

В.С. САФАРЯН, Л.В. САФАРЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА СИНХРОННОЙ МАШИНЫ

Исследуется условие существования и устойчивости стационарной точки синхронной машины в зависимости от внешних воздействий (напряжений статора и возбуждения, механического момента). Для оценки устойчивости стационарной точки синхронной машины используется теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Ключевые слова: стационарный режим, генераторный и двигательный режимы, напряжение возбуждения, механический момент, статическая устойчивость, выпуклое множество.

Стационарный режим работы синхронной машины (СМ) и его устойчивость при заданных конструктивных параметрах машины зависят от внешних воздействий (механического момента, напряжений статора и возбуждения). Математическая модель переходного процесса СМ представляет систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой возможно получить лишь численными методами [1-4]. Отсутствие аналитических решений не позволяет получить точные значения мгновенных токов и электромагнитных моментов при различных переходных процессах, а также выявить функциональные аналитические зависимости между отдельными величинами.

Исходя из вышеизложенного, исследование условия существования и устойчивости стационарного режима СМ в зависимости от внешних воздействий является актуальным, чему и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим математическую модель переходного процесса СМ в системе координат d, q [1]:

$$\begin{cases} (\rho_d + p)U_d + (1+s)U_q + pU_r = e_s \sin \theta, \\ -(1+s)U_d + (\rho_q + p)U_q - (1+s)U_r = -e_s \cos \theta, \\ \mu p U_d + (\rho_r + p)U_r = M_d e_r / L_r, \\ p\theta - s = 0, \\ \omega^2 J p s + 1.5 [(U_r U_q) / X_q + (1/X_q - 1/X_d) U_d U_q] / \omega = M_m, \end{cases} \quad (1)$$

где ω - синхронная угловая скорость; $p = d/(dt\omega)$ - оператор дифференцирования; $R(r)$ - активное сопротивление статорной (роторной) обмотки; $X_d,$

X_q - реактивные сопротивления СМ по осям d , q ; X_r - реактивное сопротивление ротора; $\rho_d = R/X_d$, $\rho_q = R/X_q$, $\rho_r = r/X_r$; i_d , i_q - проекции тока статора по осям d , q ; i_r - ток ротора; L_r - индуктивность ротора; $U_d = X_d i_d$, $U_q = X_q i_q$; M_d - взаимная индуктивность между обмотками статора и ротора (наибольшее значение); $\mu = 1.5M_d^2/(L_d L_r)$ - коэффициент магнитной связи; e_s - амплитудное значение напряжения статора; e_r - значение напряжения ротора; $U_r = \omega M_d i_r$ - напряжение статора в холостом ходе; θ - угол между синхронно вращающейся осью и поперечной осью ротора (рис. 1); ω_r - угловая скорость вращения ротора; $s = (\omega_r - \omega)/\omega$ - скольжение; M_m - механический момент на вале ротора; J - момент инерции ротора.

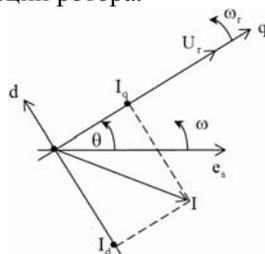


Рис. 1. Векторная диаграмма синхронной машины

В системе нелинейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (1) конструктивные параметры машины (R , r , X_d , X_q , X_r , M_d , $\mu = 1 - X'_d/X_d$, X'_d - переходное сопротивление) и внешние воздействия (e_r , M_m , e_s) считаются заданными, а искомыми являются U_d , U_q , U_r , θ и s .

В системе уравнений (1), полагая $p = 0$, $X_d = X_q = X$, $s = 0$, получим математическую модель стационарного движения неявнополюсной СМ в виде

$$\begin{cases} \rho U_d + U_q = e_s \sin \theta, \\ -U_d - U_r + \rho U_q = -e_s \cos \theta, \\ \rho_r U_r = M_d e_r / L_r, \\ 1.5 U_r U_q / X = \omega M_m. \end{cases} \quad (2)$$

