

С.О. СИМОНЯН, М.Д. ТАМАЗЯН, А.К. ВАСИЛЯН

ДП-АНАЛОГ МЕТОДА САМУЭЛЬСОНА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ
КОЭФФИЦИЕНТОВ-ФУНКЦИЙ СОБСТВЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ
НЕАВТОНОМНЫХ МАТРИЦ

Предложен достаточно простой численно-аналитический метод определения коэффициентов-функций собственных многочленов неавтономных матриц.

Ключевые слова: неавтономная матрица, собственный многочлен, дифференциально-падеевские (ДП) преобразования.

Введение. Дифференциальные преобразования, в которых оригинал разыскивается в виде дробно-рациональной функции, называются дифференциальными преобразованиями Паде (ДП - преобразования). При этом аппроксимирующая функция представляется в виде отношения двух степенных полиномов и обладает радиусом сходимости, равным радиусу сходимости соответствующего ряда Тейлора [1].

ДП - преобразования записываются в виде

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \left[\frac{d^K x(t)}{dt^K} \right]_{t=t_v=0} \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \frac{a_0 + a_1 \cdot \tau + \dots + a_m \cdot \tau^m}{1 + b_1 \cdot \tau + \dots + b_n \cdot \tau^n} + \rho(\tau), \quad (1)$$

где $x(t)$ - оригинал; $t_v=0$ - маклореновский центр аппроксимации; $X(K)$, $K=\overline{0, \infty}$ - изображения оригинала $x(t)$; $\tau = tH^{-1}$ - относительный аргумент; a_μ , $\mu=\overline{0, m}$ и b_v , $v=\overline{1, n}$ - некоторые постоянные; $\rho(\tau)$ - известная функция, причем $m \leq n$.

Обозначив $\bar{X}(t) = X(t) - \rho(t)$, из правой части (1) нетрудно получить так называемое спектральное уравнение [1]

$$\begin{aligned} \bar{X}(K) + b_1 \cdot \bar{X}(K-1) + b_2 \cdot \bar{X}(K-2) + \dots + b_n \cdot \bar{X}(K-n) = \\ = a_0 \cdot \bar{X}(K) + a_1 \cdot \bar{X}(K-1) + \dots + a_m \cdot \bar{X}(K-m). \end{aligned}$$

Отсюда при $m > K$ имеем следующую линейную относительно коэффициентов b_v алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} \bar{X}(m) & \bar{X}(m-1) & \dots & \bar{X}(m-n+1) \\ \bar{X}(m+1) & \bar{X}(m) & \dots & \bar{X}(m-n+2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{X}(m+n-1) & \bar{X}(m+n-2) & \dots & \bar{X}(m) \end{bmatrix}_{n \times n} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{n \times 1} = - \begin{pmatrix} \bar{X}(m+1) \\ \bar{X}(m+2) \\ \dots \\ \bar{X}(m+n) \end{pmatrix}_{n \times 1}. \quad (2)$$

Из (2) однозначно могут быть определены коэффициенты b_v в предположении, что матрица системы (2) невырожденная.

Коэффициенты a_μ определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & b_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)} \cdot \begin{pmatrix} \bar{X}(0) \\ \bar{X}(1) \\ \bar{X}(2) \\ \dots \\ \bar{X}(m) \end{pmatrix}_{(m+1) \times 1} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}_{(m+1) \times 1}. \quad (3)$$

Очевидно, что матрица этой системы невырожденная.

Краткое представление математического аппарата метода Самуэльсона [2, 3] для неавтономных матриц. По аналогии с методом Самуэльсона для числовых матриц, вычислительная схема для определения коэффициентов-функций собственных многочленов неавтономных матриц выглядит следующим образом: вычисляется прямоугольная матрица с размерами $(n \times 2n)$ [4]:

