ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2011. Т. LXIV, № 4.

УДК 539.376 СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

С.Г. ЕСАЯН

К РЕШЕНИЮ ОСНОВНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ И СТАРЕНИЯ БЕТОНА

Разработан метод решения основных интегродифференциальных уравнений теории старения бетонов. Сущность метода заключается в том, что неизвестные функции (напряжение или информация) определяются разложением интегрального уравнения вязкоупругости в степенной ряд Тейлора по степеням характеристики ползучести данного материала.

Ключевые слова: бетон, характеристика ползучести, интегродифференциальное уравнение, ряд Тейлора, приближенное решение.

Для общности рассмотрим случай, когда на бетонную среду действуют все три составляющие компоненты нормальных напряжений, величина которых со временем может меняться: $\sigma_x(t), \sigma_y(t),\ \sigma_z(t)$. Тогда связь напряжение-деформация с учетом ползучести и старения бетона выразится интегральным уравнением

$$\varepsilon_i(t) = \frac{S_i(t)}{E(t)} + \frac{1}{E(\tau_0)}\int_{\tau_1}^{t} S_i(\tau)\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}d\tau, \qquad (1)$$

где $\varphi(\tau)$ – характеристика ползучести бетона [1]; $S_i(\tau) = \sigma_i(\tau) - \nu(t)[\sigma_x(\tau) + \sigma_y(\tau) + \sigma_z(\tau) - \sigma_i(\tau)]$; $\nu(t)$ – коэффициент Пуассона, величина которого зависит от возраста бетона; E(t) – модуль упругости, величина которого зависит от возраста бетона; τ_1 – начало времени приложения напряжений; τ – текущее время, $i = x, y, z$.

Из граничных условий, учитывая совместность деформаций, относительные деформации, кроме трех уравнений (1), дополнительно можно выразить через напряжения. В общем случае эта связь имеет вид [2]

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_x(t) = g_1 + g_{xx}\sigma_x(t) + g_{xy}\sigma_y(t) + g_{xz}\sigma_z(t);\\
&\varepsilon_y(t) = g_2 + g_{yx}\sigma_x(t) + g_{yy}\sigma_y(t) + g_{xz}\sigma_z(t);\\
&\varepsilon_z(t) = g_3 + g_{zx}\sigma_x(t) + g_{zy}\sigma_y(t) + g_{zz}\sigma_z(t),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где g – некоторые коэффициенты, определяемые из граничных условий.

Изменение величин напряжений со временем можно характеризовать через функцию $h_i(t)$:

$$
h_i(t) = \sigma_i(t)/\sigma_i(\tau_1). \tag{3}
$$

Подставляя (2) и (3) в (1) и разделив первую строчку на $\sigma_x(\tau_1)$, вторую на $\sigma_y(\tau_1)$, третью на $\sigma_z(\tau_1)$, приведем (1) к виду

