

В.С. САФАРЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСИММЕТРИЧНЫХ РЕЖИМОВ АСИНХРОННОЙ МАШИНЫ

Получена математическая модель переходного процесса асинхронной машины в натуральной форме. Показано ее преимущество по сравнению с математической моделью типа d, q.

Ключевые слова: асинхронная машина, переходный процесс, электромагнитный момент, критическое скольжение, механическая характеристика, прямая и обратная последовательности.

Несмотря на значительное число публикаций по переходным процессам асинхронных машин (АМ), до конца не выявлены многие явления и не получены количественные значения мгновенных токов и электромагнитных моментов при различных частотах вращения ротора [1-7]. Одной из основных причин является отсутствие математических моделей, позволяющих даже для простейших случаев синусоидального напряжения питания при неизменной частоте вращения ротора получить аналитические выражения для переходных процессов.

Целью настоящей работы является исследование режимов АМ при питании несимметричным напряжением.

Стационарной точкой работы АМ называется режим, при котором токи и потокосцепления машины являются синусоидальными и симметричными, а электромагнитный момент и угловая скорость вращения ротора (скольжение) - постоянными, причем стационарная точка может быть устойчивой или неустойчивой.

При питании АМ несимметричным синусоидальным напряжением она не имеет стационарной точки, в частности, электромагнитный момент не постоянен, т.е. фактически АМ работает в переходном режиме, который имеет некоторые специфические особенности.

Рассмотрим математическую модель переходного процесса АМ в так называемой натуральной форме, когда напряжения, токи, потокосцепления и электромагнитный момент представлены без преобразования.

Мгновенные значения фазных напряжений статора и ротора трехфазной конструктивно симметричной АМ даются уравнениями [2]

$$\begin{cases} u_s = R i_s + \frac{d\psi_s}{dt}, & s = A, B, C, \\ 0 = r i_r + \frac{d\psi_r}{dt}, & r = a, b, c, \end{cases} \quad (1)$$

где $R(r)$ - активное сопротивление обмотки фазы статора (ротора); $i_s(i_r)$ - токи в обмотках фазы статора (ротора); $\psi_s(\psi_r)$ - потокосцепления обмотки фазы статора (ротора).

Потокосцепления обмоток фаз статора и ротора даются уравнениями [2]

$$\begin{cases} \psi_A = (L - M)i_A + L_m[i_a \cos \alpha + i_b \cos(\alpha + 120) + i_c \cos(\alpha - 120)] \\ \psi_B = (L - M)i_B + L_m[i_a \cos(\alpha - 120) + i_b \cos \alpha + i_c \cos(\alpha + 120)] \\ \psi_C = (L - M)i_C + L_m[i_a \cos(\alpha + 120) + i_b \cos(\alpha - 120) + i_c \cos \alpha] \\ \psi_a = (\ell - m)i_a + L_m[i_A \cos \alpha + i_B \cos(\alpha - 120) + i_C \cos(\alpha + 120)] \\ \psi_b = (\ell - m)i_b + L_m[i_A \cos(\alpha + 120) + i_B \cos \alpha + i_C \cos(\alpha - 120)] \\ \psi_c = (\ell - m)i_c + L_m[i_A \cos(\alpha - 120) + i_B \cos(\alpha + 120) + i_C \cos \alpha] \end{cases} \quad (2)$$

где $L(\ell)$ - индуктивность обмотки фазы статора (ротора); $M(m)$ - взаимная индуктивность обмоток фазы статора (ротора); L_m - взаимная индуктивность между обмотками фазы статора и ротора при их параллельном расположении; α - угол между обмоткой фазы **a** ротора с неподвижной осью (обмотка фазы А статора) (рис. 1),

$$d\alpha/dt = \omega, \quad (3)$$

ω - угловая скорость ротора.

