

Ա.Գ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՄՈՒՐ-ՊԵՆՐՈՈՒԶԻ ԿԵՂԾ ՀԱԿԱԴԱՐՁՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿ՝ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՄԲ

Առաջարկված է պարամետրական մատրիցների Մուր-Պենրոուզի կեղծ հակադարձների որոշման պարզ եղանակ՝ հիմնված դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա:

Առանցքային բառեր. պարամետրական մատրից, կեղծ հակադարձ մատրից, մատրիցային հավասարում, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ:

Ներածություն: Գիտության և տեխնիկայի զանազան խնդիրների լուծման ժամանակ հաճախ առաջանում են այնպիսի իրավիճակներ, երբ անհրաժեշտություն է առաջանում որոշել պարամետրական մատրիցների կեղծ հակադարձները: Սույն աշխատանքը նպատակաուղղված է այդ խնդրի լուծման հնարավոր եղանակներից մեկի ներկայացմանը:

1. Ենթադրենք՝ ունենք $m \times n$ չափերով կամայական $A(t)_{m \times n}$ մատրիցը, և անհրաժեշտ է որոշել նրան համապատասխան $n \times m$ չափերով $A^+(t)_{n \times m} = X(t)$ Մուր-Պենրոուզի ընդհանրացված կեղծ հակադարձ մատրիցը: Հայտնի է, որ $A(t)_{m \times n}$ և $A^+(t)_{n \times m}$ մատրիցների համար տեղի ունեն հետևյալ առնչությունները [1-3].

$$A^T(t) \cdot A(t) \cdot A^+(t) = A^T(t), \quad (1)$$

$$A^+(t) \cdot A(t) \cdot A^T(t) = A^T(t): \quad (2)$$

Կատարելով

$$B_{n \times n}(t) = A^T(t)A(t) \quad (3)$$

և

$$C_{m \times m}(t) = A(t)A^T(t), \quad (4)$$

նշանակումները և հաշվի առնելով (1) և (2) առնչությունները, կունենանք՝

$$B(t) \cdot X(t) = A^T(t), \quad (5)$$

$$X(t) \cdot C(t) = A^T(t): \quad (6)$$

Ուստի, գումարելով (5) և (6) առնչությունները, կստանանք՝

$$B(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot C(t) = D(t), \quad (7)$$

որտեղ $D(t) = 2 \cdot A^T(t)$:

Փաստորեն ունենք գծային համակարգերի տեսության մեջ լայնորեն, այսպես կոչված, Միլվեստրի տիպի մատրիցային հավասարում [5], որի $X(t)$

լուծումը միարժեքորեն գոյություն ունի, եթե գոյություն ունի (5)-ի կամ (6)-ի $X(t)$ լուծումը: Սակայն այստեղ պետք է նկատել նաև հետևյալը. (5) և (6) արտահայտություններից (7)-ին անցնելիս վերջինս, բացի (5) և (6) -ին բավարարող $X(t)$ լուծումից, կարող է «ձեռք բերել» նաև այնպիսի $X(t)$ լուծումներ, որոնք, սակայն, չեն բավարարի (5)-ին և (6)-ին: Ուստի (7)-ի նման տիպի «կողմնակի» լուծումները նախնական խնդրի լուծումներ չեն կարող լինել՝ նրա $X^*(t)$ լուծման գոյության և միակության թեորեմներին հակասելու պատճառով:

2. Այժմ պարամետրական (7) արտահայտությունից թվային արտահայտությունների անցնելու նպատակով դրանք ենթարկենք դիֆերենցիալ ձևափոխությունների [4], որոնց ընդհանուր արտահայտությունները հետևյալներն են.

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K x(t)}{\partial t^K} \Big|_{t=t_0}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \text{---} \quad x(t) = \mathcal{N}(t, t_v, H, X(K)), \quad (8)$$

որտեղ $X(K)$ -ն $x(t)$ բնօրինակի պատկերն է կամ դիսկրետը, H -ը՝ մասշտաբային գործակիցը, $t_v \in [t_0, T]$ -ն՝ մոտարկման կենտրոնը, ընդ որում, t_0 -ն գործընթացի սկիզբն է, T -ն՝ վերջը, $\mathcal{N}(\cdot)$ -ն՝ ինչ-որ մոտարկող ֆունկցիա, որն օգտագործվում է $x(t)$ բնօրինակը վերականգնելու համար:

Այդ դեպքում, իհարկե, ենթադրելով, որ (7)-ի մեջ մտնող բոլոր առնչություններն անալիտիկ են, (7) արտահայտությունը դիֆերենցիալ ձևափոխությունների տիրույթում կներկայացվի հետևյալ կերպ՝

