

О.Н. ГАСПАРЯН, Р.М. ОВАКИМЯН, А.Р. ЧИЛИНГАРЯН

**ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ
МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ С ОРТОГОНАЛЬНЫМИ КАНОНИЧЕСКИМИ
БАЗИСАМИ**

Дано распространение метода характеристических передаточных функций на задачу исследования точности нелинейных циркулянтных и антициркулянтных систем автоматического регулирования при стационарных случайных воздействиях. Получены канонические представления передаточных матриц нелинейных статистически линеаризованных систем указанных классов. Показано, что задача исследования статистической точности циркулянтных и антициркулянтных систем с произвольным числом каналов строго сводится к одномерной задаче и может быть решена стандартными методами классической теории регулирования. Приведен численный пример расчета статистической точности трехмерной антисимметричной системы.

Ключевые слова: многомерная система регулирования, метод характеристических передаточных функций, статистическая линеаризация нелинейностей, циркулянтная система, антициркулянтная система, канонический базис.

Введение. При исследовании статистической динамики нелинейных систем регулирования в инженерной практике наибольшее распространение получили приближенные методы, среди которых своей простотой и прикладной направленностью выделяется метод статистической линеаризации [1]. Данный метод основан на замене точной нелинейной зависимости между входными и выходными переменными нелинейного элемента приближенной линейной зависимостью, одинаково с нелинейной преобразующей математическое ожидание и дисперсию входного случайного сигнала. Это позволяет с достаточной для инженерных задач точностью учесть основные законы совместного прохождения полезных сигналов и случайных возмущений через нелинейные звенья. Подробное изложение вопросов применения метода статистической линеаризации при проектировании нелинейных систем, в том числе и систем с несколькими нелинейными элементами, дано в монографии [1] и др. Несмотря на это, методы исследования нелинейных многомерных систем автоматического регулирования (МСАР) при случайных воздействиях разработаны еще не с той степенью законченности, которая присуща теории нелинейных систем с одним входом и выходом (одномерных систем).

В этом отношении в ряде случаев весьма эффективными могут оказаться идеи метода характеристических передаточных функций (ХПФ) [2], чья применимость к

статистически линеаризованным МСАР является столь же правомочной, как и к любым другим линеаризованным МСАР. В работах [3, 4] метод ХПФ распространяется на задачу исследования статистической точности нелинейных МСАР общего вида, а также однотипных МСАР, т.е. многомерных систем с одинаковыми передаточными функциями отдельных каналов и жесткими взаимными связями между каналами.

В настоящей статье методы, описанные в [3, 4], обобщаются на особые классы МСАР, для которых введение понятий ХПФ и канонического базиса приводит к исключительно простым и наглядным результатам. Речь идет о так называемых циркулянтных и антициркулянтных МСАР (ЦМСАР и АМСАР), канонические базисы которых являются ортогональными и зависят только от размерности (числа каналов) N системы. К ЦМСАР и АМСАР относятся простые симметричные и антисимметричные МСАР, включая широко распространенные на практике двумерные системы с антисимметричными взаимными связями [2]. Как будет показано ниже, в случае ЦМСАР и АМСАР задача исследования статистической точности сводится к одномерной задаче независимо от числа каналов N и может быть решена обычными методами классической теории регулирования.

В дальнейшем, с целью сокращения объема статьи, мы ограничимся только случаем случайных сигналов с нулевыми математическими ожиданиями.

1. ХПФ и канонический базис статистически линеаризованных МСАР.

Рассмотрим N -мерную (т.е. имеющую N входов и N выходов) нелинейную устойчивую МСАР общего вида (рис. 1), считая для простоты все нелинейности $F_{ir}(x_r)$ нечетно-симметричными, безынерционными и однозначными.