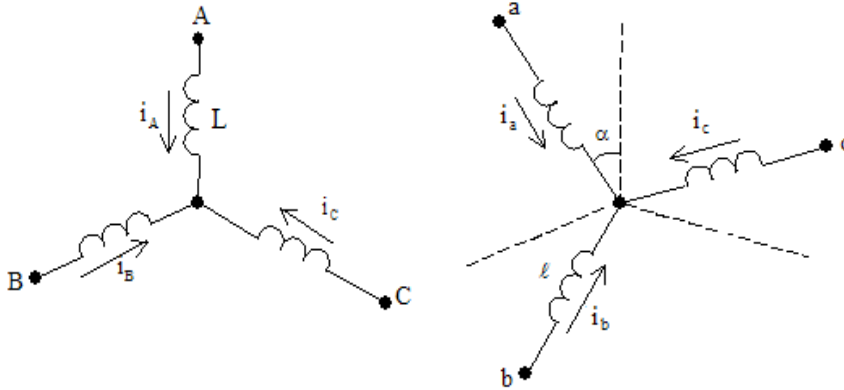


Рис. 1. Схематическое изображение АМ

Пользуясь очевидными соотношениями

$$\begin{cases} i_A + i_B + i_C = 0, \\ i_a + i_b + i_c = 0, \\ \psi_A + \psi_B + \psi_C = 0, \\ \psi_a + \psi_b + \psi_c = 0, \end{cases} \quad (4)$$

из системы уравнений (2), исключая переменные фазы С, получим

$$\begin{bmatrix} L - M & 0 & -\sqrt{3}L_m \sin(\alpha - 60) & -\sqrt{3}L_m \sin \alpha \\ 0 & L - M & \sqrt{3}L_m \sin \alpha & \sqrt{3}L_m \sin(\alpha + 60) \\ \sqrt{3}L_m \sin(\alpha + 60) & \sqrt{3}L_m \sin \alpha & \ell - m & 0 \\ -\sqrt{3}L_m \sin \alpha & -\sqrt{3}L_m \sin(\alpha - 60) & 0 & \ell - m \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \dot{i}_A \\ \dot{i}_B \\ \dot{i}_a \\ \dot{i}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_a \\ \Psi_b \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Детерминант матрицы в уравнении (5) не зависит от α и имеет вид

$$\det = [(L - M)(\ell - m) - L_m^2 \cdot 9/4]^2. \quad (6)$$

Решив уравнение (5) относительно токов, получим

$$\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \ell - m & 0 & \sqrt{3}L_m \sin(\alpha - 60) & \sqrt{3}L_m \sin \alpha \\ 0 & \ell - m & -\sqrt{3}L_m \sin \alpha & -\sqrt{3}L_m \sin(\alpha + 60) \\ -\sqrt{3}L_m \sin(\alpha + 60) & -\sqrt{3}L_m \sin \alpha & L - M & 0 \\ \sqrt{3}L_m \sin \alpha & \sqrt{3}L_m \sin(\alpha - 60) & 0 & L - M \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_a \\ \Psi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{i}_A \\ \dot{i}_B \\ \dot{i}_a \\ \dot{i}_b \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\Delta = (L - M)(\ell - m) - L_m^2 \cdot 9/4 > 0.$$

С учетом (1) и (7) уравнения электромагнитных переходных процессов АМ даются в виде

$$-\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} R(\ell - m) & 0 & \sqrt{3}RL_m \sin(\alpha - 60) & \sqrt{3}RL_m \sin \alpha \\ 0 & R(\ell - m) & -\sqrt{3}RL_m \sin \alpha & -\sqrt{3}RL_m \sin(\alpha + 60) \\ -\sqrt{3}rL_m \sin(\alpha + 60) & -\sqrt{3}rL_m \sin \alpha & r(L - M) & 0 \\ \sqrt{3}rL_m \sin \alpha & \sqrt{3}rL_m \sin(\alpha - 60) & 0 & r(L - M) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_a \\ \Psi_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\Psi}_A \\ \dot{\Psi}_B \\ \dot{\Psi}_a \\ \dot{\Psi}_b \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где u_A, u_B - напряжения, приложенные к шинам статора АМ.

Дополнив систему уравнений (8) уравнением электромеханического переходного процесса [2]

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{\ominus} - M_m, \quad (9)$$

получим полную систему дифференциальных уравнений переходного процесса АМ в натуральном виде, где J - момент инерции ротора; M_m - механический момент на валу ротора; M_{\ominus} - электромагнитный момент АМ [2], равный

$$M_{\sigma} = \sqrt{3}[\psi_A(i_B - i_C) - i_A(\psi_B - \psi_C)]/2. \quad (10)$$

Представим систему уравнений переходного процесса в виде

$$\begin{cases} \dot{\psi} = A\psi + u, \\ \dot{\omega} = (M_{\sigma} - M_m)/J, \end{cases} \quad (11)$$

где первое уравнение (11) представляет матричную запись (8). Уравнения (11) представляют систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, решение которой невозможно представить в аналитической форме.