Из системы уравнений (2) U_r и U_q определяем непосредственно:

$$U_r = M_d e_r / (L_r \rho_r) = \omega M_d i_r, \quad (3)$$

$$U_q = 2(\omega M_m X / U_r) / 3 = 2(M_m X / (M_d i_r)) / 3. \quad (4)$$

Величина U_d является корнем квадратного уравнения

$$(\rho^2 + 1)U_d^2 + 2U_r U_d + U_q^2 + (U_r - \rho U_q)^2 - e_s^2 = 0, \quad (5)$$

а угол θ определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \theta = (\rho U_d + U_q) / (U_d + U_r - \rho U_q). \quad (6)$$

Таким образом, неявнополюсная СМ может иметь две стационарные точки, у которых значения U_r и U_q одинаковы. Условие существования стационарной точки неявнополюсной СМ сводится к условию неотрицательности дискриминанта квадратного уравнения (5):

$$D = U_r^2 - (\rho^2 + 1)[U_q^2 + (U_r - \rho U_q)^2 - e_s^2] \geq 0. \quad (7)$$

Условие (7) перепишем в виде

$$D = -[\rho U_r - (\rho^2 + 1)U_q]^2 + (\rho^2 + 1)e_s^2 \geq 0, \quad (8)$$

или же

$$D = -[\rho U_r - y / U_r]^2 + (\rho^2 + 1)e_s^2 \geq 0, \quad (9)$$

$$y = 2(\rho^2 + 1)\omega_s M_m X / 3. \quad (10)$$

Исследуем условие существования стационарной точки (9) СМ в зависимости от изменения внешних параметров машины (e_s, e_r, M_m).

Поскольку величины U_r и y прямо пропорциональны e_r и M_m , то рассмотрим функцию $D = D(U_r, e_s, y)$ (9). Отметим, что $y > 0$ - в генераторном режиме ($M_m > 0$) и $y < 0$ - в двигательном режиме ($M_m < 0$).

Исследуем трехмерную функцию $D = D(U_r, e_s, y)$, фиксируя ее два аргумента.

1. Фиксируем e_s и y и рассматриваем функцию $D_1(U_r)$ (9).

Функция $D_1(U_r)$ имеет одну экстремальную точку (независимо от знака y):

$$U_r^* = \sqrt{|y|/\rho}, \quad (11)$$

которая является точкой максимума функции D_1 . Отметим, что

$$D_1(U_r^*) = (\rho^2 + 1)e_s^2 \text{ - в генераторном режиме и } D_1(U_r^*) = -4|y|\rho + (\rho^2 + 1)e_s^2 \text{ -}$$

в двигательном режиме.

Графики функции $D_1(U_r)$ для различных значений e_s (значение M_m фиксировано) изображены на рис. 2.

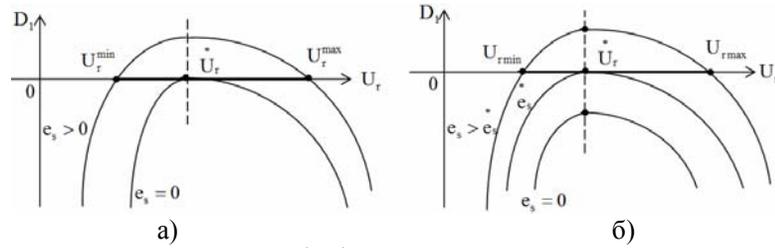


Рис. 2. Графики функций $D_1(U_r)$ для генераторного (а) и двигательного (б) режимов при различных значениях e_s

Исходя из вышеизложенного, для СМ при заданных значениях M_m и e_s можно определить диапазон значений $U_r \in [U_r^{\min}, U_r^{\max}]$, при котором существует стационарная точка СМ, причем из рис. 2 очевидно, что с увеличением e_s диапазон U_r расширяется в обе стороны.

Значения U_r^{\min} , U_r^{\max} определяются решением квадратного уравнения

$$\rho U_r - y/U_r = \pm b, \quad (12)$$

где $b^2 = (\rho^2 + 1)e_s^2$.

Квадратное уравнение (12) перепишем в виде

$$\rho U_r^2 \pm b U_r - y = 0, \quad (13)$$

решение которого дается формулой

$$U_r = (\pm b \pm \sqrt{b^2 + 4y\rho}) / (2\rho) = (\pm b \pm \sqrt{d}) / (2\rho), \quad (14)$$

$$d = b^2 + 4y\rho, \quad (15)$$

причем нас интересуют только положительные корни.