Եթե $K=0$, ապա՝

$$B(0)X(0) + X(0)C(0) = D(0) = \overline{D}(0); \quad (9)$$

Եթե $K=1$, ապա՝

$$B(0)X(1) + B(1)X(0) + X(0)C(1) + X(1)C(0) = D(1),$$

որտեղից՝

$$B(0)X(1) + X(1)C(0) = D(1) - (B(1)X(0) + X(0)C(1)) = \overline{D}(1); \quad (10)$$

Եթե $K=2$, ապա՝

$$B(0)X(2) + B(1)X(1) + B(2)X(0) + X(0)C(2) + X(1)C(1) + X(2)C(0) = D(2),$$

որտեղից՝

$$B(0)X(2) + X(2)C(0) = D(2) - (B(1)X(1) + B(2)X(0) + X(1)C(1) + X(0)C(2)),$$

կամ էլ՝

$$\begin{aligned} B(0)X(2) + X(2)C(0) &= D(2) - \left(\sum_{p=1}^2 B(p) \cdot X(2-p) + \sum_{p=1}^2 X(p) \cdot C(2-p) \right) = \\ &= \overline{D}(2); \end{aligned} \quad (11)$$

.....
Եթե $K=K$, ապա՝

$$\sum_{p=0}^K B(p)X(K-p) + \sum_{p=0}^K X(p)C(K-p) = 2 \cdot A^T(K), \quad K = \overline{0, \infty},$$

որտեղից՝

$$B(0)X(K) + X(K)C(0) + \sum_{p=1}^K B(p)X(K-p) + \sum_{p=1}^K X(p)C(K-p) = D(K), \quad K = \overline{0, \infty}$$

կամ էլ՝

$$B(0)X(K) + X(K)C(0) = \overline{D}(K), \quad (12)$$

որտեղ՝

$$\overline{D}(K) = D(K) - \left(\sum_{p=1}^K B(p)X(K-p) + \sum_{p=1}^K X(p)C(K-p) \right): \quad (13)$$

Այսպիսով, Միլվեստրի տիպի (9)-(12) մատրիցային հավասարումների հաջորդաբար լուծման արդյունքում կստացվեն $X(0), \dots, X(K)$ մատրիցային դիսկրետները, որոնց միջոցով, ըստ (8)-ի աջ մասի, հեշտությամբ կգտնվի խնդրի $X^*(t) \equiv A^+(t)$ լուծումը:

3. Թեստային օրինակ: Դիցուք տրված է հետևյալ ոչ ավտոնոմ վերածվող մատրիցը [6].

$$A(t) = \begin{bmatrix} (t+1) & t & t & t & (t+1) \\ t & (t-1) & t & t & t \\ t & t & (t+1) & t & t \\ t & t & t & (t-1) & t \\ (t+1) & t & t & t & (t+1) \end{bmatrix} :$$

$t_v = 0$ մոտարկման կենտրոնի և $H = 1$ մասշտաբային գործակցի դեպքում մատրիցային դիսկրետները հետևյալներն են՝

$$A(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A(K) = \{0\}, \quad K \geq 2:$$

Ուստի ըստ (3)-ի, (4)-ի և (13)-ի համապատասխանաբար $B(t)$, $C(t)$ և $D(t)$ մատրիցների համար ունենք հետևյալ մատրիցային դիսկրետները՝

$$\begin{aligned}
B(0) = C(0) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B(1) = C(1) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \\
B(2) = C(2) &= \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}, \quad B(K) = C(K) = \{0\}, \quad K \geq 3, \\
D(0) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D(1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad D(K) = \{0\}, \quad K \geq 2 :
\end{aligned}$$

Մատրիցային հավասարումների լուծման Բարտելս-Ստյուարտի հայտնի եղանակով [5] հերթականությամբ լուծելով (9)-(12)-ին համապատասխան հավասարումները՝ կստացվեն $X(t)$ -ի մատրիցային դիսկրետները:

$K=0$ դեպքում (9)-ից ունենք՝

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot X(0) + X(0) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

որի դեպքում, ըստ Բարտելս-Ստյուարտի եղանակի, կունենանք հետևյալ հավասարումը՝

$$\tilde{B}(0)Y(0) + Y(0)\tilde{C}(0) = \tilde{D}(0), \quad (14)$$

որտեղ՝

$$\tilde{B}(0) = \tilde{C}(0) \equiv U_B(0)^T B(0) U_B(0) = U_C(0)^T C(0) U_C(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$U_B(0) = U_C(0) = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0.7071 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0.7071 \end{bmatrix}, \tilde{D}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

