаты имеет следующий вид:

$$\begin{cases} M_x = \dfrac{x - Min\_x}{l} m; \\ M_y = \dfrac{y - Min\_y}{w} n; \\ M_z = \dfrac{z - Min\_z}{h} k, \end{cases}$$

где M_x, M_y, M_z - матричные координаты точки с декартовыми координатами x, y, z.

С учетом изложенного алгоритм представим в следующем виде.

Шаг 1. Первоначально все элементы трехмерного массива равны нулю. Последовательно перебирая все узлы из P, находим их матричные координаты. В трехмерный массив с матричными координатами M_x, M_y, M_z записывается номер узла с декартовыми координатами x, y, z.

Шаг 2. Создается массив границ раздела сред в матричных координатах.

Шаг 3. Для каждой итерации радиус (R) шаров увеличивается на Δr, $R = R + \Delta r$.

Для узла из P с номером J и матричными координатами M_x, M_y, M_z перебираем все элементы N_x, N_y, N_z трехмерного массива M. Обозначим $J' = M(N_x, N_y, N_z)$. Проверим условие

$$(N_x - M_x)^2 + (N_y - M_y)^2 + (N_z - M_z)^2 \le R^2. \qquad (7)$$

Могут быть следующие случаи:

1. J’>0. Это означает, что точка X с матричными координатами N_x, N_y, N_z лежит внутри шара с радиусом $R - \Delta r$ и центром в узле с номером J’. Если $J \ne J'$ и выполнено (7), то узлы J и J’ являются соседними.
2. J’=0. Точка X и узел J лежат в разных средах или разных процессорных пространствах, тогда J’ оставляем равным нулю.
3. J’=0. Точка X и узел J лежат в одинаковых средах и процессорных пространствах. Если выполнено (7), то точка X лежит внутри шара с радиусом R и центром в узле с номером J, тогда в трехмерный массив с координатами N_x, N_y, N_z заносим номер J.

Для выявления эффективности предложенного алгоритма осуществлена его реализация на многопроцессорной системе кластерной архитектуры. Результаты численного эксперимента на модельной задаче с анализом эффективности будут представлены в следующей работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Новик Я.А.** Вариационная формулировка решения задачи расчета трехмерного стационарного магнитного поля с учетом нелинейных свойств среды // Изв. АН ЛатвССР. Сер. Физ. и техн. наук.- 1974.- №4.- С.79-89.
2. **Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Акопян А.Э.** Об оптимизации тетраэдральной сетки для расчета трехмерных магнитных полей методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2008. - Т. 61, № 2. – С. 305-317.
3. **Скворцов А. В.** Триангуляция Делоне и ее применение. – Томск: Изд-во ТУ, 2002. – 128 с.
4. **Акопян А.Э.** Об автоматическом построении тетраэдрической сетки при решении полевых задач методом конечных элементов // Вестник-76: Сборник научных и методических статей. – Ереван, 2009. – Т.1, №1.-С. 225-229.
5. **Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Акопян А.Э. Геворгян А. А.** К построению оптимальной расчетной сетки для решения полевых задач методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2010. - Т. 63, №3.-С. 319-327.
6. **Галанин М.П., Щеглов И.А.** Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: итерационные методы.- Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006,

ГИУА (ПОЛИТЕХНИК). Материал поступил в редакцию 20.10.2011.

Հ.Ա. ԹԵՐԶՅԱՆ, Հ.Ս. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ, Ա.Է. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՏԱՐՐԵՐԻ ՄԵԹՈԴՈՎ ԵՌԱՉԱՓ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ՔԱՌԱՆԻՍՏ ՑԱՆՑԻ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՄՈՏԵՑՈՒՄ՝ ԲԱԶՄԱՊՐՈՑԵՍՈՐԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՄԻՋՈՑՈՎ

Զարգացվել են քառանիստային ցանցի կառուցման զուգահեռ ալգորիթմներ վերջավոր տարրերի մեթոդով եռաչափ էլեկտրամագնիսական ոչ գծային դաշտի խնդիրների լուծման համար:

Առանցքային բառեր. էլեկտրամագնիսական դաշտ, ցանցային խնդիրներ, զուգահեռ ալգորիթմներ, քառանիստ ցանցեր:

H.A. TERZYAN, H.S. SUKIASYAN, A.E. HAKOBYAN

TO THE CONSTRUCTION OF TETRAHEDRICAL MESH ON MULTI-PROCESSOR SYSTEMS FOR SOLVING PROBLEMS OF 3-DIMENSIONAL ELECTRO-MAGNETIC FIELD BY THE FINITE-ELEMENT METHOD

Parallel algorithms of tetrahedrical mesh for solving nonlinear problems of the 3-dimensional electro-magnetic field by the finite-element method are developed.

***Keywords*:** electro-magnetic field, mesh problems, parallel algorithms, tetrahedrical mesh.