$$
\begin{aligned}
&(1-g_{xx})h_x(t) - [v(t)+g_{xv}]Y_x h_y(t) - [v(t)+g_{xz}]Z_x h_z(t) = b_x(t),\\
&-[v(t)+g_{yx}]X_y h_x(t) + (1-g_{yy})h_y(t) - [v(t)+g_{yz}]Z_y h_z(t) = b_y(t),\\
&-[v(t)+g_{zx}]X_z h_x(t) - [v(t)+g_{zy}]h_y(t) + (1-g_{zz})h_z(t) = b_z(t);
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
&b_x(t) = E(t)\left\{g_x + \frac{1}{\overset{\circ}{A}(\tau_1)}\int_{\tau_1}^{t}\left\{h_x(\tau) - v(t)\left[Y_x h_y(\tau) + Z_x h_z(\tau)\right]\right\}\frac{\partial\varphi(\tau)}{\partial\tau}\,d\tau\right\},\\
&b_y(t) = E(t)\left\{g_y + \frac{1}{\overset{\circ}{A}(\tau_1)}\int_{\tau_1}^{t}\left\{h_y(\tau) - v(t)\left[X_y h_x(\tau) + Z_y h_z(\tau)\right]\right\}\frac{\partial\varphi(\tau)}{\partial\tau}\,d\tau\right\},\\
&b_z(t) = E(t)\left\{g_z + \frac{1}{\overset{\circ}{A}(\tau_1)}\int_{\tau_1}^{t}\left\{h_z(\tau) - v(t)\left[X_z h_x(\tau) + Y_z h_y(\tau)\right]\right\}\frac{\partial\varphi(\tau)}{\partial\tau}\,d\tau\right\},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_x = g_1/\sigma_x(\tau_1);\;\; g_y = g_2/\sigma_y(\tau_1);\;\; g_z = g_3/\sigma_z(\tau_1),\\
&X_y = \sigma_x(\tau_1)/\sigma_y(\tau_1) = 1/Y_x;\; Y_x = \sigma_y(\tau_1)/\sigma_x(\tau_1) = 1/X_y,\\
&X_z = \sigma_x(\tau_1)/\sigma_z(\tau_1) = 1/Z_x;\; Z_x = \sigma_z(\tau_1)/\sigma_x(\tau_1) = 1/X_z,\\
&Y_z = \sigma_y(\tau_1)/\sigma_z(\tau_1) = 1/Z_y;\; Z_y = \sigma_z(\tau_1)/\sigma_y(\tau_1) = 1/Y_z.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

В теории старения упругие коэффициенты бетона выражаются через характеристику ползучести $\varphi(t)$ [1]. Тогда не составляет труда уравнения (5) и (4) поочередно дифференцировать по φ. Подставляя в (4) и (5) $t=\tau_1$, находим коэффициенты $\varphi^{(n)}(\tau_1)$, где n – порядок дифференцирования. Значения коэффициентов изменения напряжений $h_i(t)$ находим разложением их в степенной ряд Тейлора по степеням $\varphi(t)$:

$$h_i(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi^n(t)}{n!} h_i^{(n)}(\tau_1). \qquad (7)$$

Останавливаясь на номере ряда N, получим приближенную формулу для $h_i(t)$:

$$h_i(t) \approx 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\varphi^n(t)}{n!} h_i^{(n)}(\tau_1). \qquad (8)$$

Эффективность предложенного метода иллюстрируем на примере одноосного напряженного состояния, принимая для наглядности $E(t) = E(\tau_1) = \text{const}$. Точное решение этой задачи будет

$$\sigma(t) = \sigma(\tau_1) e^{-\theta}, \qquad (9)$$

или функция изменения напряжения:

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\theta)^n}{n!}, \qquad (10)$$

где

$$\theta = \varphi(t) / [1 + gE(\tau_1)].$$

Очевидно, что ряд (10) представляет собой экспоненциальную функцию $e^{-\theta}$, что с точностью совпадает с решением (9).

Решение основных интегродифференциальных уравнений теории ползучести (1) и (4) можно получить также разложением искомого $h_i(t)$ непосредственно в степенной ряд Тейлора по степеням аргумента времени t:

$$h_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-\tau_1)^n}{n!} h_i^{(n)}(\tau_1), \qquad (11)$$

однако при этом для получения удовлетворительного приближенного значения $h_i(t)$ пришлось бы взять несравненно большее количество первых членов ряда (11). Это объясняется тем, что значения t изменяются в весьма широком диапазоне: от τ_1 до бесконечности, в то время как максимальное значение φ_∞ ограничено. Это видно из приведенных ниже числовых данных для разных бетонов [1]:

обычные тяжелые бетоны с крупным заполнителем - $\varphi_\infty = 1{,}0...4{,}0$;

легкие и пробужденные бетоны - $\varphi_\infty = 3{,}0...5{,}0$;

мелкозернистые тяжелые бетоны - $\varphi_\infty = 2{,}0...5{,}0$;

автоклавные мелкозернистые бетоны - $\varphi_\infty = 2{,}0...4{,}0$;

силикаты, глиносиликаты, силикальциты - $\varphi_\infty = 1{,}0...3{,}0$;

пеносиликаты и пеносиликальциты - $\varphi_\infty = 2{,}0...4{,}0$.