Преобразование Парка-Горева сведет систему дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами к системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим систему уравнений электромагнитных переходных процессов в форме d, q [2]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_{sd} \\ \dot{\psi}_{sq} \\ \dot{\psi}_{rd} \\ \dot{\psi}_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Rl_{sd} & -\omega_0 & -Rl_{md} & 0 \\ -\omega_0 & -Rl_{sq} & 0 & -Rl_{mq} \\ -rl_{md} & 0 & rl_{rd} & \omega_0 - \omega \\ 0 & -rl_{mq} & -(\omega_0 - \omega) & -rl_{rq} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \\ \psi_{rd} \\ \psi_{rq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_d \\ U_q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где $\psi_{sd}, \psi_{sq} (\psi_{rd}, \psi_{rq})$ - проекции обобщенного вектора потокосцепления статорной (роторной) обмотки по осям d и q ; $l_{sd}, l_{sq}, l_{rd}, l_{rq}, l_{md}, l_{mq}$ - коэффициенты, определяемые конструктивными параметрами машины [2]; U_d, U_q - проекция обобщенного вектора напряжения на шине статора по осям d и q ; ω_0 - угловая скорость вращения координатной системы d, q .

Уравнение (12) является линейным с постоянными коэффициентами и описывает электромагнитные переходные процессы при заданном движении (ω) ротора.

Если напряжения на шинах машины несимметричны, то в системе координат d, q обобщенные векторы напряжения, потокосцепления, тока меняются по модулю и вращаются с переменной угловой скоростью, что вызывает трудности при исследовании переходных процессов АМ. Отметим также, что для учета прямой и обратной последовательностей напряжений метод наложения неприменим к системе (11) ввиду ее нелинейности. Учет напряжений прямой и обратной последовательностей в модели (11) осуществляется непосредственно, поскольку в (11) напряжения статора входят в натуральной форме.

Рассмотрим решение первого уравнения (11) при несимметричном напряжении на шинах статора ($u = u_{пр} + u_{обр}$), пренебрегая нулевой составляющей напряжения, так как последняя не создает токов, магнитных потоков и электромагнитного момента:

$$\dot{\psi} = A\psi + u_{пр} + u_{обр}. \quad (13)$$

Уравнение (13) описывает движение машины при заданной скорости ротора (ω) и представляет систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами с периодом $T = 2\pi/\omega$.

Исходя из физических соображений, можно утверждать, что при действии напряжения прямой последовательности токи и потокосцепления статора и ротора получаются симметричными соответственно с частотами ω_s и $\omega_s - \omega$ ($s \cdot \omega_s$), а при действии напряжения обратной последовательности - соответственно с угловыми частотами ω_s и $\omega_s + \omega$ ($(2-s) \cdot \omega_s$). При их сложении соответствующие роторные величины получаются несинусоидальными, но электромагнитный момент согласно (10) - синусоидальным с частотой $2\omega_s$.

Построим механическую характеристику АМ при пульсирующем магнитном поле ($U_{пр} = U_{обр}$) (рис. 2). Для каждого значения угловой скорости вращения ротора определяется среднее значение момента.

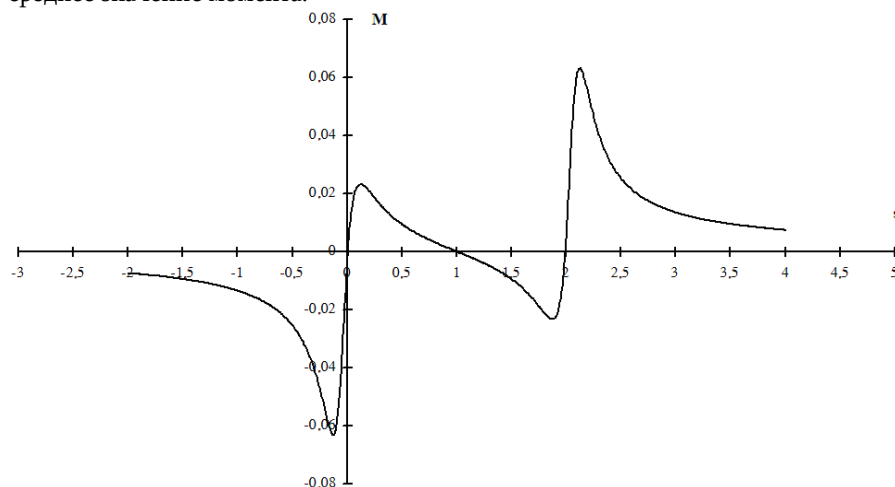


Рис. 2. Механическая характеристика АМ при пульсирующем напряжении

Поскольку для симметричных составляющих трехфазной цепи метод наложения применим также к средним значениям мощностей цепи, то график на рис. 2 получается суммированием графиков (по ординатам) для отдельных последовательностей.

