ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2010. Т. LXIII, № 2.

УДК 62-50

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Э.В. КАРСЛЯН, К.В. ПЕТРОСЯН

МОДЕЛЬ ИНВЕСТИЦИЙ В НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОЕКТЫ В УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВЕННЫХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

На основе работ по реальным опционам и по принятию решений в условиях существенных неопределенностей моделируются инвестиции в научно-технические проекты (НТП). Неопределенности НТП описываются двумя стохастическими процессами, связанными с неопределенностями относительно требуемых инвестиционных расходов и неопределенностями относительно будущих доходов от инвестиции.

Ключевые слова: модель, инвестиция, научно-технический проект, неопределенность, оптимальное управление, стохастический процесс.

Введение. Анализ инвестиций в НТП представляет собой одну из самых трудных проблем инвестирования в условиях неопределенностей. Большинство инвестиций в НТП включают четыре особенности: во-первых, они содержат значительные неопределенности в расходах на осуществление проекта; во-вторых, будущие денежные потоки, т.е. доходы от реализации проекта, не определены; в-третьих, инвестиционные расходы являются частично или полностью необратимыми; в-четвертых, они могут быть отложены и оптимальное время (момент) инвестирования представляют собой важную задачу принятия решения.

Модели, рассматриваемые в данной статье, связаны с несколькими научными направлениями в литературе. С одной стороны, они следуют работам по применению теории реальных опционов к задачам оценки эффективности инвестиционных проектов (см. [1, 2] и библиографии к ним). С другой стороны, они связаны с литературой по принятию решений в условиях высоких неопределенностей (неопределенность Найта) (см. [3-5] и библиографии к ним).

1. Задача инвестирования в научно-технические проекты. Рассмотрим НТП, для реализации которого необходимо время (обычно это несколько лет, иногда это десять и более лет, например, для разработки нового лекарства), со случайным общим расходом на его завершение $\tilde{K}_t$ и математическим ожиданием $K_t = M(\tilde{K}_t)$. Когда проект успешно завершится, форма (или НИИ) получит актив (например, новое программное обеспечение), стоимость которого V_t определяется как текущая стоимость ожидаемых будущих чистых денежных потоков, дисконтированных по процентной ставке, скорректированной с учетом риска.

Предположим, что НТП характеризуется неопределенным денежным потоком V_t, который описывается геометрическим броуновским движением

$$dV_t = \mu V_t dt + \sigma V_t dw_t, \qquad t \ge 0, \tag{1}$$

где dw_t - приращение винеровского процесса. Параметры стохастического процесса имеют естественную экономическую интерпретацию, а именно, коэффициент тенденции (сноса) μ представляет собой среднее значение мгновенного темпа изменения процесса, а коэффициент диффузии σ является среднеквадратичным отклонением этого мгновенного темпа изменения стоимости (волатильность). Поэтому на этот процесс можно смотреть как на возможную аппроксимацию соответствующих реальных процессов. Знак μ будет зависеть от специфики реального актива, рыночных условий, экономической среды и конкуренции. Существуют примеры НТП, в которых стоимость актива имеет положительную тенденцию $\mu>0$ (например, фармацевтические продукты, связанные с другими медицинскими продуктами, употребление которых растет). Точно так же, существуют НТП, в которых $\mu<0$ (например, когда возрастает международная конкуренция и рынок для разработанного актива (продукта) ссужается). Отрицательный коэффициент тенденции можно также трактовать как альтернативную стоимость задержки инвестиций.

Модель неопределенности расходов на завершение проекта основывается на подходе, предложенном в [2]. Предполагается, что ожидаемые расходы K_t следуют стохастическому дифференциальному уравнению вида

$$dK_t = -I_t dt + \beta \left(I_t K_t \right)^{1/2} dy_t + \delta K_t dt + \gamma K_t dz_t, \quad t \ge 0. \tag{2}$$

Это уравнение описывает управляемый стохастический процесс, где управление представляет собой уровень инвестиций I_t, а dy_t и dz_t являются приращениями некоррелированных винеровских процессов. Второй член в (2) характеризует техническую неопределенность, которая связана со сложностью создания или разработки актива (даже если все входные расходы известны точно) и, следовательно, может быть разрешена только инвестированием в проект. Выражение $\delta K_t dt$ описывает изменение в расходах на создание актива. Например, если расходы связаны с приобретением аппаратного обеспечения с микропроцессорами, то, как известно, цена микропроцессоров падает экспоненциально с течением времени, а именно, каждые 18 месяцев цены на некоторые микропроцессоры уменьшаются вдвое. Следовательно, продукт будет иметь значение $\delta = -\ln(2)/1{,}5 = -0{,}46$.

