

Э.П. АЩИЯНЦ

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ НАЧАЛЬНОГО УЧАСТКА ПРИ
РАЗВИТИИ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ**

Отмечаются недостатки рекомендуемой в существующей литературе зависимости, определяющей развитие ламинарного течения вязкой жидкости на начальном участке трубы. Рекомендуется новая, более надежная зависимость, определяющая длину начального участка.

Ключевые слова: функция Бесселя второго и нулевого порядка, скоростной напор, погрешность линеаризации.

Гидравлические исследования течения вязкой жидкости в напорных водоводах необходимы для их надежного проектирования.

В [1-3] показано, что при входе жидкости из резервуара в трубу распределение местных скоростей по живому сечению трубы на ее начальном участке некоторой длины ℓ_H не соответствует их распределению при равномерном движении. В пределах этой длины происходит переформирование эпюры скоростей и стабилизация параболического профиля.

Для определения развития ламинарного течения на начальном участке ℓ_H в вышеуказанных работах использовано дифференциальное уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости, представленное в цилиндрических координатах вида

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{g \Delta H}{\ell}, \quad (1)$$

где $U(x, r)$ – скорость течения жидкости; x – продольная координата оси трубы; r – переменный радиус трубы ($0 \leq r \leq R$); R – радиус трубы, ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости; $\Delta H = H_1 - H_2$, H_1 и H_2 – постоянные напоры в начале и конце трубы; ℓ – длина трубы.

В случае, если вход жидкости в трубу хорошо закруглен и на входе поддерживается постоянный напор, то возможно, что частицы жидкости на

входе в трубу будут двигаться с одинаковой скоростью $U_0 = Q/A$, где Q – расход жидкости, A – площадь поперечного сечения трубы.

Для указанного случая в [1-3] уравнение (1) интегрируется при следующих условиях:

$$\left[\begin{array}{l} \text{при } x = 0 \quad U(0, r) = U_0, \\ \text{при } r = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial r} = 0, \text{ а при } r = R - U(x, R) = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

Для того чтобы иметь возможность интегрировать уравнение (1) аналитическим путем, в указанных работах осуществляется линеаризация слагаемого $U \frac{\partial U}{\partial r}$ и представление его в виде $U_0 \frac{\partial U}{\partial r}$. При этом уравнение (1) принимает вид

$$U_0 \frac{\partial U}{\partial r} = v \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{g \Delta H}{\ell}. \quad (3)$$

В [1-3] это уравнение интегрируется операторным методом (преобразование Лапласа). В результате получается зависимость для скорости вида [2]

$$\frac{U(x, r)}{U_0} = 2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_m^2} \left[1 - \frac{I_0 \left(\gamma_m \frac{r}{a} \right)}{I_0(\gamma_m)} \right] e^{-\frac{\gamma_m^2 v x}{a^2 U_0}}, \quad (4)$$

где a – радиус трубы; γ_m – корни уравнения Бесселя второго порядка.

При использовании зависимости (4) следует обратить внимание на то обстоятельство, что изменение скорости течения жидкости определяется корнями уравнения Бесселя второго порядка. Исходя из вышеизложенного, отметим, что эта функция не обеспечивает выполнения краевого условия задачи, так как при $r = 0$ она не принимает максимального значения. Это подтверждается расчетом по зависимости (4). Например, при $x = 0$ и $r = 0$ имеем значение скорости $U(0, 0) = 0,71U_0$ вместо $U(0, 0) = U_0$, в то время как зависимость (4) должна обеспечивать точное выполнение граничных условий.

В связи с указанным недостатком зависимости (4) в настоящей работе интегрирование уравнения (3) производится при тех же условиях (2) методом Фурье, в результате чего для скорости получена зависимость вида

$$\begin{aligned}
U(x, r) = & 2U_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_0\left(\frac{\mu_k}{R} r\right)}{I_1(\mu_k) \mu_k} \exp(-\mu_k^2 vx / R^2 U_0) + \\
& + \frac{2g\Delta H R^2}{\ell v} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_0\left(\frac{\mu_k}{R} r\right)}{I_1(\mu_k) \mu_k^3} [1 - \exp(-\mu_k^2 vx / R^2 U_0)],
\end{aligned} \tag{5}$$

где μ_k – корни функции Бесселя нулевого порядка.