ընդ որում՝

$$X(0) = U_B(0)Y(0)U_C^T(0):$$

(14)-ից կունենանք՝

$$Y(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

որից հետո՝

$$X(0) = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}:$$

$K=1$ դեպքում (10)-ից ունենք՝

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot X(1) + X(1) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 2.5 & -2.5 & 2.5 & -2 \\ 2.5 & -2 & 2 & -2 & 2.5 \\ -2.5 & 2 & -2 & 2 & -2.5 \\ 2.5 & -2 & 2 & -2 & 2.5 \\ -2 & 2.5 & -2.5 & 2.5 & -2 \end{bmatrix},$$

ուստի, Բարտելս-Ստյուարտի եղանակի համաձայն, կունենանք հետևյալ հավասարումը՝

$$\tilde{B}(0)Y(1)+Y(1)\tilde{C}(0)=\tilde{D}(1), \quad (15)$$

որտեղ՝

$$\tilde{D}(1)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 3.5355 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -3.5355 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -3.5355 \\ 0 & 3.5355 & -3.5355 & -3.5355 & -4 \end{bmatrix},$$

ընդ որում՝

$$X(1)=U_B(0)Y(1)U_C^T(0):$$

Հետևաբար, (15)-ից կունենանք՝

$$Y(0)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0.7071 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -0.7071 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -0.7071 \\ 0 & 0.7071 & -0.7071 & -0.7071 & -0.5 \end{bmatrix},$$

որից հետո՝

$$X(1)=\begin{bmatrix} -0.25 & 0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.25 \\ 0.5 & -1 & 1 & -1 & 0.5 \\ -0.5 & 1 & -1 & 1 & -0.5 \\ 0.5 & -1 & 1 & -1 & 0.5 \\ -0.25 & 0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.25 \end{bmatrix}:$$

Մնացած դիսկրետների համար ունենք՝ $X(K)=\{0\}, K \geq 2$:

Դժվար չէ համոզվել, որ ըստ այս մատրիցային դիսկրետների վերականգնված բնօրինակը ճշգրտորեն համընկնում է անալիտիկ եղանակով ստացվող կեղծ հակադարձ մատրիցին, որն ունի հետևյալ տեսքը.

$$A^+(t)=\begin{bmatrix} (0.25-0.25t) & 0.5t & -0.5t & 0.5t & (0.25-0.25t) \\ 0.5t & (-1-t) & t & -t & 0.5t \\ -0.5t & t & (1-t) & t & -0.5t \\ 0.5t & -t & t & (-1-t) & 0.5t \\ (0.25-0.25t) & 0.5t & -0.5t & 0.5t & (0.25-0.25t) \end{bmatrix}:$$

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Ավինյան Վ.Ռ., Մելիքյան Ա.Վ., Կյուրեղյան Ա.Լ., Ղազարյան Դ.Ա. Պարամետրական մատրիցների կեղծ հակադարձների որոշման եղանակ՝ հիմնված Տիխոնովի ռեգուլյարացման մեթոդի վրա // ՀՊՃՀ Բանբեր, «Մոդելավորում, օպտիմալացում, կառավարում» սերիա.- 2010.- Թող. 13, հ.2. - էջ 135-140:
2. Միսոնյան Ս.Հ., Ավետիսյան Ա.Գ., Ավինյան Վ.Ռ., Միսոնյան Ա.Ս. Պարամետրական մատրիցների ընդհանրացված հակադարձների որոշման մի մեթոդի մասին // ՀՃԱ Լրաբեր.- 2009. - Հ. 6, N 2.- էջ 160-167:
3. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. - М.: Наука, 1997. - 224 с.
4. Пухов Г.Е. Дифференциальные спектры и модели. -Киев: Наукова думка, 1990. - 230 с.
5. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. -М.: Наука, 1984.-190 с.
6. Stanimirovic P.S., Tasic M. B., Krtolica P.V., Karampetakis N.P. Generalized Inversion by Interpolation // Filomat. -2007. -Vol. 21, No. 1. -P. 67-86.

ՀՊՃՀ (Պ). Նյութը ներկայացվել է խմբագրություն 14.07.2010:

Ա.Գ. АВЕТИСЯН

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПСЕВДООБРАТНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ МУРА-ПЕНРОУЗА РЕШЕНИЕМ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предложен простой метод для определения параметрических псевдообратных матриц Мура-Пенроуза на основе дифференциальных преобразований.

Ключевые слова: параметрическая матрица, псевдообратная матрица, матричные уравнения, дифференциальные преобразования.

A.G. AVETISYAN

A METHOD OF DEFINING MOOR-PENROUS' GENERALIZED PSEUDOINVERSE PARAMETRIC MATRICE VIA SOLVING MATRIX EQUATIONS

A simple method for defining Moor-Penrous' generalized pseudoinverse parametric matrice based on differential transforms is proposed.

Keywords: parametric matrix, generalized pseudoinverse matrix, matrix equation, differential transforms.