$$\begin{bmatrix} R(t) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -a_{11}(t) \\ R(t)M(t) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{11}(t) & -R(t)S(t) \\ R(t)M^2(t) & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{11}(t) & -R(t)S(t) & -R(t)M(t)S(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R(t)M^{n-1}(t) & 1 & -a_{11}(t) & -R(t)S(t) & \dots & \dots & \dots & \dots & -R(t)M^{n-2}(t)S(t) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $R(t)$, $S(t)$ и $M(t)$ - клетки в следующем разбиении рассматриваемой матрицы:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & | & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots & | & \dots & \dots & \dots \\ a_{21}(t) & | & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & | & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & | & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t)_{1 \times 1} & | & R(t)_{1 \times (n-1)} \\ \dots & | & \dots \\ S(t)_{(n-1) \times 1} & | & M(t)_{(n-1) \times (n-1)} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Далее посредством элементарных преобразований (как это делается в задаче исключения) добиваются того, чтобы на месте $R(t)M^{n-1}(t)$ появились нулевые элементы. Тогда остальные элементы последней строки дадут, вообще говоря, коэффициенты-функции собственного многочлена. Процесс исключения однообразен и прост, что является основным достоинством этой схемы. Указанная схема обычно выводится преобразованием системы n линейных дифференциальных уравнений,

связанной с исходной матрицей, в одно дифференциальное уравнение порядка n посредством специального приема исключения [2-4].

Относительные преимущества ДП-преобразований. Метод Самуэльсона в основном использует операции деления, поэтому, по-видимому, здесь целесообразно использование ДП - преобразований. Убедимся в этом на следующем простом примере.

Пример 1. Пусть имеем $x(t)=1/(t+1)$. При центре аппроксимации $t_0=0$ дискретами этой функции будут $X(0)=1, X(1)=-1, X(2)=1, X(3)=-1, X(4)=1$ и т.д.

Результаты дальнейших вычислений при использовании дифференциально-тейлоровских (ДТ-) преобразований представлены в табл. 1.

Таблица 1

К	$x_1(t)$
0	1
0,1	$1-t$
0,1,2	$1-t+t^2$
0,1,2,3	$1-t+t^2-t^3$
0,1,2,3,4	$1-t+t^2-t^3+t^4$

Очевидно, что приближения $x(t)$, полученные ДТ-преобразованиями, не совпадают с точным решением $x(t)$.

Теперь, используя ДП-преобразования, с учетом соотношения (2) вычислим коэффициенты b_v . Имеем $X(1) b_1 = -X(2)$, откуда $b_1=1$.

Далее, используя формулу (3), вычислим коэффициенты a_μ . Имеем

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \text{ откуда } a_0=1, a_1=0.$$

Следовательно, используя формулу (1), получим $x_2(t) = 1/(t+1)$, что полностью совпадает с точным оригиналом $x(t)$.

Полученные приближения (временные зависимости) при различных аппроксимациях решений представлены на рис. 1. Очевидно, что точное решение $x(t) = 1/(t+1)$ более или менее совпадает с полученными ДТ-приближениями лишь на отрезке $(-1;0,5)$. На отрезках $(-\infty, -1)$ и $(0,5; +\infty)$ они сильно расходятся. Что касается приближения, полученного ДП-преобразованиями, то оно полностью совпадает с точным решением. Отсюда и следует преимущество ДП-преобразований по сравнению с ДТ-преобразованиями при прочих равных условиях.