Для генераторного режима $\sqrt{d} \geq b$ получаем

$$\begin{cases} U_r^{\max} = (b + \sqrt{d}) / 2\rho, \\ U_r^{\min} = (-b + \sqrt{d}) / 2\rho. \end{cases} \quad (16)$$

В генераторном режиме для любого значения e_s существуют U_r^{\max} и U_r^{\min}

(16) (при $e_s = 0$, $U_r^{\min} = U_r^{\max} = U_r^* = \sqrt{y/\rho}$). Для двигательного режима

существует предельное значение e_s^* , стационарная точка СМ существует лишь при условии $e_s \geq e_s^*$. Предельное значение e_s^* определяется из условия $b^2 + 4y\rho = 0$, которое приобретает вид

$$e_s^* = \sqrt{-8(\omega_s M_m R)/3}. \quad (17)$$

Для двигательного режима СМ при заданном $e_s \geq e_s^*$ находим диапазон изменения U_r , при котором существует стационарная точка:

$$\begin{cases} U_r^{\max} = (b + \sqrt{d})/(2\rho), \\ U_r^{\min} = (b - \sqrt{d})/(2\rho). \end{cases} \quad (18)$$

Рассмотрим влияние изменения M_m на диапазон U_r в генераторном (16) и двигательном (18) режимах. Указанные диапазоны равны соответственно b/ρ и \sqrt{d}/ρ . Следовательно, диапазон U_r не зависит от M_m для генераторного режима, причем с увеличением M_m диапазон передвигается на числовой оси вправо, оставаясь по длине неизменным (рис. 3а, 4а). Для двигательного режима диапазон U_r зависит от значения механического момента, причем с увеличением (по абсолютной величине) механического момента U_r сужается, U_r^{\max} уменьшается, а U_r^{\min} увеличивается (рис. 3б, 4б).

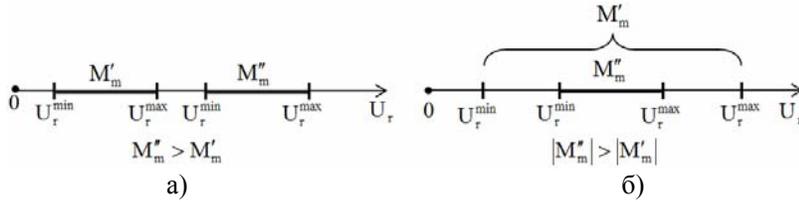


Рис. 3. Зависимость диапазона изменения U_r от механического момента в генераторном (а) и двигательном (б) режимах при фиксированном e_s

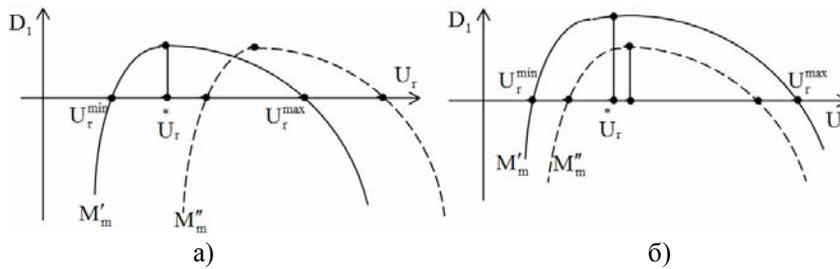


Рис. 4. Графики зависимости $D_1 = D_1(U_r)$ для генераторного (а) и двигательного (б) режимов при различных значениях M_m ($|M'_m| < |M''_m|$)

2. Фиксируем U_r и y и рассматриваем функцию $D_2(e_s)$ (9).

Сначала рассматриваем функцию $D_1 = D_1(U_r)$ при $e_s = 0$ для генераторного (рис. 5а) и двигательного (рис. 5б) режимов при различных значениях M_m .