Наличие напряжения обратной последовательности ухудшает пусковые характеристики машины, и если $U_{пр} = U_{обр}$, то пусковой момент исчезает, а также появляется новое критическое скольжение, максимальный момент в двигательном режиме уменьшается, а максимальный момент генераторного режима увеличивается (по модулю). Токи статора получаются синусоидальными с частотой ω_s , но несимметричными. Токи ротора складываются из синусоид с частотами $s \cdot \omega_s$ и $(2-s) \cdot \omega_s$:

$$i_r = A_1 \sin(s\omega_s t + \psi_1) + A_2 \sin((2-s)\omega_s t + \psi_2). \quad (14)$$

При различных значениях s получаем соответствующие гармоники.

При $s = 0,3$ имеем

$$i_r = A_1 \sin(0,3\omega_s t + \psi_1) + A_2 \sin(1,7\omega_s t + \psi_2) = A_1 \sin(3 \cdot 0,1\omega_s t + \psi_1) + A_2 \sin(17 \cdot 0,1\omega_s t + \psi_2) = A_1 \sin(3\omega' t + \psi_1) + A_2 \sin(17\omega' t + \psi_2) \quad \omega' = 0,1\omega_s.$$

На рис. 3 изображен ток i_r (14) при $s = 0,3$.

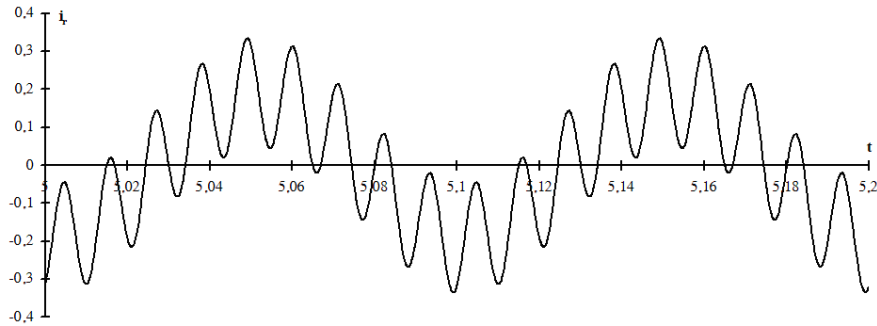


Рис 3. Ток ротора (i_r) при питании АМ напряжением прямой и обратной последовательностей

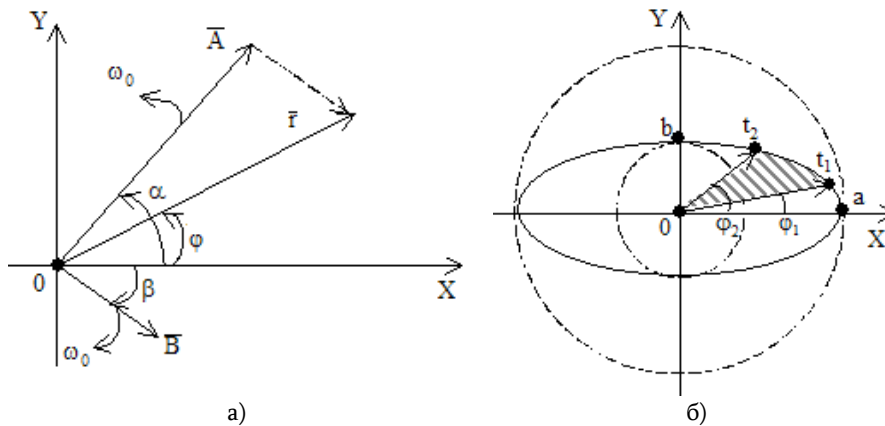


Рис 4. Расположение обобщенного вектора $\bar{\Gamma}$ (а) и его траектория (б)

Предположим, на шине статора действуют напряжения прямой и обратной последовательностей, соответствующие векторы которых (\bar{A} и \bar{B} , рис. 4а) вращаются в противоположных направлениях с угловой скоростью ω_0 . Вычислим мгновенные значения модуля (Γ) и угловой скорости (ω) результирующего вектора.