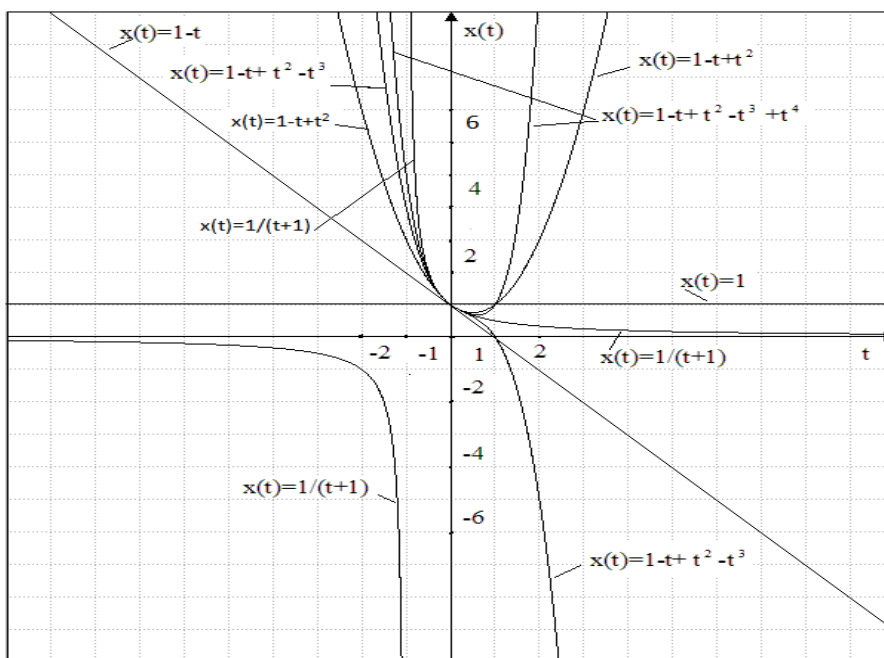


Рис. 1

К сожалению, такая картина не всегда имеет место. Убедимся в этом на другом простом примере.

Пример 2. Пусть имеем $x(t)=1/(t+1)^3$. При центре аппроксимации $t_0=0$ дискретами этой функции будут $X(0)=1$, $X(1)=-3$, $X(2)=6$, $X(3)=-10$, $X(4)=15$ и т.д.

Результаты вычислений при переходе из области изображений в область оригиналов, используя формулы ДТ-преобразований, представлены в табл. 2.

Таблица 2

К	$x(t)$
0	1
0,1	$1-3t$
0,1,2	$1-3t+6t^2$
0,1,2,3	$1-3t+6t^2-10t^3$
0,1,2,3,4	$1-3t+6t^2-10t^3+15t^4$

Очевидно, что эти приближения не совпадают с точным решением.

Результаты вычислений при переходе из области изображений в область оригиналов, используя формулы ДП-преобразований, представлены в табл. 3.

Таблица 3

m,n	$x(t)$	a_0	a_1	a_2	a_3	b_0	b_1	b_2	b_3
m=0, n=1	$\frac{1}{1+3t}$	1	0	0	0	1	3	0	0
m=1, n=1	$\frac{1+t}{1+2t}$	1	1	0	0	1	2	0	0
m=1, n=2	$\frac{1+\frac{1}{3}t}{1+\frac{8}{3}t+2t^2}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	1	$\frac{8}{3}$	2	0
m=0, n=3	$\frac{1}{(t+1)^3}$	1	0	0	0	1	3	3	1

Временные зависимости при применении ДП-преобразований представлены на рис. 2.

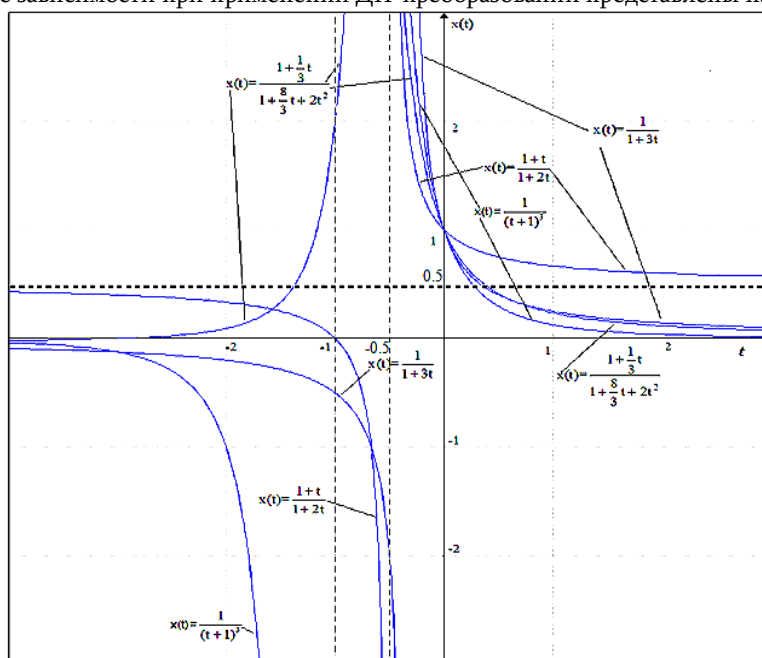


Рис. 2

Из рис. 2 видно, что все ДП-приближения на отрезке $(-0,5;+0)$ достаточно близки к точному решению, а в случае $m=0$, $n=3$ полностью совпадают с ним. Однако на других отрезках, очевидно, желаемого совпадения приближенных и точных решений не происходит.