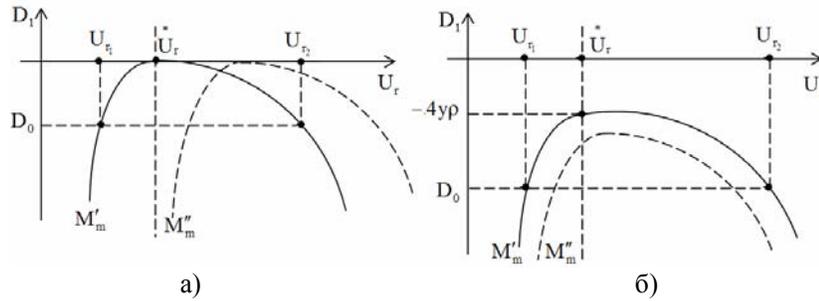


Рис. 5. Графики функций $D_1 = -(\rho U_r - y/U_r)^2$ для генераторного (а) и двигательного (б) режимов ($|M'_m| < |M''_m|$)

Исходя из графиков рис. 5, легко установить диапазоны изменения величины e_s (рис. 6) при фиксированных U_r и M_m . Отметим, что диапазон для e_s получается ограниченным только слева, при этом двум различным значениям U_{r1} и U_{r2} соответствует один и тот же диапазон для e_s .

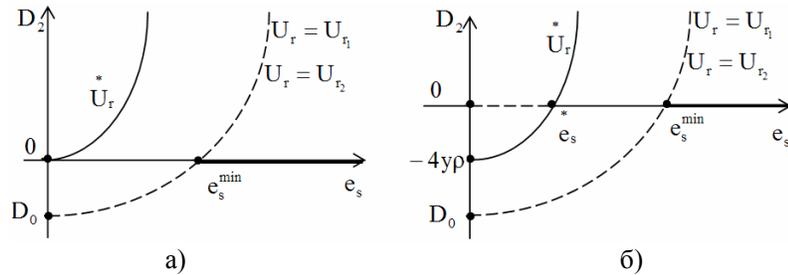


Рис. 6. Графики функций $D_2 = D_2(e_s)$ при различных значениях U_r для генераторного (а) и двигательного (б) режимов СМ

Величина e_s^{\min} (рис. 6) определяется из соотношения

$$e_s^{\min} = |\rho U_r - y/U_r| / \sqrt{\rho^2 + 1}. \quad (19)$$

При $U_r = \overset{*}{U}_r$ для генераторного режима ($y > 0$) получаем $e_s^{\min} = 0$ (рис. 6а), а для двигательного режима ($y < 0$) - $e_s^{\min} = \overset{*}{e}_s$ (рис. 6б).

В двигательном режиме с увеличением M_m (по абсолютной величине) e_s^{\min} увеличивается, в генераторном режиме с увеличением M_m e_s^{\min} увеличивается при $U_r > \overset{*}{U}_r$ и уменьшается при $U_r < \overset{*}{U}_r$.

3. Фиксируем e_s и e_r и рассматриваем функцию $D_3(y)$ (9).

График функции $D_3(y)$ представляем параболой с вершиной $[\rho U_r^2, (\rho^2 + 1)e_s^2]$. Корни уравнения $D_3(y) = 0$ выражаются в виде

$$\begin{cases} y_{\max} = \rho U_r^2 + \sqrt{\rho^2 + 1} e_s U_r, \\ y_{\min} = \rho U_r^2 - \sqrt{\rho^2 + 1} e_s U_r, \end{cases} \quad (20)$$

причем $y_{\max} > 0$. Если $y_{\min} > 0$, то при заданных e_r и e_s СМ не может работать в двигательном режиме. Графики функции $D_3(y)$ при различных значениях e_s представлены на рис. 7.

Значение e_s^0 , при котором $y_{\min} = 0$, определяем из соотношения

$$e_s^0 = \rho U_r / \sqrt{\rho^2 + 1}. \quad (21)$$

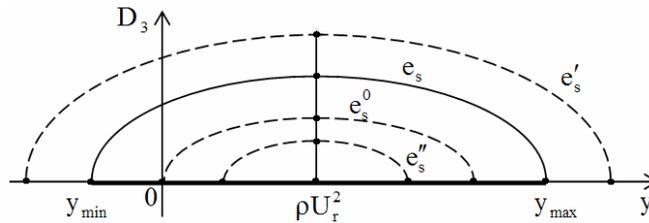


Рис. 7. Графики функций $D_3(y)$ при различных значениях e_s ($e_s' > e_s > e_s^0 > e_s''$) и фиксированном U_r

Рассмотрим графики функций $D_3(y)$ при различных значениях U_r (рис. 8).