С учетом вышеизложенного можно считать, что фирма (или НИИ) принимает решение относительно инвестирования проекта на основе наблюдений за двумерным стохастическим процессом $((V_t, K_t), t \geq 0)$. Предполагается, что заданную стоимость V_t актив приобретает к концу проекта $(t = \tilde{T})$, и оценка ценности (стоимости) инвестиционной возможности определяется следующим соотношением:

$$F(V_t, K_t) = \max_{I_t} M\left[V_t e^{-r\tilde{T}} - \int_0^{\tilde{T}} I_t e^{-r\tilde{T}} dt\right], \tag{3}$$

где M - математическое ожидание, $\tilde{T}$ - случайная переменная длительности проекта; r - скорректированная с учетом риска дисконтная ставка; I_m - максимальный уровень инвестиций, причем $0 \leq I_t \leq I_m$.

2. Расширение модели. Теперь расширим нашу модель на еще более общий случай, а именно, вместо стохастических неопределенностей (1) и (2) будем рассматривать интервально-стохастические, когда экономический субъект точно не уверен относительно параметров случайных процессов, характеризующих будущие потоки доходов и расходов. Это означает, что лицо, принимающее решение, вместо единственной вероятностной меры P рассматривает множество вероятностных мер P. Иными словами, имеется некоторое множество (класс) допустимых, т.е. согласованных с имеющейся информацией, законов распределения вероятностей, которым принадлежит неизвестный закон распределения вероятностей эффекта данного проекта. Использование множества вероятностных мер P мотивируется работой [3], где показано, что традиционный подход выбора субъективных распределений вероятностей в отсутствие объективных распределений вероятностей входит в конфликт с проведенными экспериментами и наблюдениями за экономическими субъектами. В этом контексте использование множества распределений накладывает менее строгие ограничения на лица, принимающие решения.

Модель интервально-стохастической неопределенности в непрерывном времени, которую мы будем рассматривать далее, основывается на результатах работ [3-4].

Определим множество P как возможно абсолютно непрерывную по отношению к P, которую мы назовем исходной вероятностной мерой. Это множество может быть определено посредством так называемых генераторов плотностей $\theta = (\theta_t)$, т.е. класса стохастических процессов. Далее этот класс может быть использован, чтобы породить вероятностные меры Q^θ (вне исходной меры P) посредством определения плотностей вероятностных распределений. Более того, предположим, что генераторы плотностей $Q^\theta \in \Theta$ ограничиваются до области $\mathcal{K} = [-\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}]$, где $\boldsymbol{k}$ - ограниченное вещественное число. Это определение позволяет множество P преобразовать в постоянный интервал неопределенности вокруг исходной меры P, тем самым упрощая решение динамических оптимизационных задач.

Рассмотрим полное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, снабженное фильтрацией $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t,\ \mathrm{t} \ge 0\}$, представляющей неубывающее непрерывное справа семейство (полных) σ- алгебр $\mathcal{F}$. Пусть w_t- стандартное броуновское движение (винеровский процесс), определенное на этом вероятностном пространстве. Из теоремы Гирсанова [6] следует, что стохастический процесс $w^{\theta}_{t\ 0\le t<\infty}$, определяемый как

$$w_t^{\theta} = w_t + \int_0^t \theta_s ds, \quad \forall t \ge 0, \quad \forall \theta \in \Theta, \tag{4}$$

представляет собой стандартное броуновское движение по отношению с $\mathcal{F}$ на $\left(\Omega, \mathcal{F}, Q^{\theta}\right)$. Заметим, что (4) эквивалентно уравнению

$$dw_t^{\theta} = dw_t + \theta_t dt \qquad \text{или} \qquad dw_t = dw_t^{\theta} - \theta_t dt\,. \tag{5}$$

Используем этот результат, чтобы обобщить стохастические процессы (1) и (2), а именно:

$$\begin{aligned} \mathrm{dV_t} &= \mu \mathrm{V_t dt} + \sigma \mathrm{V_t} dw_t = \mu \mathrm{V_t} dt + \sigma \mathrm{V_t}\left(dw_t^{\theta} - \theta_t^w dt\right) = \\ &= \left(\mu - \sigma\theta_t^w\right)\mathrm{V_t} dt + \sigma \mathrm{V_t} dw_t^{\theta}, \qquad \forall \theta_t^w \in \Theta^w. \end{aligned} \tag{6}$$