Необходимо также иметь в виду, что обычно значение θ не превосходит единицы $\theta \le 1$. Так, например, если взять симметрично армированный центрально сжатый железобетонный элемент, то тогда

$$g = 1/\mu E_s, \ \theta = m\mu\varphi/(1 + m\mu),$$

где μ – процент армирования; E_s – модуль упругости арматуры.

Если принять максимальное значение $\varphi_\infty = 5{,}0$, то получим $\theta = 1$. Расчеты показывают, что даже для этого предельного случая при оставлении первых трех членов расхождение между точными и приближенными значениями $h(t)$ не превышает 2,3%, что незначительно.

В таблице приведены точные (столбцы 1) и приближенные (столбцы 2) значения $h(\varphi, \mu)$ при N=3 и проценты расхождения между ними. Как видно из числовых данных таблицы, даже при самых предельных условиях ($\varphi_\infty = 4{,}0$ и $\mu = 3{,}0\%$) расхождение между точной и приближенной величинами $h(\varphi, \mu)$ составляет всего 6,0%, что тоже вполне приемлемо для практических расчетов.

Таблица

φ	$\mu = 0{,}015$		±, %	$\mu = 0{,}02$		±, %	$\mu = 0{,}025$		±, %	$\mu = 0{,}03$		±, %
	1	2		1	2		1	2		1	2	
1,0	0,878	0,878	0,0	0,844	0,844	0,0	0,819	0,819	0,0	0,795	0,795	0,0
2,0	0,770	0,770	0,0	0,719	0,719	0,0	0,670	0,670	0,0	0,630	0,631	-0,1
3,0	0,676	0,676	0,0	0,603	0,603	-0,1	0,544	0,549	-0,9	0,494	0,501	-1,4
4,0	0,592	0,594	-0,3	0,505	0,505	-1,3	0,440	0,449	-2,0	0,374	0,398	-6,0

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Улицкий И.И.** Теория и расчет железобетонных стержневых конструкций с учетом длительных процессов. – Киев: Будівельник, 1967. – 348 с.
2. **Есаян С.Г.** Реологическое моделирование вязкоупругих, упругопластических и вязкоупругопластических сред. – Ереван: Изд-во ГИУА ”Чартарагет”, 2009. – 367 с.

ГИУА (П). Материал поступил в редакцию 10.11.2010.

Ս.Գ. ԵՍԱՅԱՆ

ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂՔԻ ԵՎ ԾԵՐԱՑՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Մշակված է բետոնի սողքի հիմնային ինտեգրադիֆերենցիալ հավասարման լուծման մեթոդ: Այդ մեթոդի էությունն այն է, որ լարումների կամ դեֆորմացիաների անհայտ ֆունկցիայի անալիտիկ արտահայտությունն ստացվում է սողքի ինտեգրալ հավասարումը լուծելով Թեյլորի աստիճանային շարքի միջոցով, որը վերլուծվում է ըստ նյութի սողքի բնութագրի:

Առանցքային բառեր. բետոն, սողքի բնութագիր, ինտեգրադիֆերենցիալ հավասարում, Թեյլորի շարք, մոտավոր լուծում:

S.G. YESAYAN

TO THE SOLUTION OF BASIC INTEGRAL EQUATIONS IN CONCRETE CREEPING AND AGING THEORY

The method for solving basic integral differential equations in concrete aging theory is developed. The essence of the method is that unknown functions (stress or deformation) are defined by decomposition of integral viscous elasticity equations into Taylor power series by the degrees of the given material creeping characteristics.

Keywords: concrete, creeping characteristic, integral differential Taylor series, equation, approximate solution.