В процессе интегрирования уравнения (3) методом Фурье становится совершенно очевидным, что изменение скорости течения жидкости определяется корнями функции Бесселя нулевого порядка. В отличие от зависимости (4), зависимость (5) обеспечивает точное выполнение граничного условия $U(0, r) = U_0$.

При $r = 0$ функция $I_0\left(\frac{\mu_k}{R} 0\right) = 1$, т.е. принимает максимальное

значение, а при $r = R$ - $I_0(\mu_k) = 0$, так как μ_k являются корнями функции Бесселя нулевого порядка. При $x \rightarrow \infty$ распределение местных скоростей соответствует их распределению при равномерном режиме движения.

Необходимо также отметить, что в случае, если одно и то же дифференциальное уравнение интегрируется при одинаковых начальных и краевых условиях правильно, то независимо от способов интегрирования расчеты по полученным зависимостям должны совпадать. Однако в рассматриваемом случае этого не происходит.

На рисунке приведена кривая 1, построенная с помощью зависимости (4) и показывающая изменение отношения U_{\max}/U_0 в зависимости от безразмерной координаты x/DRe , где U_{\max} – скорость на оси трубы, D – диаметр трубы, $Re = U_0 D / v$.

На том же рисунке представлена кривая 2, построенная с помощью зависимости (5). При построении кривой 2 были использованы следующие численные значения параметров: $U_0 = 0,18$ м/с, $D = 0,05$ м, $v = 85 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $\Delta H = 0,1$ м, $\ell = 50$ м.

Как видно из рисунка, кривые 1 и 2 существенно отличаются друг от друга. Причина такого расхождения объясняется тем, что численные значения начальных корней функции Бесселя второго порядка γ_m ($m=1,2,3$) значительно больше начальных корней функции Бесселя нулевого порядка. Поэтому стабилизация процесса перераспределения местных скоростей жидкости, рас-

считанная по зависимости (4), происходит на участке значительно меньшей длины ($\ell_n \approx 0,05D Re$), чем это получается при использовании зависимости (5).

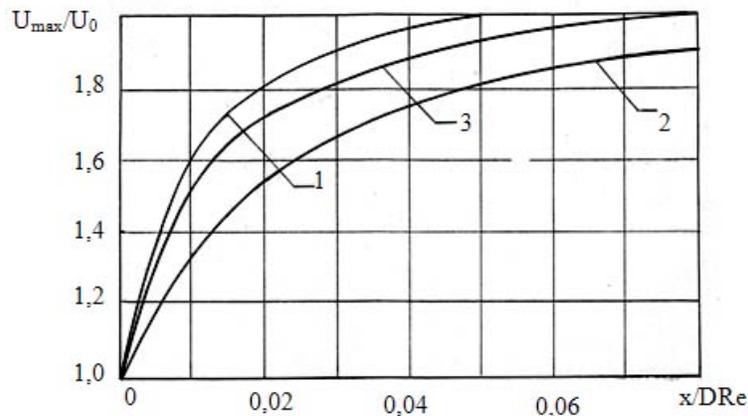


Рис. Отношение максимальной скорости к средней на начальном участке трубопровода по длине максимального участка

Для оценки степени корректности используемой зависимости (4) обратимся к экспериментальным данным, приведенным в [2]. Из приведенного выше рисунка видно, что в интервале $0,015 < \frac{x}{D Re} \leq 0,0425$ эксперименталь-

ные значения скоростей на оси трубы, полученные Никурадзе и Буссинеским, располагаются ниже кривой 1. Это означает, что при расчете по зависимости (4) стабилизация параболического профиля скоростей, соответствующая равномерному режиму движения, обеспечивается на участке трубы значительно меньшей длины, чем это показывают эксперименты. Данное обстоятельство заставляет усомниться в корректности зависимости (4). Кроме вышеуказанного, следует обратить внимание еще на одно немаловажное обстоятельство. Как уже упоминалось, при интегрировании уравнения (1) выражение $U \partial U / \partial x$ линеаризуется, допуская при этом существенную погрешность. Исследования [4] показывают, что при линеаризации скоростного напора в определенных интервалах изменения параметра “x” показатель степени при экспоненте затухания может уменьшиться в два и более раза. Поэтому с целью уменьшения допустимой погрешности рекомендуется в зависимости (5) значение параметра “x” при экспоненте затухания умножить на корректирующий коэффициент $\alpha \approx 1,8$. В этом случае расхождение между экспериментальными и расчетными данными существенно уменьшится, все экспериментальные данные будут

расположены выше расчетной кривой, следовательно, расчет по откорректированной зависимости (6) обеспечит высокую степень надежности.