Теперь рассмотрим пример, иллюстрирующий использование ДП-аналога метода Самуэльсона, предложенного в [4] для определения коэффициентов-функций собственных многочленов неавтономных матриц.

Пример 3. Рассмотрим следующую матрицу:

$$A(t) = \begin{bmatrix} t^2 - 1 & | & t - 1 & 0 \\ \hline - & - & - & - \\ t + 1 & | & 0 & 1 \\ \hline t^2 & | & t^2 & t - 1 \end{bmatrix}, \text{ где, очевидно, } \begin{aligned} a_{1,1}(t) &= t^2 - 1, \\ R(t) &= (t-1, 0), S(t) = (t+1, t^2)^T, \\ M(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t^2 & t-1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что собственный многочлен матрицы $A(t)$ равен $P(\lambda(t)) = \lambda^3(t) + (-t^2 - t + 2)\lambda^2(t) + (t^3 - 3t^2 - t + 2)\lambda(t) + (t^4 - t^2 - t + 1)$, откуда его коэффициенты-функции $p_0(t) = 1, p_1(t) = -t^2 - t + 2, p_2(t) = t^3 - 3t^2 - t + 2, p_3(t) = t^4 - t^2 - t + 1$. Далее имеем $R(t)M(t) = (0, t-1)$, $R(t)M^2(t) = (t^2(t-1), (t-1)^2)$, $R(t)S(t) = (t^2 - 1)$, $R(t)M(t)S(t) = t^2(t-1)$,

$$C(t) = \begin{bmatrix} t-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -(t^2-1) \\ 0 & t-1 & 0 & 1 & -(t^2-1) & -(t^2-1) \\ t^2(t-1) & (t-1)^2 & 1 & -(t^2-1) & -(t^2-1) & -t^2(t-1) \end{bmatrix}.$$

Теперь возьмем $\rho(\tau) = 0, H = 1$.

Шаг 1. Используя формулы для вычисления матричных дискрет [4], получим

$$C^{-1}(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, C^{-1}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C^1(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, C^1(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C^1(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, C^1(K) = [0], \forall K \geq 5.$$

Теперь из формул (1) - (3) имеем

$$C^1(t) = \begin{bmatrix} t-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -(t^2-1) \\ 0 & t-1 & 0 & 1 & -(t^2-1) & -(t^2-1) \\ 0 & -(t-1)^2 & -1 & t^2-1 & 2t^2-1 & t^2(t-1)-t^2(t^2-1) \end{bmatrix}.$$

Отсюда очевидно, что, поскольку $c_{3,1}^1(t)=0$, а $c_{3,2}^1(t) \neq 0$, то необходимо продолжить вычисления.

Представим процесс вычисления элемента $c_{2,2}^1(t)$.

Используя формулу (2), вычислим коэффициенты b_v . Имеем

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ откуда } b_1=b_2=b_3=b_4=0.$$

Далее, используя формулу (3), вычислим коэффициенты a_μ . Имеем

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \text{ откуда } a_0=-1, a_1=1, a_2=a_3=a_4=0.$$

Теперь, используя формулу (1), получим $c_{2,2}^1(t)=t-1$.

Шаг 2. Используя формулы для вычисления матричных дискрет [4], получим

$$C^2(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, C^2(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C^2(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}, C^2(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C^2(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C^2(K) = [0], \forall K \geq 5.$$

Аналогично из формул (1) - (3) имеем

$$C^2(t) = \begin{bmatrix} t-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -(t^2-1) \\ 0 & t-1 & 0 & 1 & -(t^2-1) & -(t^2-1) \\ 0 & 0 & 1 & -t^2-t+2 & t^3-3t^2-t+2 & t^4-t^2-t+1 \end{bmatrix}.$$

Теперь, поскольку $c_{3,1}^2(t)=0$ и $c_{3,2}^2(t)=0$, то процесс вычислений, очевидно, завершен. При этом коэффициенты-функции $p_0(t)=1, p_1(t)=-t^2-t+2, p_2(t)=t^3-3t^2-t+2, p_3(t)=t^4-t^2-t+1$ полностью совпадают с вышеприведенными соотношениями, полученными аналитическим путем.