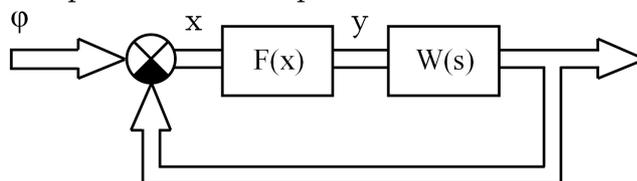


Рис. 1. Матричная структурная схема нелинейной МСАР

Пусть входной сигнал ϕ МСАР представляет собой стационарную случайную функцию времени с нулевым математическим ожиданием и нормальным распределением, заданную корреляционной матрицей $R_\phi(\tau)$ или матрицей спектральных плотностей $S_\phi(j\omega)$. Заменяем в соответствии с методом статистической линеаризации действительную зависимость между входом и выходом каждого нелинейного элемента $F_{ir}(x_r)$ приближенной линейной зависимостью [1]

$$F_{ir}(x_r) = k_{ir}x_r, \quad (1)$$

где k_{ir} - статистический коэффициент усиления нелинейности $F_{ir}(x_r)$.

Величина k_{ir} определяется из необходимого условия сохранения на выходе приближенной линейной зависимости (1) дисперсии выходной переменной нелинейного звена $F_{ir}(x_r)$. В общем случае коэффициенты k_{ir} зависят нелинейным образом от среднеквадратических отклонений σ_{x_r} входных переменных x_r , т.е. $k_{ir} = k_{ir}(\sigma_{x_r})$, и для типовых нелинейностей вычисляются по готовым формулам, имеющимся в литературе [1]. При этом обычно считается, что линейная часть $W(s)$ является достаточно узкополосной и обеспечивает нормализацию случайных процессов в замкнутом контуре.

С учетом (1) векторное уравнение динамики статистически линеаризованной МСАР на рис. 1 можно записать в виде

$$x = \Phi_x(s, \bar{\sigma}_x) \varphi = [I + W(s)K(\bar{\sigma}_x)]^{-1} \varphi, \quad (2)$$

где матрица $K(\bar{\sigma}_x)$ составлена из коэффициентов $k_{ir}(\sigma_{x_r})$, а вектор $\bar{\sigma}_x$ имеет компоненты σ_{x_r} . Назовем матрицу $Q(s, \bar{\sigma}_x) = W(s)K(\bar{\sigma}_x)$ передаточной матрицей разомкнутой статистически линеаризованной МСАР. Соответственно, записав каноническое представление этой матрицы при помощи преобразования подобия в виде [2-4]

$$Q(s, \bar{\sigma}_x) = C(s, \bar{\sigma}_x) \text{diag}\{q_i(s, \bar{\sigma}_x)\} C^{-1}(s, \bar{\sigma}_x), \quad (3)$$

будем называть функции $q_i(s, \bar{\sigma}_x)$ характеристическими передаточными функциями (формально ХПФ являются собственными значениями $Q(s, \bar{\sigma}_x)$), а базис, составленный из нормированных собственных векторов $c_i(s, \bar{\sigma}_x)$ матрицы $Q(s, \bar{\sigma}_x)$, - каноническим базисом статистически линеаризованной разомкнутой МСАР. Напомним, что в (3) через $C(s, \bar{\sigma}_x)$ обозначена модальная матрица, составленная из векторов $c_i(s, \bar{\sigma}_x)$, и считается, что все ХПФ $q_i(s, \bar{\sigma}_x)$ различны [2].

На основании (2) и (3) передаточную матрицу замкнутой статистически линеаризованной МСАР можно также представить в канонической форме

$$\Phi_x(s, \bar{\sigma}_x) = C(s, \bar{\sigma}_x) \text{diag}\left\{\frac{1}{1 + q_i(s, \bar{\sigma}_x)}\right\} C^{-1}(s, \bar{\sigma}_x). \quad (4)$$

Как видно из (3), (4), N-мерной статистически линеаризованной МСАР может быть поставлена в соответствие совокупность N одномерных характеристических систем, каждая из которых действует вдоль одной оси канонического базиса. ХПФ разомкнутых и замкнутых характеристических систем при этом связаны теми же зависимостями, что и обычные передаточные функции разомкнутых и замкнутых одномерных систем. Нелинейные свойства статистически линеаризованной МСАР проявляются в зависимости её канонического базиса и множества ХПФ от среднеквадратических отклонений σ_{x_r} (которые, в свою очередь, зависят от входного воздействия φ). Матрица ковариаций P_x вектора x при этом дается выражением [3]

$$P_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(j\omega, \bar{\sigma}_x) S_\varphi(j\omega) \Phi_x^*(j\omega, \bar{\sigma}_x) d\omega, \quad (5)$$

где * есть символ сопряжения (т.е. транспонирования и комплексного сопряжения) матрицы. Заметим, что диагональные элементы матрицы P_x равны дисперсиям $\sigma_{x_r}^2$ переменных x_r . Исследование статистической точности нелинейных МСАР общего вида и однотипных МСАР в [3, 4] основывалось на выражениях (2)-(5), и размерность задачи определялась числом каналов N .