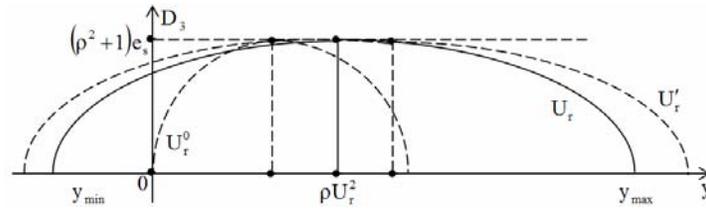


Рис. 8. Графики функций $D_3(y)$ при различных значениях U_r ($U_r' > U_r > U_r^0$) и фиксированном e_s

Значение U_r^0 , при котором $y_{\min} = 0$, определяется выражением

$$U_r^0 = e_s \sqrt{\rho^2 + 1} / \rho. \quad (22)$$

Выясним физические смыслы величин $e_r^* = U_r L_r \rho_r / M_d$ и e_s^* . Величина e_r^* представляет такое возбуждение, при котором СМ в генераторном режиме при коротком замыкании ($e_s = 0$) имеет стационарную точку.

e_s^* представляет наименьшее значение напряжения статора, при котором СМ в двигательном режиме может иметь стационарную точку при $e_r = e_r^*$.

Таким образом, для фиксированных значений величин e_s и M_m определяем диапазон $e_r \in [e_r^{\min}, e_r^{\max}]$ (рис. 9а), при котором тройке (e_s, e_r, M_m) соответствует движение СМ. Аналогично, для фиксированных значений величин e_r и M_m определяем диапазон изменения $e_s \geq e_s^{\min}$ (рис. 9б), при котором тройке (e_s, e_r, M_m) соответствует стационарное движение СМ.

Однако условие статической устойчивости для стационарных точек (e_s, e_r, M_m) , $e_r \in [e_r^{\min}, e_r^{\max}]$ или же $e_s \geq e_s^{\min}$ не всегда обеспечено. Исходя из свойства непрерывности определителей и собственных чисел матриц [5], можно утверждать, что области устойчивых стационарных точек СМ выпуклы.

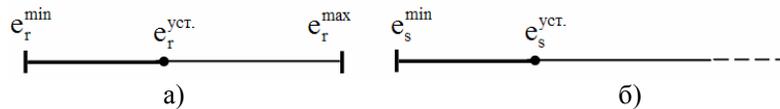


Рис. 9. Области изменения e_r и e_s

Экспериментальным путем показано, что подмножества устойчивых стационарных точек $([e_r^{\min}, e_r^{\уст.}], [e_s^{\min}, e_s^{\уст.}])$, если они существуют, расположены в левой части соответствующих множеств (рис. 9).

Для электропередачи (рис. 10), в которой генератор работает через трансформатор и линию электропередачи на шину бесконечной мощности, уравнение движения генератора при пренебрежении электромагнитными переходными процессами имеет вид [3]

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = M_m - M_e. \quad (23)$$

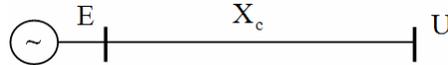


Рис. 10. Схема замещения электропередачи

Электромагнитный момент (M_e) при стационарном движении и пренебрежении активным сопротивлением имеет вид [3]

$$M_e = \frac{EU}{X_c \omega} \sin \theta,$$

где X_c - индуктивное сопротивление системы. С учетом $\theta = (\omega_r - \omega)t + \theta_0$ представим (23) в виде

$$\begin{cases} J \frac{d\omega_r}{dt} = M_m - M_e, \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega_r - \omega. \end{cases} \quad (24)$$

$$\text{Устойчивость стационарной точки } \omega_r = \omega, \quad \sin \theta = \frac{M_m X_c \omega}{EU} \quad (24)$$

сводится к условию $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ [3].

Для полноценной оценки устойчивости стационарной точки СМ необходимо, помимо уравнений электромагнитных уравнений переходного процесса, учесть также уравнения регуляторов.