Из рис. 4а имеем

$$\begin{cases} x = A \cos \alpha + B \cos \beta, \\ y = A \sin \alpha + B \sin \beta, \end{cases} \quad (15)$$

где $\alpha = \alpha_0 + \omega_0 t$, $\beta = \beta_0 - \omega_0 t$; α_0 , β_0 - начальные положения векторов.

Без ущерба для общности примем $\alpha_0 = -\beta_0 = \gamma$ (этого можно достичь поворотом координатных осей). Тогда уравнения (15) примут вид (параметрическое уравнение эллипса)

$$\begin{cases} x = a \cos(\omega_0 t + \gamma), \\ y = b \sin(\omega_0 t + \gamma), \end{cases} \quad (16)$$

где $a = A + B$, $b = A - B$.

Для $r(t)$ получим

$$r^2(t) = a^2 \cos^2(\omega_0 t + \gamma) + b^2 \sin^2(\omega_0 t + \gamma). \quad (17)$$

Линейная скорость движения конца обобщенного вектора равна

$$V_x = \dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \gamma),$$

$$V_y = \dot{y} = b\omega_0 \cos(\omega_0 t + \gamma),$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \omega_0 \sqrt{a^2 \sin^2(\omega_0 t + \gamma) + b^2 \cos^2(\omega_0 t + \gamma)},$$

угловая скорость вращения обобщенного вектора:

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{1}{1 + y^2/x^2} \cdot \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2} = \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2 + y^2} = \frac{A^2 - B^2}{r^2} \omega_0.$$

Покажем, что обобщенный вектор за равные промежутки времени описывает одинаковые площади. Площадь заштрихованной области (рис. 4б) определяется в виде

$$2S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \sin(d\varphi) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi = \int_{t_1}^{t_2} r^2 \omega dt = \int_{t_1}^{t_2} (A^2 - B^2) \omega_0 dt = (A^2 - B^2) \omega_0 (t_2 - t_1). \quad (18)$$

Поскольку площадь, описываемая обобщенным вектором, прямо пропорциональна энергии магнитного поля в воздушном зазоре машины, то, представив (18) в виде $dS/dt = 0,5 \cdot (A^2 - B^2) \omega_0$, заключаем, что мощность магнитного поля в воздушном зазоре машины распределена равномерно.

Известно [6], что отображение действительной оси S (скольжение) на комплексной плоскости $P + jQ$ осуществляется дробно-линейной функцией комплексной переменной (рис. 5а), где P , Q - составляющие мощности, потребляемой АМ (считаются положительными, если они поступают от внешней сети, и отрицательными - в противном случае).

Дробно-линейное отображение для прямой последовательности имеет вид [6]

$$\tilde{S}_1 = \alpha \frac{s+\beta}{s+\gamma} \cdot U_1^2, \quad (19)$$

где α , β , γ - комплексные константы, зависящие от конструктивных параметров АМ; U_1 - модуль напряжения прямой последовательности.

Аналогично для обратной последовательности имеем

$$\tilde{S}_2 = \alpha \frac{2-s+\beta}{2-s+\gamma} \cdot U_2^2, \quad (20)$$

где U_2 - модуль напряжения обратной последовательности.

Поскольку принцип наложения для симметричных последовательностей применим также к мощностям, то

$$\tilde{S} = \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 = \alpha \frac{\beta'-v}{\gamma'-v} \cdot U_1^2 + \alpha \frac{\beta'+v}{\gamma'+v} \cdot U_2^2, \quad (21)$$

где $\beta' = \beta + 1$, $\gamma' = \gamma + 1$, $v = 1 - s$.

При пульсирующем напряжении ($U_1 = U_2 = U$) выражение (21) принимает вид

$$\tilde{S} = 2\alpha \frac{\beta'\gamma' - v^2}{\gamma'^2 - v^2} \cdot U^2. \quad (22)$$

Отображения (19) и (21) представлены соответственно на рис. 5а и б. Очевидно, что отображение (21) не является дробно-линейным.