2. Статистически линеаризованные ЦМСАР и АМСАР. Допустим, передаточная матрица $W(s)$ линейной части МСАР на рис.1 является циркулянтной, т.е. имеет вид

$$W(s) = \begin{pmatrix} w_0(s) & w_1(s) & w_2(s) & \dots & w_{N-1}(s) \\ w_{N-1}(s) & w_0(s) & w_1(s) & \dots & w_{N-2}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1(s) & w_2(s) & w_3(s) & \dots & w_0(s) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Воспользовавшись принятыми в (6) обозначениями $w_0(s)$, $w_i(s)$ ($i=1, 2, \dots, N-1$) элементов первой строки циркулянтной матрицы $W(s)$, последнюю можно записать в виде следующего матричного полинома [2]:

$$W(s) = w_0(s)I + \sum_{k=1}^{N-1} w_k(s) U^k, \quad (7)$$

где I - единичная матрица, а

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

есть ортогональная (т.е. $U^{-1} = U^T$, $\det U = +1$) матрица перестановок [2].

Исключительно важным свойством ЦМСАР является то, что их собственные значения (ХПФ) могут быть представлены в аналитической форме при любой размерности N , а канонические базисы, а вместе с ним и модальная матрица S , наследуются от матрицы перестановок U (8). Интересно и важно отметить, что канонические базисы ЦМСАР являются постоянными и совпадают между собой для всех систем одинаковой размерности.

Допустим теперь, что матрица нелинейностей $F(x)$ на рис.1 по структуре включения нелинейных элементов в МСАР также является циркулянтной, т.е. имеет вид

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_0(x_1) & F_1(x_2) & F_2(x_3) & \dots & F_{N-1}(x_N) \\ F_{N-1}(x_1) & F_0(x_2) & F_1(x_3) & \dots & F_{N-2}(x_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_1(x_1) & F_2(x_2) & F_3(x_3) & \dots & F_0(x_N) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Тогда вместо (9) можно формально записать

$$F(x) = F_0(\cdot)I + \sum_{i=1}^{N-1} F_i(\cdot)U^i. \quad (10)$$

Формальность представления $F(x)$ в виде полинома (10) состоит в том, что $F(x)$ представляет собой функциональную матрицу, r -й столбец которой зависит нелинейным образом от r -й компоненты x_r вектора x .

На практике для ЦМСАР и АМСАР, как и для большинства МСАР вообще, весьма распространенной является ситуация, когда компоненты входного случайного вектора φ некоррелированы и имеют одинаковые спектральные плотности $S_\varphi(\omega)$. Более того, реальные входные сигналы при инженерных расчетах часто аппроксимируют статистически несвязанными, выбрав для них “наихудшую” спектральную плотность среди всех имеющихся. Поэтому в дальнейшем мы для простоты будем всегда полагать, что матрица спектральных плотностей входа $S_\varphi(j\omega)$ скалярна и равна $s_\varphi(\omega)I$.