Пример 4. Рассмотрим следующую матрицу:

$$A(t) = \begin{bmatrix} t+1 & | & t \\ \hline - & | & - \\ \frac{1}{t-1} & | & \frac{1}{t+2} \end{bmatrix}, \text{ где, очевидно, } \begin{aligned} a_{1,1}(t) &= t+1, \\ R(t) &= t, \quad S(t) = \frac{1}{t-1}, \\ M(t) &= \frac{1}{t+2}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что собственный многочлен матрицы $A(t)$ равен $P(\lambda(t)) = -\lambda^2(t) + (\frac{t^2+3t+3}{t+2})\lambda(t) + (\frac{2t+1}{t^2+t-2})$, откуда его коэффициенты-функции $p_0(t) = -1, p_1(t) = \frac{t^2+3t+3}{t+2}, p_2(t) = \frac{2t+1}{t^2+t-2}$. Далее имеем

$$R(t)M(t) = \frac{t}{t+2}, R(t)S(t) = \frac{t}{t-1}, C(t) = \begin{bmatrix} t & 0 & 1 & -(t+1) \\ \frac{t}{t+2} & 1 & -(t+1) & -\frac{t}{t-1} \end{bmatrix}.$$

Теперь возьмем $\rho(\tau) = 0, H = 1$.

Используя формулы для вычисления матричных дискрет [4], получим

$$C^1(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad C^1(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix},$$

$$C^1(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{bmatrix}, \quad C^1(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{16} & -\frac{17}{16} \end{bmatrix},$$

$$C^1(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{32} & -\frac{31}{32} \end{bmatrix}, \quad C^1(5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{64} & -\frac{65}{64} \end{bmatrix}.$$

Теперь из формул (1) - (3) имеем

$$C^1(t) = \begin{bmatrix} t & 0 & 1 & -(t+1) \\ 0 & -1 & \frac{t^2+3t+3}{t+2} & \frac{2t+1}{t^2+t-2} \end{bmatrix},$$

$$p_0(t) = -1, p_1(t) = \frac{t^2+3t+3}{t+2}, p_2(t) = \frac{2t+1}{t^2+t-2}, \quad \text{которые полностью совпадают с}$$

вышеприведенными соотношениями, полученными аналитическим путем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. - Киев: Наукова думка, 1984. - 420 с.
2. **Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.** Вычислительные методы высшей математики. - Минск: Вышэйшая школа, 1972. - Т. 1. - 584 с.
3. **Фаддеев Д.К., Фаддеев В.Н.** Вычислительные методы линейной алгебры. - Изд. 2-е. - М.: Наука, 1963. - 656 с.
4. **Симонян С.О., Тамазян М.Д.** Д-аналог метода Самуэльсона для вычисления коэффициентов собственного многочлена неавтономных матриц//Вестник ГИУА. Серия "Моделирование, оптимизация, управление". - 2010. - Вып. 13, том 2. - С. 152-160.

ГИУА (П). Материал поступил в редакцию 14.07.2010.

Մ.Հ. ՄԻՄՈՆՅԱՆ, Մ.Ջ. ԹԱՄԱԶՅԱՆ, Ա.Կ. ՎԱՍԻԼՅԱՆ

ՄԱՏՐԻՑԻ ՄԵՓԱԿԱՆ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԻ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐ-ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՇՎՄԱՆ
ՄԱՍՈՒԵԼՍՈՆԻ ՄԵԹՈԴԻ ԴՊ-ՆՄԱՆԱԿԸ ՈՉ ԱՎՏՈՆՈՄ
ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Առաջարկված է բավականին պարզ հաշվողական մեթոդ, որը հնարավորություն է տալիս որոշել ոչ ավտոնոմ մատրիցների սեփական բազմանդամների գործակիցներ-ֆունկցիաները:

Առանցքային բառեր. ոչ ավտոնոմ մատրից, սեփական բազմանդամ, դիֆերենցիալ-պաղեյան ձևափոխություններ:

S.H. SIMONYAN, M.J. TAMAZYAN, A.K VASILYAN

DP-ANALOGUE OF SAMUELSON METHOD FOR EIGENVALUE POLYNOMIAL COEFFICIENT-
FUNCTION CALCULATION OF NON-AUTONOMOUS MATRICE

A sufficiently simple method for determining eigenvalue polynomial non-autonomous matrice coefficient-functions is proposed.

Keywords: non-autonomous matrice, eigenvalue polynomial, differential-Pade transformation.