Аналогично для процесса (2), т.е.

$$\begin{aligned} \mathrm{dK_t} &= \left(-\mathrm{I_t} - \beta\theta_t^y \left(\mathrm{I_t K_t}\right)^{1/2}\right)\mathrm{dt} + \beta\left(\mathrm{I_t K_t}\right)^{1/2} d\mathcal{J}_t^{\theta} + \\ &+ \left(\delta - \gamma\theta_t^z\right)\mathrm{K_t} dt + \gamma \mathrm{K_t} dz_t^{\theta}. \end{aligned} \tag{7}$$

Как видно, обобщенные процессы (6) и (7) отличны от исходных (1) и (2) только коэффициентами тенденций, а именно:

$$\left(\mu - \sigma\theta_t^w\right), \quad \theta_t^w \in \Theta^w, \tag{8}$$

$$\left(-\mathrm{I_t} - \beta\theta_t^y \left(\mathrm{I_t K_t}\right)^{1/2}\right), \quad \theta^y \in \Theta^y \tag{9}$$

$$\left(\delta - \gamma\theta_t^z\right)\mathrm{K_t}, \quad \theta^z \in \Theta^z. \tag{10}$$

В условиях неопределенностей, характеризуемых посредством Θ^w, Θ^y и Θ^z, лицо, принимающее решение, рассматривает все стохастические дифференциальные уравнения (6) и (7) с изменяющимися параметрами $\theta^w \in \Theta^w$, $\theta^y \in \Theta^y$ и $\theta^z \in \Theta^z$. Рассмотрим, к примеру, уравнение (6). Используя лемму Ито [6] к $\ln \mathrm{V}_t$ и рассматривая Q^θ как вероятностную меру, можно показать, что (7) формально имеет решение следующего вида:

$$\mathrm{V}_t = \mathrm{V}_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t - \sigma\int_0^t \theta_s^w ds + \sigma w_t^\theta\right]. \tag{11}$$

Из (11) ясно видно, что единственный стохастический процесс V_t имеет много различных “интерпретаций”, причем каждая из них соответствует отдельной вероятностной мере, эквивалентной мере P.

3. Уравнение Беллмана оптимального управления. Используя лемму Ито, запишем выражение для дифференциала - ценности инвестиционной возможности $\mathrm{dF}(\mathrm{V}_t, \mathrm{K}_t)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{dF}(\mathrm{V}_t, \mathrm{K}_t) &= \frac{\partial \mathrm{F}(\mathrm{V}_t, \mathrm{K}_t)}{\partial \mathrm{V}_t}\mathrm{dV}_t + \frac{\partial \mathrm{F}(\mathrm{V}_t, \mathrm{K}_t)}{\partial \mathrm{K}_t}\mathrm{dK}_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{F}(\mathrm{V}_t, \mathrm{K}_t)}{\partial \mathrm{V}_t^2}\mathrm{dV}_t^2 + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{F}(\mathrm{V}_t, \mathrm{K}_t)}{\partial \mathrm{K}_t^2}\mathrm{dK}_t^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{F}(\mathrm{V}_t, \mathrm{K}_t)}{\partial \mathrm{V}_t \partial \mathrm{K}_t}\mathrm{dV}_t \mathrm{dK}_t. \end{aligned} \tag{12}$$

Подставляя (12) и уравнения (6) и (7) в соответствующее уравнение динамического программирования, получим следующее эллиптическое дифференциальное уравнение второго порядка (уравнение Беллмана) для получения $\mathrm{F}(\mathrm{V}_t, \mathrm{K}_z)$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sigma^2 \mathrm{V}_t^2 \frac{\partial^2 \mathrm{F}(\mathrm{V}_t, \mathrm{K}_t)}{\partial \mathrm{V}_t^2} + \left(\mu - \sigma\theta^w\right)\mathrm{V}_t \frac{\partial \mathrm{F}(\mathrm{V}_t, \mathrm{K}_t)}{\partial \mathrm{V}_t} - \mathrm{rF}(\mathrm{V}_t, \mathrm{K}_t) + \\ &+ \frac{1}{2}\beta^2 \mathrm{I}_t \mathrm{K}_t \frac{\partial^2 \mathrm{F}(\mathrm{V}_t, \mathrm{K}_t)}{\partial \mathrm{K}_t^2} + \left(-\mathrm{I}_t + \delta \mathrm{K}_t - \beta\theta_t^y (\mathrm{I}_t \mathrm{K}_t)^{1/2} - \gamma\theta_t^z \mathrm{K}_t\right)\frac{\partial \mathrm{F}(\mathrm{V}_t, \mathrm{K}_t)}{\partial \mathrm{K}_t} - \mathrm{I}_t = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