Структурная симметрия взаимных связей между идентичными сепаратными каналами нелинейных ЦМСАР приводит к тому, что при подаче на их входы некоррелированных случайных функций с одинаковыми спектральными плотностями $S_\varphi(\omega)$ все дисперсии переменных x_r оказываются равными между собой. Действительно, допустим, что при $S_\varphi(j\omega) = s_\varphi(\omega)I$ все дисперсии на входах нелинейных элементов ЦМСАР одинаковы, т.е. $\sigma_{x_r}^2 = \sigma_x^2$. В этом случае матрица $K(\bar{\sigma}_x)$ статистических коэффициентов усиления зависит от единственной дисперсии σ_x^2 и является, в силу структурной циркулянтности матрицы нелинейностей $F(x)$ (9), циркулянтной. Это влечет за собой циркулянтность передаточных матриц (3) и (4) разомкнутой и замкнутой статистически линеаризованной ЦМСАР. Как следствие, эти передаточные матрицы могут быть представлены в каноническом виде при помощи преобразования подобия:

$$Q(s, \sigma_x) = C \text{diag}\{q_i(s, \sigma_x)\} C^{-1}, \quad (11)$$

$$\Phi_x(s, \sigma_x) = C \text{diag}\left\{ \frac{1}{1 + q_i(s, \sigma_x)} \right\} C^{-1}, \quad (12)$$

где $q_i(s, \sigma_x)$ есть ХПФ разомкнутой статистически линеаризованной ЦМСАР, а C - унитарная модальная матрица, составленная из ортогональных собственных векторов

матрицы перестановок U (8) [2]. Иными словами, канонический базис статистически линейаризованной ЦМСАР при $S_\varphi(j\omega) = s_\varphi(\omega)I$ является ортогональным и совпадает с каноническим базисом матрицы U . Подчеркнем также, что ХПФ $q_i(s, \sigma_x)$ при принятых выше условиях зависят нелинейным образом от единственной скалярной величины σ_x .

Эрмитова матрица спектральных плотностей вектора x :

$$S_x(j\omega, \sigma_x) = s_\varphi(\omega)\Phi_x(j\omega, \sigma_x)\Phi_x^*(j\omega, \sigma_x) \quad (13)$$

при этом также является циркулянтной. Кроме того, эта матрица принадлежит к классу положительно определенных матриц и совпадает со своей сопряженной [2, 5]. Напомним, что собственные значения эрмитовой циркулянтной матрицы, как и любой другой эрмитовой матрицы, всегда вещественны. Напомним также, что все диагональные элементы любой эрмитовой циркулянтной матрицы действительны (в силу эрмитовости) и равны между собой (в силу циркулянтности). Отсюда непосредственно приходим к выводу, что равны между собой и диагональные элементы матрицы спектральных плотностей $S_x(j\omega, \sigma_x)$ (13). Следовательно, интегралы в бесконечных пределах от диагональных элементов матрицы $S_x(j\omega, \sigma_x)$, дающие по определению дисперсии $\sigma_{x_r}^2$ переменных x_r , совпадают между собой, т.е. $\sigma_{x_r}^2 = \sigma_x^2$, что и требовалось доказать.

Воспользовавшись каноническим представлением (12) передаточной матрицы $\Phi_x(s, \sigma_x)$ ЦМСАР после замены в (12) s на $j\omega$ и учитывая, что для унитарной модальной матрицы C справедливо соотношение $C^{-1} = C^*$, из (13) после ряда несложных преобразований получим

$$S_x(j\omega, \sigma_x) = C \operatorname{diag} \left\{ \frac{s_\varphi(\omega)}{|1 + q_i(j\omega, \sigma_x)|^2} \right\} C^*, \quad (14)$$

откуда заключаем, что канонический базис положительно определенной эрмитовой матрицы $S_x(j\omega, \sigma_x)$ совпадает с каноническим базисом ЦМСАР, а собственные значения $\gamma_{xi}(j\omega, \sigma_x)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) матрицы $S_x(j\omega, \sigma_x)$ равны

$$\gamma_{xi}(j\omega, \sigma_x) = \frac{1}{|1 + q_i(j\omega, \sigma_x)|^2} s_\varphi(\omega). \quad (15)$$

Интегрируя обе части в (15) по ω в бесконечных пределах, приходим к каноническому представлению матрицы ковариаций P_x (10):

$$P_x = C \operatorname{diag} \{ D_i(\sigma_x) \} C^{-1}, \quad (16)$$

где $D_i(\sigma_x)$ - дисперсии "ошибок" одномерных характеристических систем, определяемые по формулам

$$D_i(\sigma_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|1 + q_i(j\omega, \sigma_x)|^2} S_\varphi(\omega) d\omega, \quad (17)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

Итак, при подаче на входы отдельных каналов нелинейной устойчивой ЦМСАР центрированных случайных функций со скалярной матрицей спектральных плотностей $S_\varphi(j\omega) = s_\varphi(\omega)I$ матрица ковариаций P_x вектора x имеет одинаковые диагональные элементы и связана с диагональной матрицей дисперсий $D_i(\sigma_x)$ (17) преобразованием подобия (16).