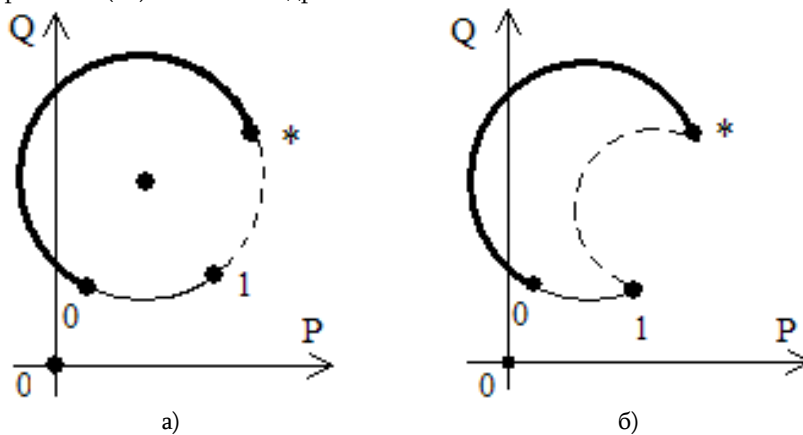


Рис. 5. Отображение комплексной мощности ($P + jQ$) от скольжения при отсутствии (а) и наличии (б) обратной составляющей напряжения статора

На отображениях рис. 5 каждой точке окружности соответствует определенное значение скольжения (на рис. 5 обозначены точки со значениями скольжений 0 и 1). Точка "*" соответствует скольжению $s \rightarrow \pm\infty$, так как из (19) следует

$\tilde{S}(s \rightarrow \infty) = \tilde{S}(s \rightarrow -\infty) = \alpha$. Сплошной толстой линией обозначен генераторный режим ($s \in [0, -\infty)$), сплошной линией - двигательный режим ($s \in [0, 1]$), пунктирной линией - тормозной режим ($s \in [1, \infty)$).

Выводы

1. Получена математическая модель переходного процесса АМ в натуральном виде, выявлено ее преимущество по сравнению с моделью типа d, q .
2. Исследован переходный процесс АМ при питании ее синусоидальным несимметричным напряжением, приведены графики механической характеристики и зависимости тока ротора от времени.
3. Показано, что обобщенный вектор несимметричного напряжения (тока) при вращении за равные промежутки времени описывает одинаковые площади, т.е. мощность магнитного поля в воздушном зазоре распределена равномерно.
4. Выявлено, что отображение комплексной входной мощности АМ от скольжения при несимметричном напряжении отличается от дробно-линейного (21) и имеет форму, приведенную на рис. 5б.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Важнов А.И.** Переходные процессы в машинах переменного тока. - Л.: Энергия, 1980. - 256 с.
2. **Ковач К.П., Рац И.** Переходные процессы в машинах переменного тока. - М.: Государственное энергетическое издательство, 1963. - 744 с.
3. **Вольдек А.И.** Электрические машины. - Л.: Энергия, 1978. - 832 с.
4. **Иванов-Смоленский А.В.** Электрические машины. - М.: Энергия, 1980. - 927 с.
5. **Копылов И.П.** Математическое моделирование электрических машин. - М.: Высшая школа, 2001. - 327 с.
6. **Сафарян В.С.** Анализ энергетических процессов асинхронной машины в стационарном режиме // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2009. - Т. 62, № 4. - С. 417 - 425.
7. **Хрисанов В.И., Ямамура С.** Спирально-векторный метод анализа и моделирования асинхронных двигателей при квазиустановившихся и переходных процессах // Электротехника. - 2006. - № 4. - С. 142 - 145.

ЗАО "НИИ Энергетики". Материал поступил в редакцию 10.03.2010.

Վ.Ս. ՄԱՖԱՐՅԱՆ

ԱՍԻՆՔՐՈՆ ՄԵՔԵՆԱՅԻ ԱՆՀԱՄԱՉԱՓ ՌԵՃԻՄՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Ստացվել է ասինքրոն մեքենայի անցումային գործընթացի մաթեմատիկական մոդելը բնական տեսքով: Ցույց է տրվում նրա առավելությունը d, q տիպի մաթեմատիկական մոդելի նկատմամբ:

Առանցքային բառեր. ասինքրոն մեքենա, անցումային գործընթաց, էլեկտրամագնիսական մոմենտ, կրիտիկական սահք, մեխանիկական բնութագիր, ուղիղ և հակադարձ հաջորդականություններ:

V.S. SAFARYAN

ASYMMETRIC MODES OF ASYNCHRONOUS MACHINE INVESTIGATION

A mathematic model of asynchronous machine transition process in a natural form is obtained. Its advantage compared with the mathematical model of d, q type is shown.

Keywords: asynchronous machine, transition process, electromagnetic moment, critical sliding, mechanical characteristics, direct and indirect sequences.