с граничными условиями:

$$\mathrm{F}(\mathrm{V}_t, 0) = \mathrm{V}_t, \tag{14}$$

$$F(0, K_t) = 0, \tag{15}$$

$$\lim_{K_t \to \infty} F(V_t, K_t) = 0. \tag{16}$$

Значения параметров $\hat{\theta}_t^w$, $\hat{\theta}_t^y$ и $\hat{\theta}_t^z$ выбираются с учетом наихудшего случая.

Уравнение (13) не имеет аналитического решения, поэтому рассмотрим специальный случай, когда отсутствует неопределенность в инвестиционных расходах. В этом случае ценность инвестиционной возможности описывается обыкновенным дифференциальным уравнением следующего вида:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V_t^2 \frac{d^2F(V_t)}{dV_t^2} + \left(\mu - \sigma\hat{\theta}^w\right) V_t \frac{dF(V_t)}{dV_t} - rF(V_t) = 0 \quad . \tag{17}$$

Кроме этого, $F(V_t)$ должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$F(0) = 0\,, \tag{18}$$

$$F\left(V^*\right) = V^* - I\,, \tag{19}$$

$$\frac{dF\left(V^*\right)}{dV_t} = 1\,. \tag{20}$$

Условие (18) показывает, что если V_t стремится к нулю, то она будет оставаться на нуле (это подразумевается сущностью процесса (6)), поэтому инвестиционная возможность не будет иметь никакой ценности. V^* представляет собой цену актива, при которой инвестирование является оптимальным. Условие (19) указывает на тот факт, что при инвестировании фирма получает чистый доход $V^* - I$, а условие (20) является одним из вариантов “гладкого склеивания” [1, 2].

Чтобы решить обыкновенное дифференциальное уравнение (17), запишем его характеристическое уравнение

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \lambda(\lambda - 1) + \left(\mu - \sigma\hat{\theta}^w\right)\lambda - r = 0 \quad . \tag{21}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{\left\{\left(\mu - \sigma\hat{\theta}^w\right) - \frac{1}{2}\sigma^2\right\} \pm \sqrt{\left\{\left(\mu - \sigma\hat{\theta}^w\right) - \frac{1}{2}\sigma^2\right\}^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2}\,. \tag{22}$$

При $r > \mu$ нетрудно показать, что $\lambda_1 > 1$, а $\lambda_2 < 0$. Далее можно легко проверить, что как V^{λ_1}, так и V^{λ_2} решают (17) и что Вронскиан функций $V_t^{\lambda_1}$ и $V_t^{\lambda_2}$ является ненулевым для любого $V_t > 0$. (Здесь Вронскиан двух функций f_1 и f_2: $W(f_1, f_2) = f_1 f' \text{-} f_1' f_2$ и $W\left(V_t^{\lambda_1}, V_t^{\lambda_2}\right) = (\lambda_2 - \lambda_1) V_t^{\lambda_1 + \lambda_2 - 1}$). Следовательно, любое решение (17) может быть выражено единственным образом как линейная комбинация $V_t^{\lambda_1}$ и $V_t^{\lambda_2}$, а именно:

$$F(V_t) = aV_t^{\lambda_1} + bV_t^{\lambda_2}, \tag{23}$$

где a и b - некоторые вещественные постоянные, которые необходимо определить [7]. И, наоборот, очевидно, что любая функция вида (23) является решением уравнения (17). Это означает, что (23) исчерпывает все решения (17).

Теперь перейдем к граничным условиям. Отрицательность λ_2 и (18) влечет $b = 0$ и, следовательно,

$$F(V_t) = aV_t^{\lambda_1}, \tag{24}$$

где постоянная a также должна быть определена.