Из теории матриц известно, что след (сумма диагональных элементов) матриц инвариантен к преобразованию подобия [5]. Как следствие, след $\text{tr}\{P_x\}$ матрицы ковариаций P_x , равный в нашем случае $N \cdot \sigma_x^2$, в то же время равен сумме дисперсий $D_i(\sigma_x)$ одномерных характеристических систем, откуда окончательно имеем

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s_\varphi(\omega)}{|1 + q_i(j\omega, \sigma_x)|^2} d\omega \right\}. \quad (18)$$

Следовательно, одинаковые при $S_\varphi(j\omega) = s_\varphi(\omega)I$ дисперсии на входах нелинейных элементов статистически линеаризованной ЦМСАР равны среднему арифметическому значению дисперсий “ошибок” характеристических систем и находятся из скалярного нелинейного уравнения (18). Принимая во внимание существующие табличные интегралы для расчета дисперсий одномерных характеристических систем с комплексными коэффициентами [2], а также тот факт, что ХПФ ЦМСАР записываются в аналитической форме при любом числе N отдельных каналов, приходим к выводу, что задача сводится к стандартной одномерной задаче. Единственная неизвестная σ_x в (18) при этом определяется по классической схеме, описанной, например, в [1]. Иными словами, задача исследования статистической точности ЦМСАР произвольной размерности N , в принципе, оказывается не сложнее, чем в обычном случае систем с одним входом и выходом - возрастает лишь объем вычислений (учитывая возможности современных вычислительных средств, последний фактор представляется малозначачим).

Перейдем теперь к случаю АМСАР [2]. Основное отличие антициркулянтных матриц от циркулянтных состоит в том, что расположенные по обе стороны от главной диагонали симметричные элементы имеют противоположные знаки, т.е. каждая последующая строка получается из предыдущей сдвигом на один элемент вправо, причем последний элемент предыдущей строки становится первым элементом последующей строки с обратным знаком. Так, антициркулянтная передаточная матрица линейной части системы $W(s)$ на рис. 1 может быть записана в виде

$$W(s) = \begin{pmatrix} W_0(s) & W_1(s) & W_2(s) & \dots & W_{N-1}(s) \\ -W_{N-1}(s) & W_0(s) & W_1(s) & \dots & W_{N-2}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -W_1(s) & -W_2(s) & -W_3(s) & \dots & W_0(s) \end{pmatrix} \quad (19)$$

Если простейшей из циркулянтных матриц является матрица перестановок U (8) и любую циркулянтную матрицу можно выразить в виде полинома от U , то в случае антициркулянтных матриц аналогичную роль играет матрица перестановок с изменением знака последнего элемента, обозначаемая через U_- [2]. Эта матрица имеет вид

$$U_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Соответственно, структурно антициркулянтная матрица нелинейностей АМСАР имеет вид

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_0(x_1) & F_1(x_2) & F_2(x_3) & \dots & F_{N-1}(x_N) \\ -F_{N-1}(x_1) & F_0(x_2) & F_1(x_3) & \dots & F_{N-2}(x_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -F_1(x_1) & -F_2(x_2) & -F_3(x_3) & \dots & F_0(x_N) \end{pmatrix} \quad (21)$$

Поскольку структурные и геометрические свойства ЦМСАР и АМСАР полностью аналогичны, то все приведенные выше рассуждения и результаты переносятся целиком на случай нелинейных статистически линеаризованных АМСАР. В частности, определение скалярной неизвестной σ_x на входах нелинейностей АМСАР осуществляется по выражению (18), где ХПФ $q_i(s, \sigma_x)$ находятся по соответствующим формулам для АМСАР [2].