В настоящей работе исследуется условие устойчивости стационарной точки СМ с учетом электромеханических и электромагнитных переходных процессов.

Для оценки устойчивости стационарной точки СМ, соответствующей тройке (e_s, e_r, M_m) , воспользуемся теоремой Ляпунова об устойчивости по первому приближению [6].

Представим систему дифференциальных уравнений (1) в векторной форме:

$$A \frac{dZ}{dt} = f(Z), \quad (25)$$

где $Z = (U_d, U_q, U_r, \theta, S)^t$,

$$A = \omega \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J\omega^3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} f_1 = e_s \sin \theta - \rho U_d - (1+S)U_q, \\ f_2 = -e_s \cos \theta + (1+S)U_d - \rho U_q + (1+S)U_r, \\ f_3 = M_d e_r / L_r - \rho U_r, \\ f_4 = s, \\ f_5 = M_m \omega - 1.5 U_r U_q / x. \end{cases}$$

Составим матрицу Якоби для вектор - функции $f(Z)$:

$$Я = \omega \begin{bmatrix} -\rho & -(1+s) & 0 & e_s \cos \theta & -U_q \\ 1+s & -\rho & 1+s & e_s \sin \theta & U_d + U_r \\ 0 & 0 & -\rho_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.5 U_r / x & -1.5 U_q / x & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Согласно теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению [6], стационарная точка СМ устойчива, если устойчива числовая матрица $A^{-1}Я$ [5] (матрица Якоби вычисляется в стационарной точке).

Выводы

1. Фиксируя две величины из трех (e_s , e_r , M_m), определяется диапазон изменения третьей величины, при котором существуют стационарные движения СМ.
2. Определяется условие статической устойчивости стационарной точки СМ с применением теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Горев А.А.** Переходные процессы синхронной машины. - Л.: Наука, 1985. - 502 с.
2. **Андерсон П., Фуад А.** Управление энергосистемами и устойчивость. - М.: Энергия, 1980. - 568 с.
3. **Жданов П.С.** Вопросы устойчивости электрических систем. - М.: Энергия, 1979. - 456 с.
4. **Копылов И.П.** Математическое моделирование электрических машин. - М.: Высшая школа, 2001. - 327 с.
5. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. - М.: Наука, 1976. - 351 с.
6. **Иванов В.А., Медведев В.С., Чемоданов Б.К., Ющенко А.С.** Математические основы теории автоматического управления. Т.1. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. - 552 с.

ЗАО “НИИ Энергетики”. Материал поступил в редакцию 03.04.2011.

Վ.Ս. ՄԱՖԱՐՅԱՆ, Լ.Վ. ՄԱՖԱՐՅԱՆ

ՄԻՆՔՐՈՆ ՄԵՔԵՆԱՅԻ ՄՏԱՑԻՈՆԱՐ ՌԵԺԻՄԻ ԳՈՑՈՒԹՅԱՆ ԵՎ
ԿԱՑՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Հետազոտվում է սինքրոն մեքենայի ստացիոնար կետի գոյության և կայունության պայմանը՝ կախված արտաքին ազդեցություններից (ստատորի և գրգռման լարումներ, մեխանիկական մոմենտ): Մինքրոն մեքենայի ստացիոնար ռեժիմի կայունության որոշման համար օգտագործվում է Լյապունովի՝ կայունության վերաբերյալ առաջին մոտարկման թեորեմը:

Առանցքային բառեր. ստացիոնար ռեժիմ, գեներատորային և շարժիչային ռեժիմներ, գրգռման լարում, մեխանիկական մոմենտ, ստատիկ կայունություն, ուռուցիկ բազմություն:

V.S. SAFARYAN, L.V. SAFARYAN

INVESTIGATION ON STATIONARY EXISTENCE AND STABILITY
SYNCHRONOUS MACHINE MODE

The condition of existence and stability of stationary synchronous machine point depending on external action (stator and disturbance stresses, moment) is investigated. To evaluate the stability of stationary synchronous machine point, Lyapunov theorem of stability on the first approximation is used.

Keywords: stationary regime, generator and traction modes, excitation voltage, moment, static stability, convex set.