Далее из (24), (19) и (20) следует, что

$$a\left(V^*\right)^{\lambda_1} = V^* - I \quad \text{и} \quad \lambda_1 a \left(V^*\right)^{\lambda_1 - 1} = 1. \tag{25}$$

Решая эти два уравнения, получим

$$F(V_t) = \begin{cases} \left(\dfrac{I}{\lambda_1 - 1}\right)^{1-\lambda_1} \lambda_1^{-\lambda_1} V_t^{\lambda_1}, & \text{если} \quad V_t < V^*, \\ V_t - I, & \text{если} \quad V_t \geq V^*, \end{cases} \tag{26}$$

где

$$V_t = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1} I, \tag{27}$$

$$a = \frac{V^* - I}{\left(V^*\right)^{\lambda_1}} = \frac{(\lambda_1 - 1)^{\lambda_1 - 1}}{(\lambda_1)^{\lambda_1} \cdot I^{\lambda_1 - 1}} \quad . \tag{28}$$

Таким образом, соотношения (26)-(28) дают ценность (стоимость) инвестиционной возможности и оптимальную стратегию инвестирования, т.е. критическое значение стоимости актива, выше которой инвестиция является оптимальной. Здесь необходимо сделать важное замечание, а именно, так как $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_1/(\lambda_1 - 1) > 0$, то из (27) следует неравенство $V^* > I$. Это означает, что наличие неопределенности и необратимости инвестиций делает стандартное правило чистой текущей стоимости (NPV) некорректным.

Рассмотрим теперь численный пример. Пусть I = 1, r = 0,2, μ = 0,2, $\hat{\theta} = 0$, $\sigma =$ 0,1, 0,2, 0,4, 0,6.

На рисунке приведены графики решения уравнения (17) .

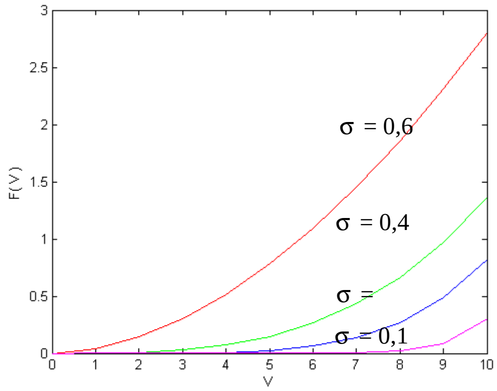

Рис. Оценивание инвестиционной возможности

Заметим, что $F(V)$ увеличивается при увеличении σ, при этом также увеличивается критическое значение V*. Таким образом, неопределенность увеличивает ценность инвестиционной возможности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Dixit A.K., Pindyck R.S.** Investment under Uncertainty. Princetion: Princetion University Press. – 1 994. -476.
2. **Pindick R.S.** Investment of Uncertain Cost // Journal of Financial Economics. -1993. -V.34. -P.53-76.
3. **Chen Z., Epstein L.** Ambiguity, Risk and Asset Returns in Continuous Time // Econometrica. -2002. -V.70. -P.1403-1443.
4. **Gilba I., Schmeider D.** Maximin Expected Utility with Non-Unique Prior //Journal of Mathematical Economics. -1989. -V.18. -P.141-153.
5. **Knight F. Risk, Uncertainty, and Profit. New York: Cosimo Classics.** -2006. -P.400.
6. **Булинский А.В., Ширяев А.Н.** Теория случайных процессов. -М.: Физматлит, 2003. – 432с.
7. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1971. – 576 с.

Է.Վ. ՂԱՐՍԼՅԱՆ, Կ.Վ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ԷԱԿԱՆ ԱՆՈՐՈՇՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ ԳԻՏԱՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՆԱԽԱԳԾԵՐՈՒՄ ՆԵՐԴՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄՈԴԵԼԸ

Գիտատեխնիկական նախագծերում (ԳՏՆ) ներդրումները մոդելավորվում են իրական օպցիոնների և էական անորոշությունների պայմաններում որոշումների կայացման վերաբերյալ աշխատությունների հիման վրա: ԳՏՆ-ի անորոշությունը նկարագրվում է երկու ստոխաստիկ պրոցեսներով, որոնք կապված են պահանջվող ներդրումային ծախքերի անորոշությունների և այդ ներդրումից ապագայում սպասվող եկամուտների վերաբերյալ անորոշության հետ:

Առանցքային բառեր. մոդել, ներդրում, գիտատեխնիկական նախագիծ, անորոշություն, օպտիմալ կառավարում, ստոխաստիկ պրոցես:

E.V. KARSLIAN, K.V. PETROSYAN

RESEARCH AND DEVELOPMENT INVESTMENTS MODEL UNDER SIGNIFICANT UNCERTAINTIES

Investments in research and development (R&D) using the works on real option approach to investment and decision making under significant uncertainty are modeled. The uncertainties of R&D project are summarized into two stochastic processes relating to uncertainties about the future payoffs from the investment. The difference between risk and uncertainty is shown and the influence on software investment decisions is studied.

Keywords: model, investment, research and development project, uncertainty, optimal control, stochastic process.