Таким образом, в статье показано, что совместное применение метода ХПФ и метода статистической линеаризации позволяет математически строго свести задачу исследования статистической точности нелинейных циркулянтных и антициркулянтных МСАР к одномерной задаче при любой размерности (числе каналов) N системы, где единственной неизвестной является среднее квадратическое отклонение σ_x , определяемое из скалярного нелинейного уравнения (18).

Пример. Исследуем на основе изложенной методики статистическую точность простой антисимметричной МСАР (рис. 2), где нелинейности в отдельных каналах представляют собой одинаковые элементы насыщения с зоной линейности $\Delta = \pm 3$ и единичным усилением, а числовая матрица R имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} \cos \epsilon & \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \epsilon & -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \epsilon \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \epsilon & \cos \epsilon & \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \epsilon \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \epsilon & -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix} \quad (22)$$

Параметры передаточных функций отдельных каналов системы примем равными $K = 10$, $T = 0,2$ с. Можно показать, что собственные значения матрицы R имеют вид

$$\lambda_1 = \cos \epsilon, \quad \lambda_{2,3} = \cos \epsilon \pm j \sin \epsilon, \quad (23)$$

и при углах ϵ , меньших, чем значение запаса устойчивости по фазе отдельных каналов, автоколебания в МСАР на рис. 2 не возникают, т.е. система устойчива. В нашем случае эта величина равна $\epsilon_k = 38,68^\circ$.

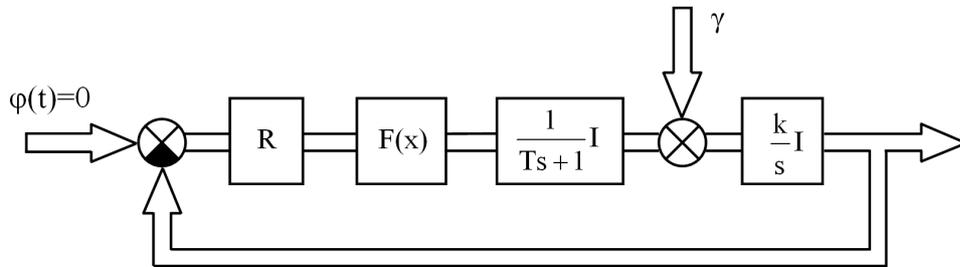


Рис. 2. Трехмерная простая антисимметричная система

Пусть компоненты вектора внешнего воздействия γ являются некоррелированными стационарными случайными функциями времени, имеющими одинаковую постоянную спектральную плотность N_0 (белый шум) и нулевые математические ожидания. При этих условиях одинаковые дисперсии σ_x на входах нелинейностей определяются уравнением (18).

Передаточная матрица $\Phi_x(s, \sigma_x)$ статистически линеаризованной системы, связывающая x с γ , имеет вид

$$\Phi_x(s, \sigma_x) = - \left[I + \frac{10k(\sigma_x)}{s(0,2s+1)} R \right]^{-1},$$

или в канонической форме:

$$\Phi_x(s, \sigma_x) = - C \text{diag} \left\{ \frac{10\lambda_i(0,2s+1)}{0,2s^2 + s + 10\lambda_i k(\sigma_x)} \right\} C^{-1}.$$

Отсюда следует, что передаточные функции $q_i(s, \sigma_x)$ одномерных характеристических систем с точностью до знака “минус” равны

$$q_i(s, \sigma_x) = \frac{10\lambda_i(0, 2s+1)}{0, 2s^2 + s + 10\lambda_i k(\sigma_x)} \quad (i=1, 2, 3),$$

где коэффициент статистической линейзации $k(\sigma_x)$ дается известным выражением (см., например, [1]).