Таким образом, окончательно расчетная зависимость для скорости $U(x,r)$ будет иметь вид

$$U(x,r) = 2U_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I\left(\mu_k \frac{r}{R}\right)}{I(\mu_k)\mu_k} \exp(-\mu_k^2 vx\alpha / R^2 U_0) + \\ + \frac{2g\Delta HR^2}{\ell v} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_0\left(\mu_k \frac{r}{R}\right)}{I_1(\mu_k)\mu_k^3} [1 - \exp(-\mu_k^2 vx\alpha / R^2 U_0)], \quad (6)$$

где $\alpha \approx 1,8$.

На рисунке приведена также кривая 3, построенная с помощью зависимости (6). Из кривой видно, что характерное для стабилизированного равномерного ламинарного движения отношение U_{\max} / U_0 наблюдается на расстоянии $x / D Re \approx 0,08$. Отметим, что подобная кривая представлена также в работе [5] на рис. 4.14. Однако в этой работе не поясняется, каким образом получена эта кривая, и дается ссылка на работу [6], в которой также исследуется рассматриваемая задача, однако такой кривой там нет.

Таким образом, проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы:

1. Рекомендуемая в [1-3] зависимость, определяющая развитие ламинарного течения на начальном участке круглой цилиндрической трубы, некорректна и не рекомендуется при практических расчетах.

2. Полученная в настоящей работе зависимость (6) обеспечивает некоторый запас при определении длины начального участка трубы ℓ_n , и, тем самым, она более надежна при расчетах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тарг С.Н.** Основные задачи теории ламинарных течений. – М. - Л.: ГИТТЛ, 1951. – 420 с.
2. **Слезкин Н.А.** Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 513 с.
3. **Котляр Я.М.** Методы математической физики и задачи гидроаэродинамики. – М.: Высшая школа, 1991. – 208 с.
4. **Ащиянц Э.П.** Общее аналитическое решение задачи разгона жидкости в трубопроводе // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. – 2007. – Т.60, N 4. – С. 728-731.

5. **Альтшуль А.Д., Животовский Л.С., Иванов Л.П.** Гидравлика и аэродинамика. – М.: Стройиздат, 1987. – 414 с.
6. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. – М.: Физматгиз, 1972. – 711 с.

ЗАО “Институт водных проблем и гидротехники”. Материал поступил в редакцию 12.01.2011.

Է.Պ. ԱՇՉԻՅԱՆՑ

ԽՈՂՈՎԱԿԻ ՄԿՋԲՆԱՄԱՍԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՄԱՍՈՒՑԻԿ ՉՍԵՂՄՎՈՂ ՀԵՂՈՒԿԻ ԼԱՄԻՆԱՐ ՀՈՍՔԻ ԶԱՐԳԱՑՄԱՆ ԴԵՊԶՈՒՄ

Նշվում են գոյություն ունեցող գրականության մեջ առաջարկվող բանաձևի թերությունները: Առաջարկվում է խողովակի սկզբնական հատվածի երկարությունը որոշող նոր, ավելի հուսալի բանաձև:

Առանցքային բառեր. երկրորդ և զրոյական կարգի Բեսսելի ֆունկցիա, արագության էջք, գծայնացման սխալ:

E.P. ASHCHIANTS

INITIAL PIPE SECTION LENGTH FLOW OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID IN CIRCULAR CYLINDRICAL PIPE

Shortcomings of recommended in literature dependencies defining the laminar development of viscous fluid on initial pipe section are discussed. A new, more reliable dependence defining the initial pipe section is recommended.

Keywords: the second and zero order of Bessel function, velocity head, linearization inaccuracy.