Для определения дисперсий $D_i(\sigma_x)$ характеристических систем при постоянной спектральной плотности N_0 случайных воздействий воспользуемся табличными интегралами, приведенными в [2]. Применение этих интегралов дает следующие аналитические выражения:

$$D_i(\sigma_x) = \frac{1}{2} \frac{|\lambda_i|^2 [1 + \operatorname{Re}\{\lambda_i\} K k(\sigma_x) \Gamma] N_0 K}{k(\sigma_x) [\operatorname{Re}\{\lambda_i\} - (\operatorname{Im}\{\lambda_i\})^2 K k(\sigma_x) \Gamma]} \quad (i=1, 2, 3). \quad (24)$$

На основании выражений (22) - (24) окончательно получим следующее скалярное нелинейное уравнение относительно неизвестного среднеквадратического отклонения σ_x :

$$\sigma_x^2 = \frac{5N_0 [1 + 2k(\sigma_x) \cos \varepsilon]}{3k(\sigma_x)} \left[\cos \varepsilon + \frac{2}{\cos \varepsilon - 2k(\sigma_x) (\sin \varepsilon)^2} \right]. \quad (25)$$

Уравнение (25) решалось при различных $\varepsilon = \text{const}$ ($0^\circ \leq \varepsilon \leq 50^\circ$) и изменении спектральной плотности N_0 от нуля до трех. Результаты решения в виде графиков даны на рис. 3. При $\varepsilon = 0^\circ$ матрица R переходит в единичную I , а выражение (25) принимает вид

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{5N_0 [1 + 2k(\sigma_x)]}{k(\sigma_x)}},$$

т.е. совпадает с выражением для среднеквадратического отклонения σ_x изолированного канала системы. При увеличении угла запасы устойчивости взаимосвязанной МСАР на рис. 2 уменьшаются, а среднеквадратические отклонения σ_x возрастают. На рис. 4 для сравнения показаны зависимости σ_x от N_0 для нелинейной МСАР на рис. 2 (сплошная линия) и той же системы без элементов насыщения (пунктирная линия) при $\varepsilon = 30^\circ$.

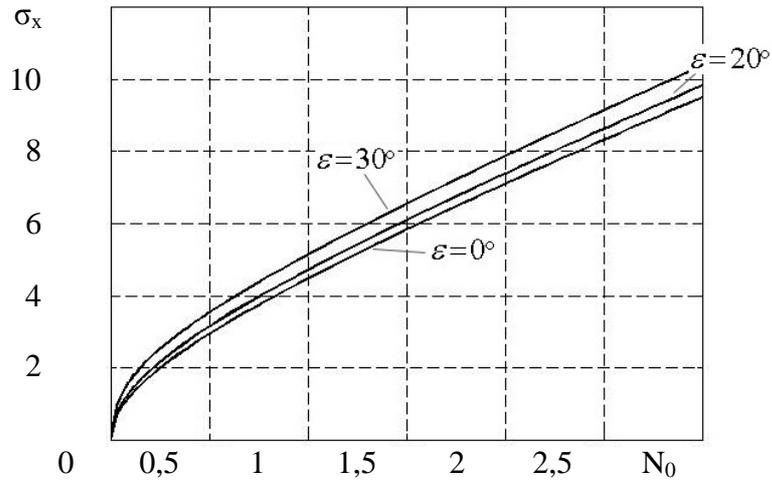


Рис. 3. Кривые зависимости среднеквадратического отклонения σ_x от N_0 при различных углах ϵ

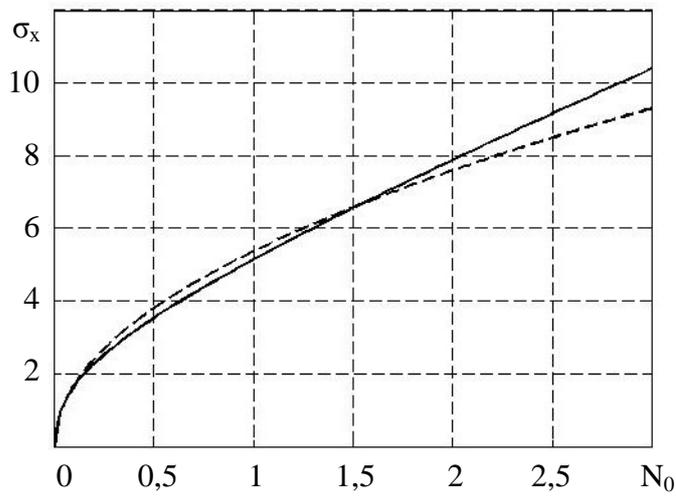


Рис. 4. Кривые зависимости σ_x от N_0 в нелинейной (сплошная линия) и линейной (пунктирная линия) МСАР при $\epsilon = 30^\circ$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пугачев В.С., Казаков И.Е., Евланов Л.Г. Основы статистической теории автоматических систем.-М.: Машиностроение, 1974.-400с.
2. **Gasparyan O.N.** Linear and Nonlinear Multivariable Feedback Control: A Classical Approach - John Wiley & Sons Ltd., Chichester, Sussex, UK, 2008.
3. **Гаспарян О.Н., Чилингарян А.Р., Овакимян Р.М.** Исследование точности нелинейных многомерных систем автоматического регулирования при случайных воздействиях // Информационные Технологии и Управление.- 2008.- № 7.- С. 8-21.
4. **Гаспарян О.Н., Чилингарян А.Р., Овакимян Р.М.** О статистической динамике нелинейных одностипных систем многосвязного регулирования // Информационные Технологии и Управление.- 2008. - № 7.- С. 22-35.
5. **Shores T.S.** Applied Linear Algebra and Matrix Analysis.- Springer, 2007.- 393p
6. **Bitter R., Mohiudin T., Nawrocki M.** LabVIEW: Advanced Programming Techniques. 2-nd ed.- CRC Press, 2007.- 520 p.

ГИУА (П). Материал поступил в редакцию 16.04.2010.

Օ.Ն. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ, Ռ.Մ. ՀՈՎԱԿԻՄՅԱՆ, Ա.Ռ. ՉԻԼԻՆԳԱՐՅԱՆ

ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ԿԱՆՈՆԱԿԱՆ ԲԱԶԻՍՆԵՐՈՎ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԲԱԶՄԱՉԱՓ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ
ՎԻՃԱԿԱԳՐԱԿԱՆ ՃՇՏՈՒԹՅԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Բերված է բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաների մեթոդի ընդհանրացումը ոչ գծային ցիրկուլյանտ և հակացիրկուլյանտ ավտոմատ կառավարման համակարգերի ճշտության հետազոտման համար՝ ստացիոնար պատահական ազդեցությունների դեպքում: Ստացվել են նշված դասերի վիճակագրական գծայնացված ոչ գծային համակարգերի փոխանցման մատրիցների կանոնական ներկայացումները: Ցույց է տրվել, որ կամայական թվով կապուղիներով ցիրկուլյանտ և հակացիրկուլյանտ համակարգերի վիճակագրական ճշտության հետազոտման խնդիրը բերվում է միաչափ խնդրին և կարող է լուծվել դասական կառավարման տեսության հայտնի մեթոդներով: Բերվել է եռաչափ հակասիմետրիկ համակարգի վիճակագրական ճշտության հաշվարկման թվային օրինակ:

Առանցքային բառեր. բազմաչափ կառավարման համակարգ, բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաների մեթոդ, ոչ գծայնությունների ստատիստիկ գծայնացում, ցիրկուլյանտ համակարգ, հակացիրկուլյանտ համակարգ, վիճակագրական ճշտություն, փոխանցման ֆունկցիաների մատրից, կանոնական բազիս:

O.N. GASPARYAN, R.M. HOVAKIMYAN, A.R. CHILINGARYAN

INVESTIGATION OF STATISTICAL ACCURACY OF NONLINEAR MULTIVARIABLE
CONTROL SYSTEMS WITH ORTHOGONAL CANONICAL BASES

An extension of the characteristic transfer function method to the investigation problem of nonlinear circulant and anticirculant feedback control systems accuracy subjected to stationary stochastic signals is given. The canonical representations of transfer function matrices of statistically linearized nonlinear systems of the indicated classes are obtained. It is shown that the problem of statistical accuracy investigation of nonlinear circulant and anticirculant systems with an arbitrary number of channels is strictly reduced to a one-dimensional task and can be solved by means of standard methods of classical control theory. A numerical example of computing statistical accuracy of a three-dimensional anti-symmetrical control system is given.

Keywords: multivariable feedback control system, characteristic transfer function method, statistical linearization of nonlinearities, circulant system, anticirculant system, canonical basis.